Russian Academy of Sciences
Institute of Philosophy

LOGICAL INVESTIGATIONS

Volume 22. Number 1

Moscow
2016

Российская академия наук
Институт философии

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Том 22. Номер 1

Москва
2016

Logical Investigations

Scientific-Theoretical Journal

ISSN 2074-1472 (Print)
ISSN 2413-2713 (Online)

Publisher: Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences.

Frequency: 2 times per year.

First issue: 1993; the journal is a redesigned continuation of the annual "Logical Investigations" that has been published since 1993 till 2015.

The journal is registered with the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology, and Mass Media (Roskomnadzor). The Mass Media Registration Certificate No. FS77-61228 on April 3, 2015.

The Journal is indexed in *Zentralblatt MATH*, *Mathematical Reviews*, *Russian Science Citation Index* (RINC).

The journal is included in the list of editions recommended by the Higher Attestation Commission for placement of publications of post-graduate students seeking Candidate's and Doctor's degrees.

Subscription index in the United Catalogue "The Russian Press" is 42046.

All materials published in Logical Investigations undergo peer review process.

Editorial address: 12/1 Goncharnaya St., Moscow, 109240, Russian Federation
Tel.: +7 (495) 697-96-65
E-mail: `logicalinvestigations@gmail.com`
Website: `http://eng.iph.ras.ru/log_inv.htm`

Логические исследования

Научно-теоретический журнал

ISSN 2074-1472 (печатн.)
ISSN 2413-2713 (электр.)

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт философии Российской академии наук.

Периодичность: 2 раза в год.

Выходит с 1993 г.; журнал является прямым продолжением ежегодника «Логические исследования», издававшегося с 1993 по 2015 г.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации СМИ: ПИ № ФС77-61228 от 03 апреля 2015 г.

Журнал реферируется и индексируется *Mathematical Reviews*, *Zentralblatt MATH*, *РИНЦ*.

Журнал включен в Перечень российских рецензируемых научных журналов, рекомендованных ВАК, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

Подписной индекс Объединенного каталога «Пресса России» — 42046.

Публикуемые материалы прошли процедуру рецензирования и экспертного отбора.

Адрес редакции: 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1
Тел.: +7 (495) 697-96-65
E-mail: `logicalinvestigations@gmail.com`
Сайт: `http://iph.ras.ru/login.htm`

TABLE OF CONTENTS

TABLE OF CONTENTS

Яакко Хинтикка
(1929–2015)

Каарло Яакко Юхани Хинтикка (Kaarlo Jaakko Juhani Hintikka) выдающийся финский логик и философ мирового значения родился 12 января 1929 года в Вантаа (Финляндия). Философское образование получил в Хельсинкском университете и Вильямс Колледже (США). В 1953 г. под руководством знаменитого финского философа и логика Г.Х. фон Вригта (который в 1948 г. стал преемником Людвига Виттгенштейна в Кембридже) защитил диссертацию по дистрибутивным нормальным формам. С этим новым понятием связаны также и другие его достижения: разработка в 1957 г. семантики возможных миров (модельных множеств) и деление понятия информации на поверхностную и глубинную. Отсюда следовало, что общезначимые формулы не являются бессодержательными утверждениями, как считалось ранее, а несут в себе информацию.

В 1962 г. публикуется его главная книга раннего периода «Знание и убеждения» [12], где разрабатывается один из первых языков эпистемологической логики. В 1959 г. в возрасте 30 лет Хинтикка становится профессором практической философии Хельсинского Университета, а в 1964 г. профессором философии Стэнфордского университета, ставшего одним из ведущих центров в области философии науки и философской логики. С 1978 по 1990 Хинтикка был профессором Университета Флориды, а с 1990 г. и до конца жизни профессором Бостонского университета.

Научные интересы Хинтикки поражают своим разнообразием и глубиной исследования. Это теоретико-игровая семантика логики, призванная выработать и объяснить определенные «стратегии» обоснования и вывода, аналитические таблицы, индуктивная логика, теория доказательств, инфинитарные логики, интенсиональные логики и пропозициональные установки, философия науки, история философия и логики (Аристотель, Декарт, Кант, Пирс, Фреге, Виттгенштейн, Гёдель).

В 1990-е годы Хинтикка начал разрабатывать *IF*-логику (логика с ветвящимися кванторами), которая привела к пересмотру оснований современной математики. Главная заслуга Хинтикки состоит в формализации идеи независимости кванторов, т.е. необходимо учитывать независимость квантификации одной переменной от другой. В результате *IF*-логика становится богаче классической логики предикатов, а само понятие кванторов более соответствует нашим интуициям. Главной особенностью новой логики является ее неполнота, что означает невозможность дать список аксиом, из которых все общезначимые формулы первопорядковой *IF*-логики могут быть выведены по чисто формальным правилам. Хинтикка предлагает пересмотреть само понятие полноты в общем и фактически пытается свести всю обычную математику к расширенной первопорядковой *IF*-логике. Это дало повод заговорить о революции в логике. В связи с этим большой интерес вызвала его книга «Пересмотр принципов математики» [13], которую сравнивали с книгой Б. Рассела «Принципы математики» (1903).

Впоследствии опираясь на теоремы Гёделя о неполноте, Хинтикка вступает в дискуссию между механистами (утверждающими, что человеческий разум может быть точно смоделирован цифровым компьютером или машиной Тьюринга) и анти-механистами и принимает сторону последних, утверждая, что результат Гёделя выявляет ограниченность вычислительных машин, а не людей с их логикой и математикой и уж конечно не человеческого разума [8].

В течение более, чем 60-ти летней научной деятельности, Хинтикка опубликовал около 40 книг и более 300 научных статей. Его работы переведены на многие языки, в том числе, несколько книг опубликовано на русском языке (см. [2, 7, 9], а также статьи в журнале «Вопросы философии» [1, 3, 4, 6, 10]). С 1996 по 2004 им было опубликовано шесть томов избранных работ (Kluwer Academic Publishers), а в 2006 г. в серии «Библиотека ныне здравствующих философов» вышел посвященный ему том [11] (в связи с этим см. [5]) с полной библиографией работ, что стало свидетельством высокой оценки его результатов.

Признанием заслуг Хинтикки явилось также его избрание в Финскую академию наук и искусств (1961), академию Финляндии (1970), Американскую академию искусств и науки (1974), Норвежскую академию наук и искусств (1991), а в 1999 г. Хинтикка становится иностранным членом Российской академии наук. В 2005 г. ему была присуждена международная премия Рольфа Шока по логике и философии «за пионерский вклад в логическом анализе модальных понятий, и в частности понятий знания и убеждений».

Кроме высокой активности в научной деятельности, преподавании и публикациях, Хинтикка занимал высокое положение во многих международных организациях, в том числе был вице-президентом Ассоциации символической логики в 1968–1971, вице-президентом Отделения логики, методологии и философии науки Международного объединения истории и философии науки (DLMPS/IUHPS) в 1971–1975 и президентом в 1975 г. В 1998 г. Хинтикка был председателем организационного комитета двадцатого Всемирного философского конгресса. В 1998–2011 гг. он был Президентом Международного Института философии.

Яакко Хинтикк умер 12 августа 2015 года через несколько дней после окончания 15-го Международного конгресса по логике, методологии и философии науки, проходившегося в Хельсинки, где он принял участие сразу в двух международных конференциях.

* * *

У Яакко Хинтикки сложились особые научные и дружественные отношения с российскими логиками и философами. В 1971 г. был подписан Прокол о сотрудничестве между Академией наук СССР и Финской академией наук. Опираясь на этот документ в 1975 г. Хинтикка и выдающийся отечественный логик В.А. Смирнов договорились о проведении Советско-Финских коллоквиумов по логике. Первый коллоквиум был проведен в Финляндии в 1976 г., а всего по 1997 г. было проведено девять таких коллоквиумов. В 2012 г. в Санкт-Петербурге состоялся Открытый Российско-Финский коллоквиум по логике (ORFIC). Об истории проведения этих коллоквиумов см. в [14]. Также Хинтикка принимал участие в других конференциях философской направленности, проводимых в нашей стране. В 1986 г. в Москве с успехом прошла советско-американская конференция по эпистемологии, где Я. Хинтикка возглавлял группу известных американских философов.

Общение с Яакко Хинтиккой всегда было на редкость плодотворным и незабываемым благодаря его широчайшей эрудиции, открытости и доброжелательности.

Литература

[1] *Хинтикка Я.* Информация, причинность и логика восприятия // Вопросы философии. 1975. № 6. С. 38–50.

[2] *Хинтикка Я.* Логико-эпистемологические исследования (Логика и методология науки). М.: Прогресс, 1980. 447 с.

[3] *Хинтикка Я.* Проблема истины в современной философии // Вопросы философии. 1996. № 9. С. 46–58.

[4] *Хинтикка Я.* Действительно ли логика — ключ ко всякому хорошему рассуждению? // Вопросы философии. 2000. № 11. С. 105–125.

[5] Яакко Хинтикка в библиотеке ныне здравствующих философов: диалог // Философия науки. 2010. № 3 (46). С. 139–157.

[6] *Хинтикка Я.* Философские исследования: проблемы и перспективы // Вопросы философии. 2011. № 7. С. 3–17.

[7] *Хинтикка Я.* О Витгенштейне. Людвиг Витгенштейн из «Лекций» и «Заметок». М.: Канон+РООИ, 2012. 272 с.

[8] *Хинтикка Я.* Рациональность, логика и их пределы // Рациональность и её границы / Под ред. А.А. Гусейнова и В.А. Лекторскго. М.: ИФ РАН, 2012. С. 21–33.

[9] *Хинтикка Я.* О Гёделе. Курт Гёдель. Статьи. М.: Канон+РООИ, 2014. 224 с.

[10] *Хинтикка Я.* Рене мыслит, следовательно, Картезий существует // Вопросы философии. 2014. № 7. С. 115–124.

[11] The Philosophy of Jaakko Hintikka (The Library of Living Philosophers)/ Eds. by R.E. Auxier, L. Hahn. Open Court Publishing Co, U.S., 2006. 971 p.

[12] *Hintikka J.* Knowledge and Belief — An Introduction to the Logic of the Two Notions. Ithaca, N.Y.: Cornell University Press, 1962. 179 p.

[13] *Hintikka J.* The Principles of Mathematics Revisited. New York: Cambridge University Press, 1996. 288 p.

[14] *Karpenko A.S.* Preface (The history of Finish-Soviet logic colloquium) // Logical Investigations. 2013. Vol. 19. Special issue. P. 5–9.

А.С. Карпенко

Логические исследования
2016. Т. 22. № 1. С. 13–31
УДК 510.643

Logical Investigations
2016, vol. 22, no 1, pp. 13–31

Неклассическая логика

Non-classical Logic

А.С. Карпенко[1], $\boxed{\text{А.В. Чагров}}$

Модальная пропозициональная логика истины Tr и ее полнота

Карпенко Александр Степанович
Сектор логики, Институт философии РАН.
109240, Российская федерация, Москва, ул. Гончарная, 12, строение 1.
E-mail: as.karpenko@gmail.com

Чагров Александр Васильевич
Кафедра алгебры и математической логики,
Тверской государственный университет.
170100, Российская федерация, Тверь, ул. Желябова, 33
E-mail: chagrovy@mail.ru

В статье рассмотрена четырехзначная модальная логика Собочиньского **V2** (расширение **S5**). Прослежено ее возникновение, описываются интересные свойства и приводятся различные эквивалентные формулировки. Особый интерес представляют ее алгебраические модели: в виде расширения алгебры Де Моргана булевым отрицанием $\neg$ и в виде расширения булевой алгебры эндоморфизмом g, который затем интерпретируется как пропозициональный оператор истинности T. Логика, соответствующая последнему случаю, обозначена посредством **Tr**. Обращается внимание на применение **Tr** в теории истины М. Фиттинга. Приводится аксиоматизация **Tr** в языке $(\rightarrow, \neg, T)$. Доказывается полнота логики **Tr** с помощью применения очень мощной теоремы Салквиста, которая дает достаточное условие полноты по Крипке для нормальных модальных логик. Доказывается также алгебраическая полнота логики **Tr**.

Ключевые слова: модальная логика **V2**, алгебра Де Моргана, булева алгебра, эндомофизмы, логика **Tr**, теория истины Фиттинга, полнота по Крипке, теорема Салквиста, алгебраическая полнота

1. Четырехзначная классическая логика $\mathbf{C_4}$

Пусть $\mathfrak{M}_4^C$ есть четырехзначная логическая матрица

$$\langle\{1, a, b, 0\}, \neg, \rightarrow, \vee, \wedge, \{1\}\rangle,$$

[1]Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 14-03-00341.

которая получена посредством прямого произведения матрицы $\mathfrak{M}_2^C$ (для классической пропозициональной логики $\mathbf{C}_2$) саму на себя, т.е. $\mathfrak{M}_4^C = \mathfrak{M}_2^C \times \mathfrak{M}_2^C$, где матричные операции $\neg, \rightarrow, \vee, \wedge$ определяются следующим образом:

x	$\neg x$
1	0
a	b
b	a
0	1

$\rightarrow$	1	a	b	0
1	1	a	b	0
a	1	1	b	b
b	1	a	1	a
0	1	1	1	1

$\vee$	1	a	b	0
1	1	1	1	1
a	1	a	1	a
b	1	1	b	b
0	1	a	b	0

$\wedge$	1	a	b	0
1	1	a	b	0
a	a	a	0	0
b	b	0	b	0
0	0	0	0	0

Как обычно:

$$x \vee y = \neg x \rightarrow y,$$

$$x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y),$$

$$x \rightarrow y = \neg x \vee y,$$

$$x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x).$$

Хорошо известно, что матрица $\mathfrak{M}_4^C$ является характеристической для $\mathbf{C}_2$. Логику с соответствующими логическими связками обозначим посредством $\mathbf{C}_4$.

2. Модальная логика V2 и ее алгебры

В книге [12] К. Льюис и К. Лэнгфорд определяют и исследуют модальные системы **S**1–**S**5, используя главным образом 4-значные матрицы. Обратим внимание на группу истинностных таблиц для связок $\rightarrow, \neg$ и $\Box$, которые образуют матрицу «группы III» [12, с. 493], где модальный оператор $\Box$ определяется следующим образом:

$$\Box 1 = 1; \Box a = \Box b = \Box 0 = 0.$$

В [16, с. 305] Б. Собочиньский обнаруживает формулу α:

$$\Box p \vee \Box(p \to q) \vee \Box(p \to \neg q)$$

и устанавливает, что она не выводима в **S5**, а добавление ее к **S5** не превращает всю систему в $\mathbf{C}_2$. Собочиньский замечает, что в силу результата С. Скрогса [15] о предтабличности **S5** система $\mathbf{S5}+\alpha$ является конечнозначной логикой. В [17, с. 350] эта система обозначается посредством **V2**, и это стало её стандартным обозначением. Сам Собочиньский занялся исследованием системы $\mathbf{V1}(\mathbf{S4}+\alpha)$. Нас же как раз интересует система **V2**.

В [5, с. 121] Е. Леммон рассматривает двухэлементные модели Крипке для 15 четырехзначных модальных логик, являющихся расширением $\mathbf{C_4}$. Как раз $\Re_{15}$ является такой моделью для **V2**, где отношение достижимости U определяется следующим образом: $\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$. Также эти модели наглядно представлены с помощью *направленных графов* (с. 122).

В [6] Л.Л. Максимова рассмотрела все нормальные расширения модальной логики **S5** (кроме самой $\mathbf{S5},\mathbf{C_2}$ и противоречивой логики), которые обладают интерполяционным свойством Крейга. Оказалось, что модальная логика **V2** является *единственным* таким расширением!

В [1] Н.М. Ермолаева и А.А. Мучник рассматривают расширение алгебр Де Моргана[2] операцией булева отрицания $\neg$. Получившиеся алгебры названы “MB-алгебрами”[3]. Доказывается полнота аксиоматики MB-алгебр и устанавливается топологическое (множественное) представление MB-алгебр. Авторы показывают, что «логика MB-алгебр… является усилением **S5**, а именно **V2**» [1, с. 190]. Также утверждается, что матрица «группы III» является характеристической для модальной логики **V2**, а сама логика **V2** является “предполной”. Это значит, что между **V2** и $\mathbf{C}_2$ нет промежуточного исчисления. Дру-

[2]То есть дистрибутивная решетка $\langle A,\vee,\wedge\rangle$ с 1 и 0 и операцией $\sim$, причем $\sim(\mathrm{x}\vee\mathrm{y}) = \sim x \wedge \sim y; \sim(x\wedge y) = \sim x \vee \sim y; \sim\sim x = x; \sim 1 = 0; \sim 0 = 1; \sim a = a; \sim b = b; a\vee b = 1; a\wedge b = 0$. Операция $\sim$ называется отрицанием Де Моргана. Заметим, что решетка Де Моргана $\langle A,\vee,\wedge,\sim\rangle$ лежит в основании известной четырехзначной логики Белнапа (см. [9]).

[3]Обратим внимание на четырехзначную логику **DMB4** в [13]. Здесь вводится алгебраическая аксиоматизация **DMB4** в сигнатуре $\langle A,\vee,\wedge,\sim,\neg,1,0\rangle$ под названием *деморгановская булева алгебра*: $\langle A,\vee,\wedge,\sim\rangle$-редукт есть решетка Де Моргана, а $\langle A,\vee,\wedge,\neg,1,0\rangle$-редукт есть булева алгебра. Здесь же представлено секвенциальное исчисление для **DMB4**.

гими словами, $\mathbf{C}_2$ является единственным собственным непротиворечивым расширением **V2**.

В [2] отмечается, что многие неклассические пропозициональные логики и соответствующие им алгебры могут быть единообразно введены и исследованы с помощью эндоморфизмов в дистрибутивных решетках. Здесь рассматривается расширение булевой алгебры $B = \langle A, \vee, \wedge, \neg \rangle$ одноместной операцией g, удовлетворяющей условиям дистрибутивности:

$$g(x \vee y) = g(x) \vee g(y), \qquad (1)$$
$$g(x \wedge y) = g(x) \wedge g(y), \qquad (2)$$

т. е. g является эндоморфизмом дистрибутивной решетки, причем

$$g(1) = 1, g(0) = 0. \qquad (3)$$

Также имеет место

$$g\neg(x) = \neg g(x). \qquad (4)$$

Полученная алгебра называется Bg-алгеброй, а тождества булевой алгебры вместе с (1)–(4) образуют аксиоматику для Bg-алгебр. Здесь же доказывается теорема стоуновского типа о представлении Bg-алгебр алгеброй множеств.

Если для всякого x $gg(x) = x$, то g есть инволюция. Заметим, что тождество (4) есть не что иное, как определение отрицания Де Моргана $\sim$.

Полагая в Bg-алгебре

$$\Box x = x \wedge g(x), \Diamond x = x \vee g(x),$$

получаем алгебру, соответствующую модальной логике **V2**.

В свою очередь, в этой алгебре операция g определяется следующим образом:

$$g(x) = \Box x \vee (\neg x \wedge \Diamond x), \text{где}\, \Diamond x = \neg \Box \neg x \; [2, \text{c.}\, 245],$$

т. е. $g(1) = 1, g(0) = 0, g(a) = b, g(b) = a$.

Таким образом, показано, что логики со связками $\{\neg, \rightarrow, \vee, \wedge, \Box\}$ (= **V2**) и $\{\neg, \rightarrow, \vee, \wedge, g\}$ функционально эквивалентны.

3. Логика Tr

Логику со связками $\{\to, \neg, T\}$, где T есть g, обозначим посредством **Tr**.[4] Связку T будем интерпретировать как оператор истинности. Заметим, что для него выполняется закон исключенного третьего:

$$T(\varphi) \vee T(\neg\varphi)$$

и он коммутирует с отрицанием $\neg$:

$$\neg T\varphi \leftrightarrow T\neg\varphi.$$

Обратим внимание на работу М. Фиттинга [8]. В то время как С. Крипке в своей известной работе о теории истины [11], альтернативной к теории истины Тарского, использует трехзначную логику Клини $\mathbf{K}_3$ [4, § 64], Фиттинг применяет четырехзначную логику, считая ее более естественной. Четырехзначная логика позволяет работать с полными решетками, а не с полу-решетками, что упрощает математический аппарат. Фиттинг подчеркивает, что четырехзначный подход имеет самое прямое отношение к семейству би-решеток (см. [10]), где наименьшей нетривиальной би-решеткой является как раз решетка Де Моргана. Развиваемая здесь четырехзначная теория истины включает в себя также подход Крипке. Интересно, что здесь Фиттинг расширяет язык новой теории истины операцией “конфляция” *(conflation)*, которая есть не что иное как эндоморфизм g.

4. Аксиоматизация Tr

1. Множество всех пропозициональных тавтологий (включая формулы с оператором T).
2. $T(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (T\varphi \to T\psi)$.
3. $\neg T\varphi \leftrightarrow T\neg\varphi$.
4. $TT\varphi \leftrightarrow \varphi$.

Правила вывода: *modus ponens* и правило Гёделя для T.

Заметим, что добавление аксиомы

5. $T\varphi \leftrightarrow \varphi$

[4] О функциональных свойствах логики **Tr** см. в [3]. По крайней мере, очевидно, что она не является функционально полной.

превращает логику **Tr** в консервативное расширение $\mathbf{C}_2$ посредством добавления к $\mathbf{C}_2$ оператора идентичности T.

Стоит отметить, что в силу функциональной эквивалентности логик **V2** и **Tr**, последняя также обладает интерполяционным свойством Крейга.

5. Модальная логика Tr

По техническим причинам нам будет удобно использовать следующий вариант аксиоматизации **Tr**, эквивалентный исходному. Определим логику **Tr** как множество формул (для удобства не различаем исчисления и множества выводимых в них формул), выводимых из следующих схем аксиом, где $\Box$ есть T:

1. Всевозможные подстановки модальных формул в классические тавтологии,
2. $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$,
3. $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$,
4. $\Diamond\varphi \to \Box\varphi$,
5. $\varphi \to \Box\Box\varphi$,
6. $\Box\Box\varphi \to \varphi$

по правилам вывода

- *modus ponens*: если есть формулы φ и $\varphi \to \psi$, то есть и формула ψ,
- правило Гёделя: если есть формула φ, то есть и формула $\Box\varphi$.

Здесь мы полагаем, что $\Diamond$ есть сокращение для $\neg\Box\neg$. Принципиально ничего не изменится, если считать связку $\Diamond$ исходной и ввести еще одну схему аксиом — $\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$.

Замечание 1. Логика **Tr** является нормальной модальной логикой (это по определению означает, что в вышеприведенном определении обязательно наличие схем аксиом 1 и 2 и обоих правил вывода, если и не постулируемых, то допустимых). Для **Tr** (как для любой нормальной модальной логики!) справедливы следующие полезные в дальнейшем факты:

- логике **Tr** принадлежат все формулы вида ($n \geq 1$):
  - $\Box\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\varphi_n \leftrightarrow \Box(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n)$,
  - $\Diamond\varphi_1 \vee \cdots \vee \Diamond\varphi_n \leftrightarrow \Diamond(\varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n)$;
- теорема о замене эквивалентных (в двух вариантах):
  - если $\mathbf{Tr} \vdash \psi \leftrightarrow \chi$, то $\mathbf{Tr} \vdash \varphi(\psi) \leftrightarrow \varphi(\chi)$, где $\varphi(\psi)$ — формула с некоторым отмеченным вхождением ψ, $\varphi(\chi)$ — результат замены ψ в φ на χ,
  - если $\mathbf{Tr} \vdash \psi \leftrightarrow \chi$, то если $\mathbf{Tr} \vdash \varphi(\psi)$, то $\mathbf{Tr} \vdash \varphi(\chi)$, где $\varphi(\psi)$ — формула с некоторым отмеченным вхождением ψ, $\varphi(\chi)$ — результат замены ψ в φ на χ.

Еще одно

Замечание 2. Легко показать, что из приведенной аксиоматики можно исключить одну из схем аксиом (любую) 5 или 6. Например, ввиду наличия аксиом 3 и 4 выводимости в **Tr** эквивалентности $\Box\varphi \leftrightarrow \Diamond\varphi$ (она разбита на конъюнктивные члены лишь для удобства дальнейших доказательств), легко видеть, что ввиду теоремы о замене эквивалентных, которая справедлива для всех нормальных модальных логик, мы в любой формуле можем заменять подформулу вида $\Box\varphi$ на $\Diamond\varphi$, и наоборот. Возьмем для примера схему аксиом 5, то есть $\varphi \to \Box\Box\varphi$. Поскольку здесь φ — произвольная формула, мы можем заменить ее на $\neg\varphi$, что дает нам $\neg\varphi \to \Box\Box\neg\varphi$, откуда по контрапозиции (аксиоме 1) получаем $\neg\Box\Box\neg\varphi \to \neg\neg\varphi$, что применением классической тавтологии «снятия-навешивания двойного отрицания» и теоремы о замене эквивалентных позволяет получить $\neg\Box\neg\neg\Box\neg\varphi \to \varphi$, а значит, по определению $\Diamond$, формулу (точнее, схему аксиом) 6.

6. Логика $\mathbf{Tr}^-$

Определяем логику $\mathbf{Tr}^-$ как множество модальных формул, выводимых из следующих схем аксиом:

1. Всевозможные подстановки модальных формул в классические тавтологии,
2. $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$,
3. $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$,

4. $\Diamond\varphi \to \Box\varphi$,
5. $\varphi \to \Box\Box\varphi$,
6. $\Box\Box\varphi \to \varphi$,
7. Всевозможные формулы вида $\Box\varphi$, где φ — подстановка в классическую тавтологию,
8. $\Box(\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi))$,
9. $\Box(\Box\varphi \to \Diamond\varphi)$,
10. $\Box(\Diamond\varphi \to \Box\varphi)$,
11. $\Box(\varphi \to \Box\Box\varphi)$,
12. $\Box(\Box\Box\varphi \to \varphi)$

- *modus ponens*: если имеются φ и $\varphi \to \psi$, есть и формула ψ.

Коротко говоря, логика $\mathbf{Tr}^-$ по своей аксиоматике отличается от $\mathbf{Tr}$ тем, что удалено правило Гёделя, но добавлены схемы аксиом, а именно — каждая из схем аксиом χ логики $\mathbf{Tr}$ продублирована схемой $\Box\chi$.

7. Совпадение логик Tr и Tr$^-$

Теорема 1. *Логики* $\mathbf{Tr}$ *и* $\mathbf{Tr}^-$ *совпадают как множества выводимых формул.*

Доказательство. Включение $\mathbf{Tr}^- \subseteq \mathbf{Tr}$ совершенно очевидно, поскольку все аксиомы $\mathbf{Tr}^-$ тривиально выводимы в $\mathbf{Tr}$, а замкнутость относительно правила modus ponens уже постулирована, так что требуется доказать лишь включение $\mathbf{Tr} \subseteq \mathbf{Tr}^-$, то есть надо доказать, что если $\varphi \in \mathbf{Tr}$, то $\varphi \in \mathbf{Tr}^-$.

Также совершенно очевидно, что если замкнуть $\mathbf{Tr}^-$ по правилу Гёделя, то получится $\mathbf{Tr}$. Значит, надо доказать, что $\mathbf{Tr}^-$ уже и так замкнута относительно правила Гёделя, то есть если формула φ принадлежит логике $\mathbf{Tr}^-$, то и $\Box\varphi$ принадлежит логике $\mathbf{Tr}^-$.

Принадлежность φ логике $\mathbf{Tr}^-$ означает, что есть список (конечная последовательность) формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, каждая из которых есть либо аксиома $\mathbf{Tr}^-$, либо получается из предыдущих по правилу вывода modus ponens, причем $\varphi_n = \varphi$. Покажем, что в этом случае $\Box\varphi \in \mathbf{Tr}^-$, продемонстрировав как исходный вывод в $\mathbf{Tr}^-$ перестроить в вывод формулы $\Box\varphi$ в $\mathbf{Tr}^-$ возвратной индукцией по длине вывода n. По сути мы должны «промоделировать» правило Гёделя, то есть показать, что если φ выводима, то и $\Box\varphi$ выводима.

Итак (в соответствии с определением выводимости), пусть φ является аксиомой логики $\mathbf{Tr}^-$. Тогда она имеет вид аксиомы $\mathbf{Tr}$ или $\Box\chi$, где χ — аксиома $\mathbf{Tr}$. В первом случае автоматически получается, что формула $\Box\chi$ выводима в $\mathbf{Tr}^-$ по определению аксиоматики, а во втором — из того, что χ является аксиомой $\mathbf{Tr}$, и по аксиоме $\chi \to \Box\Box\chi$ и правилу modus ponens получаем, что выводима и $\Box\Box\chi$, то есть и в этом случае удалось «навесить» дополнительный $\Box$.

Теперь рассмотрим случай, когда φ_n получается из φ_k и φ_l при $k < n$ и $l < n$ по правилу modus ponens. Для определенности положим, что $\varphi_l = \varphi_k \to \varphi_n$. По индукционному предположению имеем, что формулы $\Box(\varphi_k \to \varphi_n)$ и $\Box\varphi_k$ выводимы в $\mathbf{Tr}^-$. Остается воспользоваться аксиомой $\Box(\varphi_k \to \varphi_n) \to (\Box\varphi_k \to \Box\varphi_n)$ и дважды применить правило modus ponens, чтобы получить, что $\Box\varphi_n$ выводима $\mathbf{Tr}^-$.

Доказательство закончено. $\Box$

8. Шкалы Крипке логики Tr

Здесь мы интересуемся устройством шкал логики $\mathbf{Tr}$, которое является довольно простым, как показывает

Теорема 2. *Шкала Крипке $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ является шкалой логики* $\mathbf{Tr}$ *в точности тогда, когда в $\mathcal{F}$ выполняются условия*

1. $\forall w \in W\ \exists v \in W\ wRv$

   «из каждой точки (мира) что-нибудь достижимо»,

2. $\forall w \in W\ \forall v_1 \in W\ \forall v_2 \in W\ (wRv_1\ \&\ wRv_2 \Rightarrow v_1 = v_2)$

   «из каждой точки достижимо не более одной точки»,

3. $\forall w_1 \in W\ \forall w_2 \in W\ \forall w_3 \in W\ (w_1Rw_2\ \&\ w_2Rw_3 \Rightarrow w_3 = w_1)$

   «из каждой точки за два шага мы вновь попадаем в ту же точку».

Доказательство. Предположим, что $\mathcal{F} \models \mathbf{Tr}$ или, что по сути то же самое, в шкале $\mathcal{F}$ истинны все аксиомы $\mathbf{Tr}$. Покажем, что $\mathcal{F}$ удовлетворяет всем условиям из формулировки теоремы.

Справедливость первого условия следует из истинности в $\mathcal{F}$ формулы $\Box p \to \Diamond p$ (она получена по схеме аксиом 3). В самом деле, $\Box p \to \Diamond p$

легко преобразуется в $\Diamond(\neg p \vee p)$, а любая формула вида $\Diamond\alpha$ может быть истинной в точке шкалы только в том случае, если из этой точки что-нибудь достижимо. Приведем соответствующие преобразования в виде последовательности эквивалентных формул:

$\Box p \to \Diamond p$,
$\neg\Box p \vee \Diamond p$,
$\neg\neg\neg\Box\neg\neg p \vee \Diamond p$,
$\neg\neg\Diamond\neg p \vee \Diamond p$,
$\Diamond\neg p \vee \Diamond p$,
$\Diamond(\neg p \vee p)$.

Отметим, что последний переход здесь осуществлен с помощью доказуемой во всех нормальных модальных логиках схемы $(\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi) \leftrightarrow \Diamond(\varphi \vee \psi)$.

Покажем, что второе условие справедливо, рассуждением «от противного».

Итак, предположим, что для некоторых w, v_1, v_2 выполняется wRv_1, wRv_2, причем $v_1 \neq v_2$. Введем оценку V на шкале $\mathcal{F}$ так: $V(p) = \{v_1\}$, то есть v_1 — единственная точка, в которой истинна p, а в остальном оценка V произвольна. Полученную модель обозначим $\mathcal{M}$.

По выбору оценки имеем $\mathcal{M}, v_1 \models p$ и $\mathcal{M}, v_2 \not\models p$, откуда по условиям wRv_1, wRv_2 получаем $\mathcal{M}, w \models \Diamond p$ и $\mathcal{M}, w \not\models \Box p$, что дает $\mathcal{M}, w \not\models \Diamond p \to \Box p$, а это противоречит истинности в $\mathcal{F}$ аксиом, получаемых по схеме 4.

Наконец, последнее — третье — условие. Опять рассуждаем «от противного».

Предположим, что для некоторых w_1, w_2, w_3 из $\mathcal{F}$ верно, что w_1Rw_2 и w_2Rw_3, но $w_1 \neq w_3$. Определим оценку V так: $V(p) = \{w_3\}$, то есть w_3 — единственная точка, в которой истинна переменная p, а в остальном V произвольна. Полученную модель обозначим $\mathcal{M}$.

По выбору оценки и ввиду того, что w_1Rw_2 и w_2Rw_3, имеем последовательно: $\mathcal{M}, w_3 \models p$, $\mathcal{M}, w_2 \models \Diamond p$, $\mathcal{M}, w_1 \models \Diamond\Diamond p$. Однако $\mathcal{M}, w_1 \not\models p$, что в итоге дает $\mathcal{M}, w_1 \not\models \Diamond\Diamond p \to p$, а это противоречит нашему предположению об истинности всех аксиом **Tr**, в частности — полученных по схеме 5, которая, как уже отмечалось, эквивалентна (в присутствии других схем, конечно) схеме 6.

Теперь покажем, что если для шкалы $\mathcal{F}$ выполнены все условия из формулировки теоремы, то в $\mathcal{F}$ истинны все формулы, принадлежащие **Tr**. Ясно, что для этого достаточно проверить истинность аксиом, поскольку правила вывода истинность формул сохраняют. Далее, нет нужды проверять истинность формул (аксиом), получаемых по схемам 1 и 2, поскольку они истинны во всех шкалах. То есть нам нужно проверить истинность аксиом, полученных по схемам 3, 4, 6 (схему 5, как замечено, рассматривать не обязательно, поскольку в контексте остальных схем она эквивалентна схеме 6). Вновь рассуждаем «от противного».

Предположим, что некоторая формула вида $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$ (схема 3) опровергнута в шкале $\mathcal{F}$ при некоторой оценке V (то есть в модели $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$) в некоторой точке w, символически — $\mathcal{M}, w \not\models \Box\varphi \to \Diamond\varphi$. Последнее означает, что $\mathcal{M}, w \models \Box\varphi$ и $\mathcal{M}, w \not\models \Diamond\varphi$. Может ли какая-нибудь точка v шкалы $\mathcal{F}$ быть достижима из w? Нет, поскольку тогда из wRv следовало бы одновременно $\mathcal{M}, v \models \varphi$ и $\mathcal{M}, v \not\models \varphi$. Однако это противоречит условию «*из каждой точки что-нибудь достижимо*». Значит, наше предположение неверно, то есть все формулы вида $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$ в шкале $\mathcal{F}$ истинны.

Перейдем к рассмотрению схемы 4 («по традиции» рассуждаем «от противного»).

Предположим, что некоторая формула вида $\Diamond\varphi \to \Box\varphi$ опровергнута в шкале $\mathcal{F}$ при некоторой оценке V (то есть в модели $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$) в некоторой точке w, символически — $\mathcal{M}, w \not\models \Diamond\varphi \to \Box\varphi$. Это означает, что $\mathcal{M}, w \models \Diamond\varphi$ и $\mathcal{M}, w \not\models \Box\varphi$. Таким образом, существуют точки v_1 и v_2, такие что wRv_1, wRv_2 и $v_1 \models \varphi$, $v_1 \not\models \varphi$, а потому $v_1 \neq v_2$. Тем самым получается, что условие «*из каждой точки достижимо не более одной точки*» нарушено, а это противоречие показывает, что на самом деле ни одна из формул вида $\Diamond\varphi \to \Box\varphi$ опровергнута в шкале $\mathcal{F}$ быть не может.

Наконец, последняя схема — схема 6 (и вновь рассуждение «от противного»).

Предположим, что некоторая формула $\Box\Box\varphi \to \varphi$ опровергается в шкале $\mathcal{F}$ при некоторой оценке V (то есть модели $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$) в некоторой точке w_1, символически — $\mathcal{M}, w_1 \not\models \Box\Box\varphi \to \varphi$, в частности, $\mathcal{M}, w_1 \not\models \varphi$. Возьмем произвольные точки w_2 и w_3, такие что w_1Rw_2 и w_2Rw_3 (такие точки существуют ввиду условия «*из каждой точки что-нибудь достижимо*»). Поскольку $\mathcal{M}, w_1 \models \Box\Box\varphi$, мы имеем $\mathcal{M}, w_3 \models \varphi$. Значит, $w_1 \neq w_3$, что противоречит условию «*из каждой точки за два шага мы вновь попадаем в эту же точку*». Таким образом, мы вновь получили противоречие, откуда можно сделать вывод, что все формулы вида $\Box\Box\varphi \to \varphi$ в $\mathcal{F}$ истинны.

Доказательство теоремы закончено. $\Box$

Легко понять, что утверждение этой теоремы может быть упрощено. А именно, если интересоваться только шкалами с корнем, то есть шкалами, у которых есть точка r, обладающая тем свойством, что всякая точка достижима из r за какое-то число (конечное, разумеется, в частности, может быть за ноль) шагов по отношению достижимости.

Так вот, следствием из доказанной теоремы является

Теорема 3. *Шкалами с корнем логики* **Tr** *являются с точностью до изоморфизма две шкалы:* $\mathcal{F}_1 = \langle\{a\}, \{\langle a, a\rangle\}\rangle$ *(шкала из одной рефлексивной точки) и* $\mathcal{F}_2 = \langle\{b, c\}, \{\langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle\}\rangle$ *(шкала из двух взаимодостижимых иррефлексивных точек).*

Доказательство. Итак, r — корень шкалы $\mathcal{F}$ логики **Tr**. Возможны два случая: точка r рефлексивна; точка r иррефлексивна.

В первом случае из r не может быть достижима ни одна другая точка, поскольку в противном случае нарушилось бы свойство «*из каждой точки достижимо не более одной точки*». Эта шкала, очевидно, изоморфна шкале $\mathcal{F}_1$.

Во втором случае из точки r должна быть достижима (другая!) точка s (условие «*из каждой точки что-нибудь достижимо*»), причем ровно одна (условие «*из каждой точки достижимо не более одной точки*»). Из точки s тоже должна быть достижима и ровно одна точка, а она по условию «*из каждой точки за два шага мы вновь попадаем в ту же точку*» должна совпасть с r. Ясно, что мы получили шкалу, изоморфную $\mathcal{F}_2$: в качестве изоморфизма можно взять, например, функцию $f(r) = b$, $f(s) = c$.

Доказательство теоремы закончено. □

9. Полнота по Крипке логики Tr. Применение теоремы Салквиста

Известная теорема Салквиста [14, p. 110–143] дает достаточное условие полноты по Крипке нормальных модальных логик, более того, их каноничности и первопорядковости соответствующего класса шкал Крипке. Это условие состоит в том, что для аксиоматизации используется дополнительная к минимальной нормальной логике **K** аксиома, являющаяся конъюнкцией формул вида $\Box^k(\psi \to \chi)$, где $k \geq 0$, χ — позитивная формула, а ψ построена из пропозициональных переменных и отрицаний пропозициональных переменных, констант $\bot$ и $\top$ с помощью связок $\wedge$, $\vee$, $\Box$ и $\Diamond$ таким образом, что никакая из подформул формулы ψ вида $\psi_1 \vee \psi_2$ или $\Diamond\psi_1$, содержащих переменную без отрицания, не находится в области действия связки $\Box$. Некоторую несколько более сильную формулировку теоремы Салквиста с доказательством можно найти в [7, p. 347–354].

Ясно, что аксиомы 3–6 (точнее, их конъюнкция) удовлетворяют условию теоремы Салквиста, что сразу дает полноту по Крипке этой логики, то есть справедлива

Теорема 4. *Логика* **Tr** *полна по Крипке, то есть всякая формула* φ *выводима в* **Tr** *тогда и только тогда, когда* φ *истинна во всякой шкале логики* **Tr**.

Поскольку всякая полная по Крипке нормальная модальная логика полна относительно своих шкал с корнем, мы получаем, что утверждение этой теоремы можно усилить: *логика* **Tr** *полна относительно класса шкал* $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\}$*, где шкалы* $\mathcal{F}_1$ *и* $\mathcal{F}_2$ *определены в конце предыдущего раздела.* Иными словами, справедливо равенство $\mathbf{Tr} = \mathsf{Log}\mathcal{F}_1 \cap \mathsf{Log}\mathcal{F}_2$, где $\mathsf{Log}\mathcal{F}_1$ и $\mathsf{Log}\mathcal{F}_2$ — обозначения множеств формул, истинных в шкалах $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ соответственно. Однако и это утверждение имеет усиление. Перед его формулировкой докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Справедливо включение* $\mathsf{Log}\mathcal{F}_2 \subset \mathsf{Log}\mathcal{F}_1$*, причем включение является строгим.*

Доказательство. Покажем, что справедливо $\mathsf{Log}\mathcal{F}_2 \subseteq \mathsf{Log}\mathcal{F}_1$ (то есть нестрогое включение) рассуждением «от противного» (более точно, по контрапозиции). Другими словами, предположив, что $\varphi \notin \mathsf{Log}\mathcal{F}_1$, покажем, что $\varphi \notin \mathsf{Log}\mathcal{F}_2$.

Итак, пусть $\varphi \notin \mathsf{Log}\mathcal{F}_1$. Это означает, что при некоторой оценке V_1 на $\mathcal{F}_1$ для модели $\mathcal{M}_1 = \langle \mathcal{F}_1, V_1 \rangle$ выполняется

$$\mathcal{M}_1, a \not\models \varphi.$$

Введем оценку V_2 на шкале $\mathcal{F}_2$ таким образом: полагаем для всякой переменной p, что

- если $V_1(p) = \emptyset$, то $V_2(p) = \emptyset$;
- если $V_1(p) = \{a\}$, то $V_2(p) = \{b, c\}$.

Индукцией по построению произвольной формулы ψ (в частности, это может быть и φ) рутинно доказывается, что

$$\mathcal{M}_1, a \models \psi \iff \mathcal{M}_2, b \models \psi \iff \mathcal{M}_2, c \models \psi.$$

Отсюда следует, что поскольку $\mathcal{M}_1, a \not\models \varphi$, то

$$\mathcal{M}_2, b \not\models \varphi, \text{ и } \mathcal{M}_2, c \not\models \varphi.$$

Теперь покажем, что включение строгое. Для этого достаточно заметить, что $\mathcal{F}_1 \models \Box p \to p$, но $\mathcal{F}_2 \not\models \Box p \to p$.

Лемма доказана. $\Box$

Теорема 5. *Логики* $\mathbf{Tr}$ *и* $\mathtt{Log}\mathcal{F}_2$ *совпадают, то есть логика* $\mathbf{Tr}$ *полна относительно одноэлементного класса шкал* $\{\mathcal{F}_2\}$.

Доказательство. Как замечено выше, $\mathbf{Tr} = \mathtt{Log}\mathcal{F}_1 \cap \mathtt{Log}\mathcal{F}_2$, а по лемме мы имеем $\mathtt{Log}\mathcal{F}_1 \cap \mathtt{Log}\mathcal{F}_2 = \mathtt{Log}\mathcal{F}_2$, что и дает требуемое.

Теорема доказана. $\Box$

10. Алгебраическая полнота логики Tr

Итак, выше установлено, что логика $\mathbf{Tr}$ совпадает со множеством формул, истинных в шкале $\mathcal{F}_2 \langle \{b, c\}, \{\langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle\}\rangle$. Стандартным способом преобразуем эту шкалу в алгебраическую модель (модальную алгебру) $\mathcal{A}_2$, которая семантически эквивалентна шкале $\mathcal{F}_2$.

В качестве носителя (то есть множества элементов) алгебры $\mathcal{A}_2$ множества возможных значений переменных, а значит и формул, в $\mathcal{F}_2$ (обозначения довольно произвольны): $\mathtt{1} = \{b, c\}$, $\mathtt{b} = \{b\}$, $\mathtt{c} = \{c\}$, $\mathtt{0} = \emptyset$. Обозначим алгебры посредством A_2, то есть $A_2 = \{\mathtt{1}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{0}\}$.

Булевы операции на A_2 вводим обычным теоретико-множественным образом, обозначая их как соответствующие классические связки.Так, отрицание есть теоретико-множественное дополнение:

$$\neg\mathtt{1} = \mathtt{0}, \quad \neg\mathtt{b} = \mathtt{c}, \quad \neg\mathtt{c} = \mathtt{b}, \quad \neg\mathtt{0} = \mathtt{1}.$$

Сходным образом «определяются» пересечение («конъюнкция») и объединение («дизъюнкция»):

$$\mathtt{1} \wedge x = x \wedge \mathtt{1} = x, \quad \mathtt{b} \wedge \mathtt{c} = \mathtt{c} \wedge \mathtt{b} = \mathtt{0}, \quad \mathtt{0} \wedge x = x \wedge \mathtt{0} = \mathtt{0},$$

и

$$\mathtt{1} \vee x = x \vee \mathtt{1} = \mathtt{1}, \quad \mathtt{b} \vee \mathtt{c} = \mathtt{c} \vee \mathtt{b} = \mathtt{1}, \quad \mathtt{0} \vee x = x \vee \mathtt{0} = x,$$

где x произвольно. Константам $\bot$ и $\top$ сопоставляем $\mathtt{0}$ и $\mathtt{1}$ соответственно. Остальным булевым связкам сопоставляем те операции, которые получаются по обычным определениям через суперпозию. Например, с учетом того, что импликация $\to$ определяется через дизъюнкцию и отрицание — $x \to y = \neg x \vee y$, получаем соответствующую операцию:

$$\mathtt{1} \to x = x, \quad \mathtt{b} \to \mathtt{c} = \mathtt{c}, \quad \mathtt{b} \to \mathtt{0} = \mathtt{c},$$

$$\mathtt{b} \to \mathtt{b} = \mathtt{b}, \quad \mathtt{b} \to \mathtt{0} = \mathtt{b}, \quad \mathtt{0} \to x = \mathtt{1}, \quad x \to \mathtt{1} = \mathtt{1},$$

где x произвольно.

Осталось определить операцию, соответствующую связке $\Box$ (считаем связку $\Diamond$ производной). Воспользуемся тем же интуитивным соображением, которое мы использовали для булевых связок. Если x — некоторое множество истинности формул, то разумно полагать, что $\Box x$ — множество миров $\mathcal{F}_2$, из которых достижимы в точности миры из x. Так получаем:

$$\Box\mathtt{1} = \mathtt{1}, \quad \Box\mathtt{0} = \mathtt{0}, \quad \Box\mathtt{b} = \mathtt{c}, \quad \Box\mathtt{c} = \mathtt{b}.$$

Алгебра $\mathcal{A}_2$ определена. Полагаем, что множество выделенных элементов в ней состоит только из $\mathtt{1}$ («формула истинна в шкале, если она истинна во всех мирах этой шкалы»). Так получается четырехэлементная логическая матрица, которую обозначим Ω_2.

Истинность формулы в матрице Ω_2 определяем, как обычно.

Оценкой в матрице Ω_2 считаем функцию v, которая каждой пропозициональной p сопоставляет некоторый элемент A_2. Оценка переменных распространяется на все формулы тривиальным индуктивным образом в соответствии с приведенными выше определениями операций. Например, $v(\alpha \wedge \beta) = v(\alpha) \wedge v(\beta)$ (должно быть ясно, что в последнем равенстве символ $\wedge$ имеет разный смысл — слева это пропозициональная связка конъюнкция, а справа — соответствующая операция в алгебре $\mathcal{A}_2$, то есть пересечение).

Тривиальной индукцией по построению формул доказываются следующие две леммы.

Лемма 2. *Пусть V — оценка пропозициональных переменных на шкале $\mathcal{F}_2$. Определим оценку v на матрице Ω_2 так:*

$$v(p) = \{x \in \{b, c\} \mid x \in V(p)\}.$$

Тогда для всякой формулы φ справедливо, что

$$v(\varphi) = \{x \in \{b, c\} \mid x \in V(\varphi)\}.$$

Лемма 3. *Пусть v — оценка пропозициональных переменных на матрице Ω_2. Определим оценку V на шкале $\mathcal{F}_2$ так:*

$$V(p) = v(p).$$

Тогда для всякой формулы φ справедливо, что

$$V(\varphi) = v(\varphi).$$

Из этих лемм следует, что шкала $\mathcal{F}_2$ и матрица Ω_2 семантически эквивалентны, то есть они опровергают, а тем самым и принимают, одни и те же формулы. Тем самым, поскольку **Tr** полна относительно шкалы $\mathcal{F}_2$, доказана

Теорема 6. *Логика* **Tr** *полна относительно матрицы* Ω_2*, то есть формула принадлежит логике* **Tr** *тогда и только тогда, когда она (формула) истинна в матрице* Ω_2*.*

11. Замечание о расширениях Tr

Итак, мы получили в свое распоряжение логику **Tr**, о которой может быть много вопросов, но мы коснемся только одного: какие расширения имеет **Tr**? Ввиду известного факта (всякая табличная логика имеет только табличные расширения) мы получаем, с учетом предыдущего, что всякое расширение **Tr** определяется либо шкалой $\mathcal{F}_2$, то есть является самой **Tr**, либо шкалой $\mathcal{F}_1$, либо пустым множеством шкал, то есть является противоречивой логикой. Других вариантов нет!

Литература

[1] *Ермолаева Н.М., Мучник А.А.* Модальные расширения логических исчислений типа Хао Вана // Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам. М.: Наука, 1974. С. 172–193.

[2] *Ермолаева Н.М., Мучник А.А.* Модальные логики, определяемые эндоморфизмами дистрибутивных решеток // Исследования по теории множеств и неклассическим логикам. М.: Наука, 1976. С. 229–246.

[3] *Карпенко А.С.* Решетки четырехзначных модальных логик // Логические исследования. 2015. № 21(1). С. 122–137.

[4] *Клини С.К.* Введение в метаматематику. М.: Иностранная литература, 1957. 527 с.

[5] *Леммон Е.* Алгебраическая семантика для модальных логик I // Семантика модальных и интенсиональных логик / Ред. В.А. Смирнов. М.: Прогресс, 1981. С. 98–124.

[6] *Максимова Л. Л.* Интерполяционные теоремы в модальных логиках и амальгамируемые многообразия топобулевых алгебр // Алгебра и логика. 1979. Т. 18(5). С. 556–586.

[7] *Chagrov A., Zakharyaschev M.* Modal Logic. Oxford: Clarendon Press, 1997. 624 p.

[8] *Fitting M.* Bilattices and the theory of truth // Journal of Philosophical Logic. 1989. Vol. 18. P. 225–256.

[9] *Font J.M.* Belnap's four-valued logic and De Morgan lattices // Logic Journal of the IGPL. 1997. Vol. 5(3). P. 413–440.

[10] *Ginsberg M.L.* Multivalued logics: A uniform approach to inference in artificial intelligence // Computational Intelligence. 1988. Vol. 4(3). P. 265–315.

[11] *Kripke S.* Outline of a theory of truth // Journal of Philosophy. 1975. Vol. 72. P. 690–716.

[12] *Lewis C.I., Langford C.H.* Symbolic Logic. N.Y.: Dover Publications, 1959 (2nd ed. with corrections). 506 p.

[13] *Pynko A.P.* Functional completeness and axiomatizability within Belnap's four-valued logic and its expansion // Journal of Applied Non-Classical Logics. 1999. Vol. 9(1). P. 61–105.

[14] *Sahlqvist H.* Completeness and correspondence in the first and second order semantics for modal logic / Ed. S. Kanger. Proceedings of the Third Scandinavian Logic symposium. Amsterdam: North-Holland, 1975. P. 110–143.

[15] *Scroggs S.J.* Extensions of the Lewis system S5 // The Journal of Symbolic Logic. 1951. Vol. 16. P. 112–120.

[16] *Sobochiński B.* Modal system S4.4 // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1964. Vol. 5(4). P. 305–312.

[17] *Sobochiński B.* Certain extensions of modal system S4 // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1970. Vol. 11(3). P. 347–367.

A.S. Karpenko, $\boxed{\text{A.V. Chagrov}}$

Modal Propositional Truth Logic Tr and its Completeness

Karpenko Alexander Stepanovich
Department of Logic, Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences.
12/1 Goncharnaya St., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: as.karpenko@gmail.com

Chagrov Alexander Vasilievich
Department of algebra and mathematical logic
Tver State University.
33 Zhelabova St., Tver, 170100, Russian Federation.
E-mail: chagrovy@mail.ru

In this paper Sobochiński's four-valued modal logic **V2** (extension of **S5**) is considered. The emergence of that logic, some its interesting properties and different equivalent formulations are presented. Its algebraic models are of particular interest: as the extension of De Morgan algebra by boolean negation $\neg$ and as the extension of Boolean algebra by the endomorphism g, which is interpreted then as the propositional truth operation T. The logic corresponding to the last case is denoted by **Tr**. The attention is paid to the application of **Tr** in Fitting's theory of truth. The axiomatization of **Tr** in language $(\rightarrow, \neg, T)$ is considered. The completeness of logic **Tr** is proved with use of Sahlqvist's powerful theorem, which gives the sufficient condition of Kripke completeness for normal modal logics. Algebraic completeness of logic **Tr** is also proved.

Keywords: modal logic **V2**, De Morgan algebra, boolean algebra, endomorphismus, logic **Tr**, Fitting's theory of truth, Kripke completeness, Sahlqvist's theorem, algebraic completeness

References

[1] Ermolaeva, N. M., Muchnik, A. A. "Modal'nye rasshireniya logicheskikh ischislenii tipa Khao Vana" [Modal expansion of logical calculi such as Wang Hao], *Issledovaniya po formalizovannym yazykam i neklassicheskim logikam* [Studies on the formal language and non-classical logics]. M.: Science, 1974, pp. 172–193. (In Russian)

[2] Ermolaeva, N. M., Muchnik, A. A. "Modal'nye logiki, opredelyaemye endomorfizmami distributivnykh reshetok" [Modal logic determined by the endomorphisms of distributive lattices], *Issledovaniya po teorii mnozhestv i neklassicheskim logikam* [Investigations on the theory of sets and non-classical logics]. M.: Science, 1976, pp. 229–246. (In Russian)

[3] Karpenko, A. S. "Reshetki chetyrekhznachnykh modal'nykh logik" [Lattices of Four-valued Modal Logics], *Logicheskie issledovaniya* [Logical investigations]. 2015, no 21(1), pp. 122–137. (In Russian)

[4] Klini, S. K. *Vvedenie v matematiku* [Introduction to mathematics]. M.: Foreign Literature, 1957. 527 pp. (In Russian)

[5] Lemmon, E. "Algebraicheskaya semantika dlya modal'nykh logik I" [Algebraic semantics for modal logics I], *Semantika modal'nykh i intensional'nykh logik* [The semantics of modal and intensional logic], ed. V. A. Smirnov. M.: Progress, 1981, pp. 98–124. (In Russian)

[6] Maksimova, L. L. "Interpolyatsionnye teoremy v modal'nykh logikakh i amal'gamiruemye mnogoobraziya topobulevykh algebr" [Interpolation theorems in modal logics and topo-Boolean algebra amalgamatable varieties], *Algebra i logika* [Algebra and logic]. 1979, vol. 18(5), pp. 556–586. (In Russian)

[7] Chagrov, A., Zakharyaschev, M. *Modal Logic*. Oxford: Clarendon Press, 1997. 624 pp.

[8] Fitting, M. "Bilattices and the theory of truth", *Journal of Philosophical Logic*. 1989, vol. 18, pp. 225–256.

[9] Font, J.M. "Belnap's four-valued logic and De Morgan lattices", *Logic Journal of the IGPL*. 1997, vol. 5(3), pp. 413–440.

[10] Ginsberg, M.L. "Multivalued logics: A uniform approach to inference in artificial intelligence", *Computational Intelligence*. 1988, vol. 4(3), pp. 265–315.

[11] Kripke, S. "Outline of a theory of truth", *Journal of Philosophy*. 1975, vol. 72, pp. 690–716.

[12] Lewis, C.I., Langford, C.H. *Symbolic Logic*. N.Y.: Dover Publications, 1959 (2nd ed. with corrections). 506 pp.

[13] Pynko, A.P. "Functional completeness and axiomatizability within Belnap's four-valued logic and its expansion", *Journal of Applied Non-Classical Logics*. 1999, Vol. 9(1), pp. 61–105.

[14] Sahlqvist, H. "Completeness and correspondence in the first and second order semantics for modal logic", Ed. S. Kanger. *Proceedings of the Third Scandinavian Logic symposium*. Amsterdam: North-Holland, 1975, pp. 110–143.

[15] Scroggs, S.J. "Extensions of the Lewis system S5", *The Journal of Symbolic Logic*. 1951, vol. 16, pp. 112–120.

[16] Sobochiński, B. "Modal system S4.4", *Notre Dame Journal of Formal Logic*. 1964, vol. 5(4), pp. 305–312.

[17] Sobochiński, B. "Certain extensions of modal system S4", *Notre Dame Journal of Formal Logic*. 1970, vol. 11(3), pp. 347–367.

Логические исследования
2016. Т. 22. № 1. С. 32–69
УДК 164.07+510.649

Logical Investigations
2016, vol. 22, no 1, pp. 32–69

В.М. Попов

Секвенциальная аксиоматизация и семантика I-логик васильевского типа[1]

Попов Владимир Михайлович
Кафедра логики, философский факультет, МГУ имени М. В. Ломоносова.
119991, Российская Федерация, Москва, ГСП-1,
Ломоносовский проспект, д. 27, корп. 4.
E-mail: pphiloslog@mail.ru

Изучаемые здесь I-логики васильевского типа были найдены в процессе экспликации некоторых идей российского логика и философа Николая Александровича Васильева, лежащих в основе его «воображаемой логики». Целью этой статьи является демонстрация того, как конструировать простые и удобные для поиска доказательства секвенциальные аксиоматизации I-логик васильевского типа и как строить интуитивно ясные двузначные семантики, адекватные I-логикам васильевского типа. В предлагаемой статье определяются I-логики васильевского типа, строятся их секвенциальные аксиоматизации, даются необходимые семантические определения и доказываются теорема об оправданности $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-выводов (теорема 5) и теорема о полноте $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-выводов (теорема 6). Работа завершается рядом следствий из указанных теорем и анонсом решения проблемы табличности I-логик васильевского типа.

Ключевые слова: I-логика васильевского типа, секвенциальная аксиоматизация I-логик васильевского типа, семантика I-логик васильевского типа.

В [12] определяется для произвольных x и y из $\{0, 1, 2, \dots \omega\}$ логика $I_{\langle x,y\rangle}$. Логики этого вида используются в [13] при иллюстрации действия обобщенной теоремы Гливенко. Различные естественные подклассы класса всех таких логик рассматриваются, например, в работах [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12]. В предлагаемой статье изучаются I-логики васильевского типа. I-логикой васильевского типа называем такую логику $I_{\langle x,y\rangle}$, что x и y принадлежат множеству $\{0, 1, 2, \dots \omega\}$ и при этом x или y не равно 0. Можно показать, что с помощью I-логик васильевского типа эксплицируются некоторые логические построения, проводимые в [1] и в ряде других работ Николая Александровича Васильева. Начало подобного рода экспликациям положено Аидой Арруда в [15]. Исследуя идеи, фундирующие «воображаемую логику» Н.А. Васильева, А. Арруда пришла в [15] к трехзначной пропозициональной

[1]Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 13-03-00088а.

логике (аксиоматизирована в [15] посредством исчисления V1), имитирующей на пропозициональном уровне ряд важных черт «воображаемой логики». Трехзначная логика, детерминированная исчислением V1, тесно связана с логикой $I_{\langle 1,0\rangle}$ (понятно, что $I_{\langle 1,0\rangle}$ является I-логикой васильевского типа) — можно доказать, что логика $I_{\langle 1,0\rangle}$ равна (с точностью до обозначений) множеству всех таких V1-доказуемых формул, ни одна из которых не имеет вхождений так называемых «классических пропозициональных переменных». Заметим, что множество всех пропозициональных переменных языка исчисления V1 разбито (см. [15]) на два множества. В [15] А. Арруда называет элементы одного из этих множеств классическими пропозициональными переменными, а элементы другого — васильевскими пропозициональными переменными.

В статье основное внимание уделено двум проблемам — проблеме секвенциальных аксиоматизаций I-логик васильевского типа и проблеме построения двузначных семантик, адекватных I-логикам васильевского типа.

Главные из полученных здесь результатов: (1) описан метод построения по всяким x и y из $\{0, 1, 2, \dots \omega\}$ свободной от сечения секвенциальной аксиоматизации логики $I_{\langle x,y\rangle}$, (2) описан метод построения по всяким x и y из $\{0, 1, 2, \dots \omega\}$ двузначной семантики, адекватной логике $I_{\langle x,y\rangle}$.

Язык L всех рассматриваемых здесь логик есть стандартно определяемый пропозициональный язык, алфавиту которого принадлежат в точности следующие символы: $p_1, p_2, p_3, \dots$ (пропозициональные переменные языка L) $\&, \vee, \supset$, (бинарные логические связки языка L), $\neg$ (унарная логическая связка языка L), левая и правая круглые скобки. Определение L-формулы индуктивно: (1) всякая пропозициональная переменная языка L есть L-формула, (2) если A и B являются L-формулами, то $(A \,\&\, B), (A \vee B), (A \supset B)$, и $(\neg A)$ являются L-формулами, (3) ничто другое не является L-формулой. Квазиэлементарной L-формулой называем L-формулу, в которую не входит ни одна бинарная логическая связка языка L. Длиной L-формулы называем число всех вхождений символов $\&, \vee, \supset, \neg$ в эту L-формулу. Ясно, что для всякой L-формулы существует единственная длина этой L-формулы, и что длина всякой L-формулы есть целое неотрицательное число. Условимся обозначать длину L-формулы A через $h(A)$. Логикой называем непустое множество L-формул, замкнутое относительно modus ponens в L и относительно правила подстановки L-формулы вместо пропозициональной переменной языка L. Теорией логики L называваем множество L-формул, включающее логику L и замкнутое относительно modus ponens в L. Понятно, что множество всех L-формул является логикой, а также теорией любой логики. Множество всех L-формул называем тривиальной теорией. Противоречивой теорией логики L называем такую теорию T логики L, что для некоторой L-формулы A верно: A $\in$ T и ($\neg$A) $\in$ T. Паранепротиворечивой теорией логики L называем такую противоречивую теорию T логики L, что T не есть тривиальная теория. Паранепротиворечивой логикой называем такую логику L, что существует паранепротиворечивая теория логики L. Полной теорией логики L называем такую теорию T логики L, что для всякой L-формулы A верно следующее: A $\in$ T или ($\neg$A) $\in$ T. Параполной теорией логики L называем такую теорию T логики L, что T не является полной теорией логики L и всякая полная теория логики L, включающая T, есть тривиальная теория. Параполной логикой называем такую логику L, что существует параполная теория логики L. Паралогикой называем такую логику, которая является паранепротиворечивой логикой или/и параполной логикой. Паранормальной логикой называем такую логику, которая является паранепротиворечивой логикой и параполной логикой.

Условимся, что на протяжении всей статьи α и β — произвольные фиксированные числа из $\{0, 1, 2, \ldots \omega\}$. Построим исчисление $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ гильбертовского типа. Язык исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ есть L. Аксиомами исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ являются все те и только те L-формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих двенадцати видов (здесь A, B и C — L-формулы):

(I) $((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)))$,

(II) $(A \supset (A \vee B))$,

(III) $(B \supset (A \vee B))$,

(IV) $((A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C)))$,

(V) $((A \& B) \supset A)$,

(VI) $((A \& B) \supset B)$,

(VII) $((C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset (A \& B))))$,

(VIII) $((A \supset (B \supset C)) \supset ((A \& B) \supset C))$,

(IX) $(((A \& B) \supset C) \supset (A \supset (B \supset C)))$,

(X) $(((A \supset B) \supset A) \supset A)$,

(XI,α) $((\neg D) \supset (D \supset A))$, где D есть L-формула, которая не является квазиэлементарной L-формулой длины $< \alpha$,

(XII,β) $((E \supset (\neg(A \supset A))) \supset (\neg E))$, где E есть L-формула, которая не является квазиэлементарной L–формулой длины $< \beta$.

Исчисление $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ имеет единственное правило — modus ponens в L.

Напомним, что правило modus ponens в L есть множество всех упорядоченных троек, каждая из которых имеет вид $\langle A, (A \supset B), B\rangle$, где A и B являются L-формулами. Правило modus ponens в L обозначаем через MP_L.

Определение 1. Называем $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-доказательством длины n (n есть целое положительное число) L-формулы A такую n-членную последовательность L-формул с первым членом $A_1, \ldots$, с n-ным членом A_n, что выполняются условия (I) и (II): (I) A_n есть A, (II) для всякого целого положительного числа i, которое меньше или равно n, верно, что A_i есть аксиома исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ или существуют такие целые положительные числа k и l, каждое из которых меньше i, что $\langle A_k, A_l, A_i\rangle \in \mathrm{MP}_L$.

Определение 2. Называем Д $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-доказательством L-формулы A, если существует такое целое положительное число n, что Д есть $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-доказательство длины n L-формулы A.

Определение 3. Называем $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-выводом длины n (n есть целое положительное число) из множества M L-формул L-формулы A такую n-членную последовательность L-формул с первым членом $A_1, \ldots$, с n-ным членом A_n, что выполняются условия (I) и (II): (I) A_n есть A, (II) для всякого целого положительного числа i, которое меньше или равно n, верно хотя бы одно из следующих трех условий: (1) $A_i \in M$, (2) A_i есть аксиома исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$, (3) существуют такие целые положительные числа k и l, каждое из которых меньше i, что $\langle A_k, A_l, A_i\rangle \in \mathrm{MP}_L$.

Определение 4. Называем Д $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-выводом из множества M L-формул L-формулы A, если существует такое целое положительное число n, что Д есть $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-вывод длины n из множества M L-формул L-формулы A.

Условимся о том, что для всякого множества K L-формул и всякой L-формулы F запись «K $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ F» есть сокращение для «существует $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-вывод из множества K L-формул L-формулы F», а запись «$\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ F» есть сокращение для «существует $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-доказательство L-формулы F».

Определение 5. Называем L-формулу A L-формулой, доказуемой в $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$, если $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$.

Условимся через $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ обозначать множество всех L-формул, доказуемых в $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$. Опираясь на соответствующие определения и введенные выше соглашения, а также на тот факт, что для всяких L–формул A, B и C L-формулы (A $\supset$ A), (A $\supset$ (B $\supset$ A)) и ((A $\supset$ (B $\supset$ C)) $\supset$ ((A $\supset$ B) $\supset$ (A $\supset$ C))) доказуемы в $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$, можно стандартно доказать следующую теорему дедукции для $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-выводов: для всякого множества M L-формул и для всяких L-формул A и B верно, что если M $\cup$ {A} $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ B, то M $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ (A $\supset$ B).

Доказаны нижеследующие утверждения (У1)–(У4).

(У1) $I_{\langle 0,0\rangle}$ есть классическая пропозициональная логика в языке L.

Здесь «классическая пропозициональная логика в языке L» означает множество всех классических тавтологий в языке L.

(У2) Для всяких x и y из $\{0, 1, 2, \dots \omega\}$ верно следующее: $x \neq 0$ тогда и только тогда, когда $I_{\langle x,y\rangle}$ есть паранепротиворечивая логика.

(У3) Для всяких x и y из $\{0, 1, 2, \dots \omega\}$ верно следующее: $y \neq 0$ тогда и только тогда, когда $I_{\langle x,y\rangle}$ есть параполная логика.

(У4) Для всяких x, y, z и u из $\{0, 1, 2, \dots \omega\}$ верно следующее: $I_{\langle x,y\rangle}$ включается в $I_{\langle z,u\rangle}$ тогда и только тогда, когда $x \geq z$ и $y \geq u$.

В свете утверждений (У2) и(У3), а также данных выше определений, ясно, что верны утверждения (У5) и (У6).

(У5) Для всяких x и y из $\{0, 1, 2, \dots \omega\}$ верно следующее: $x \neq 0$ или $y \neq 0$ тогда и только тогда, когда $I_{\langle x,y\rangle}$ есть паралогика.

(У6) Для всяких x и y из $\{0, 1, 2, \dots \omega\}$ верно следующее: $x \neq 0$ и $y \neq 0$ тогда и только тогда, когда $I_{\langle x,y\rangle}$ есть паранормальная логика.

Простым следствием утверждения (У4) является следующее утверждение (У7).

(У7) Для всяких x, y, z и u из $\{0, 1, 2, \dots \omega\}$ верно следующее: $I_{\langle x,y\rangle} = I_{\langle z,u\rangle}$ тогда и только тогда, когда $x = z$ и $y = u$.

Построим секвенциальное исчисление $GI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$, аксиоматизирующее логику $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$.

Алфавит **A** языка этого исчисления есть объединение алфавита языка L с двухэлементным множеством $\{\mathbf{,}\ \rightarrow\}$ символов. Непустой последовательностью L-формул называем слово в алфавите **A**, имеющее вид $A_1\mathbf{,}\ldots\mathbf{,}A_n$, где n — целое положительное число, а $A_1, \ldots, A_n$ есть L-формулы. Заметим, что если $n = 1$, то $A_1\mathbf{,}\ldots\mathbf{,}A_n$ есть A_1. Пустой последовательностью L-формул называем пустое слово. Пустую последовательность L–формул обозначаем через Λ. Называем π последовательностью L-формул, если π есть пустая последовательность L-формул или непустая последовательность L-формул. Предполагается, что для всяких последовательностей π и ρ L-формул верно следующее: $\Lambda\mathbf{,}\pi$ есть π, $\pi\mathbf{,}\Lambda$ есть π, а $\pi\mathbf{,}\Lambda\mathbf{,}\rho$ есть $\pi\mathbf{,}\rho$. Ясно, что для всякого целого положительного числа k и для всяких последовательностей $\pi_1, \ldots, \pi_k$ L-формул слово $\pi_1\mathbf{,}\ldots\mathbf{,}\pi_k$ есть последовательность L-формул. Далее используем буквы Γ, Δ, Σ и Θ только для обозначения последовательностей L-формул.

Секвенцией называем слово в алфавите **A**, имеющее вид $\Gamma \rightarrow \Delta$. Для всякого целого положительного числа n называем n-посылочным секвенциальным правилом любое подмножество $n+1$-вой декартовой степени множества всех секвенций. Называем R секвенциальным правилом, если для некоторого целого положительного числа n R есть n-посылочное секвенциальное правило. Называем Π применением секвенциального правила R, если $\Pi \in \mathrm{R}$.

Множество всех основных секвенций исчисления $GI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ есть множество всех секвенций, каждая из которых имеет вид $A \rightarrow A$, где A есть L-формула.

Множество всех правил исчисления $GI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ является множеством всех определяемых ниже секвенциальных правил (R1)–(R14), (15.α), (16.β) и (17). В этих определениях A и B являются L-формулами.

(R1) есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $\langle \Gamma\mathbf{,}A\mathbf{,}B\mathbf{,}\Delta \rightarrow \Theta,\ \ \Gamma\mathbf{,}B\mathbf{,}A\mathbf{,}\Delta \rightarrow \Theta\rangle$,

(R2) есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $\langle \Gamma \rightarrow \Delta\mathbf{,}A\mathbf{,}B\mathbf{,}\Theta,\ \ \Gamma \rightarrow \Delta\mathbf{,}B\mathbf{,}A\mathbf{,}\Theta\rangle$,

(R3) есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $\langle A\mathbf{,}A\mathbf{,}\Gamma \rightarrow \Theta,\ \ A\mathbf{,}\Gamma \rightarrow \Theta\rangle$,

(R4) есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $\langle \Gamma \rightarrow \Theta\mathbf{,}A\mathbf{,}A,\ \ \Gamma \rightarrow \Theta\mathbf{,}A\rangle$,

(R5) есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $\langle \Gamma \rightarrow \Theta,\ \ A\mathbf{,}\Gamma \rightarrow \Delta\rangle$, (R6) есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $\langle \Gamma \to \Theta,\ \ \Gamma \to \Theta, A \rangle$,

(R7) есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $\langle A, \Gamma \to \Theta,\ \ (A \& B), \Gamma \to \Theta \rangle$,

(R8) есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $\langle A, \Gamma \to \Theta,\ \ (B \& A), \Gamma \to \Theta \rangle$,

(R9) есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $\langle \Gamma \to \Theta, A,\ \ \Gamma \to \Theta, B,\ \ \Gamma \to \Theta, (A \& B) \rangle$,

(R10) есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $\langle A, \Gamma \to \Theta,\ \ B, \Gamma \to \Theta,\ \ (A \vee B), \Gamma \to \Theta \rangle$,

(R11) есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $\langle \Gamma \to \Theta, A,\ \ \Gamma \to \Theta, (A \vee B) \rangle$,

(R12) есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $\langle \Gamma \to \Theta, A,\ \ \Gamma \to \Theta, (B \vee A) \rangle$,

(R13) есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $\langle \Gamma \to \Theta, A,\ \ B, \Sigma \to \Delta,\ \ (A \supset B), \Gamma, \Sigma \to \Theta, \Delta) \rangle$,

(R14) есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $\langle A, \Gamma \to \Theta, B,\ \ \Gamma \to \Theta, (A \supset B) \rangle$,

(R 15.α) есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $\langle \Gamma \to \Theta, D,\ \ (\neg D), \Gamma \to \Theta \rangle$, где D есть формула, которая не является квазиэлементарной L-формулой длины $< \alpha$,

(R16.β) есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $\langle E, \Gamma \to \Theta,\ \ \Gamma \to \Theta, (\neg E) \rangle$, где E есть формула, которая не является квазиэлементарной L-формулой длины $< \beta$.

(R17) есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $\langle \Gamma \to \Delta, A,\ \ A, \Sigma \to \Theta,\ \ \Gamma, \Sigma \to \Delta, \Theta \rangle$.

Согласно традиции, идущей от [2], секвенциальное правило (R17) принято называть сечением или правилом сечения.

Доказательства в $GI_{\langle \alpha, \beta \rangle}$ строятся обычным для секвенциальных исчислений образом — аналогично тому, как строятся в [2] LK-выводы, а также аналогично тому, как строятся в [3] и в [14] древовидные доказательства в секвенциальных исчислениях. Определение секвенции, доказуемой в $GI_{\langle \alpha, \beta \rangle}$, стандартно.

С использованием методов, разработанных в [2], доказана следующая теорема 1.

Теорема 1. *Для всякой L-формулы* A*:* $\to$ A *есть секвенция, доказуемая в* $GI_{\langle \alpha, \beta \rangle}$*, тогда и только тогда, когда* A $\in I_{\langle \alpha, \beta \rangle}$.

Определяем напарника исчисления $GI_{\langle \alpha, \beta \rangle}$ как такое секвенциальное исчисление W, что (1) язык исчисления W есть язык исчисления

$GI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ (2) множество всех основных секвенций исчисления W есть множество всех основных секвенций исчисления $GI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$, (3) множество всех правил исчисления W есть разность множества всех правил исчисления $GI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ и множества $\{(\mathrm{R17})\}$, (4) доказательство в W строится в виде дерева обычным для секвенциальных исчислений образом. Ясно, что существует единственный напарник исчисления $GI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$. Напарника исчисления $GI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ обозначаем через FC $GI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$.

Следующая теорема 2 (теорема об устранимости сечения для исчисления $GI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$) доказана методом, предложенным и примененным Г. Генценом в [2].

Теорема 2. *Для всякой секвенции S : S доказуема в $GI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ тогда и только тогда, когда S доказуема в FC $GI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$.*

Теорема 3. *Исчисление FC $GI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ разрешимо.*

Теорема 3 доказана методом редуцированных секвенций, разработанным Г. Генценом в [2].

В свете теорем 1,2 и 3 очевидна следующая теорема 4.

Теорема 4. *$I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ есть разрешимая логика.*

Построим семантику, адекватную логике $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$. Предлагаемая семантика логики $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ является двузначной в том смысле, что в этой семантике верно следующее: для всякой L-формулы A и для всякой $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценки v значение A при v есть либо 1 (истина), либо 0 (ложь).

$I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-предоценкой называем отображение множества всех квазиэлементарных L-формул, длина каждой из которых $\leq max(\alpha,\beta)$, в множество $\{0,1\}$.

$I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценкой называем такую $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-предоценку v, что выполняются условия:

(1) для всякой такой квазиэлементарной L-формулы Q, что $h(\mathrm{Q}) < max(\alpha,\beta)$, верно следующее: если $h(\mathrm{Q}) \geq \alpha$ и $v(\mathrm{Q}) = 1$, то $v((\neg\mathrm{Q})) = 0$;

(2) для всякой такой квазиэлементарной L-формулы Q , что $h(\mathrm{Q}) < max(\alpha,\beta)$, верно следующее: если $h(\mathrm{Q}) \geq \beta$ и $v(\mathrm{Q}) = 0$, то $v((\neg\mathrm{Q})) = 1$.

Определим $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивание при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке.

$I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означиванием при $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке v называем такое отображение f множества всех L-формул в множество $\{0,1\}$, что выполняются следующие условия:

(1) для всякой квазиэлементарной L-формулы A, длина которой $\leq max(\alpha,\beta), f(\mathrm{A}) = v(\mathrm{A})$;

(2) для всякой L-формулы A, являющейся квазиэлементарной L-формулой длины $\geq$ $(\alpha, \beta)max$: $f((\neg\mathrm{A})) = 1$ тогда и только тогда, когда $f(\mathrm{A}) = 0$;

(3) для всякой L-формулы A, не являющейся квазиэлементарной L-формулой: $f((\neg\mathrm{A})) = 1$ тогда и только тогда, когда $f(\mathrm{A}) = 0$;

(4) для всяких L-формул A и B:

$$f((\mathrm{A}\&\ \mathrm{B})) = 1 \text{ тогда и только тогда, когда } f(\mathrm{A}) = 1 \text{ и } f(\mathrm{B}) = 1,$$

$$f((\mathrm{A}\vee\ \mathrm{B})) = 1 \text{ тогда и только тогда, когда } f(\mathrm{A}) = 1 \text{ и } f(\mathrm{B}) = 1,$$

$$f((\mathrm{A}\supset\ \mathrm{B})) = 1 \text{ тогда и только тогда, когда } f(\mathrm{A}) = 0 \text{ и } f(\mathrm{B}) = 1.$$

Можно доказать, что для всякой $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценки v существует единственное $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивание при v. Условимся для любой $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценки v обозначать $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивание при v через $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle\alpha,\beta\rangle}$.

Определим $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимую L-формулу.

Называем A $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимой L-формулой, если для всякой $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценки v $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle\alpha,\beta\rangle}(A) = 1$.

Дадим определение, называемое определением $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-следования. Говорим, что A $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-следует из M (или из M $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-следует A), если выполняются три условия: (1) A есть L-формула, (2) M есть множество L-формул, (3) для всякой $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценки v верно, что если $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle\alpha,\beta\rangle}(\mathrm{B}) = 1$ для всякой L-формулы B из M, то $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle\alpha,\beta\rangle}(A) = 1$.

Доказана следующая лемма 1.

Лемма 1. *Всякая аксиома исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ является $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимой L-формулой.*

Доказательство. Здесь мы не приводим полностью длинное, но простое доказательство леммы 1, ограничиваясь воспроизведением трех самых «сложных» частей этого доказательства, — части, в которой обосновывается $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимость всякой L-формулы вида (I), части, в которой обосновывается $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимость всякой L-формулы вида (XI, α), и части, в которой обосновывается $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимость всякой L-формулы вида (XII, β).

Докажем $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимость всякой L-формулы вида (I).

Иначе говоря, докажем $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимость всякой L-формулы вида $((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)))$, где A, B и C — L-формулы.

(1) A, B и C — L-формулы (допущение).

(2) v есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценка (допущение).

Ясно, что (3) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}$ есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивание при v.

(4) $((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)))$ есть L-формула (из (1), по определению L-формулы).

(5) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))) = 0$ или $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)))) = 1$ (из (2), (3) и (4), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(6) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)))) = 0$ (допущение).

(7) $(A \supset B)$ и $((B \supset C) \supset (A \supset C))$ являются L-формулами (из (1), по определению L-формулы).

(8) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((A \supset B)) = 1$ и $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((B \supset C) \supset (A \supset C))) = 0$ (из (2), (3), (6) и (7), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(9) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((A \supset B)) = 1$ (из (8)).

(10) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(A) = 0$ или $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(B) = 1$ (из (1), (2), (3) и (9), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(11) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((B \supset C) \supset (A \supset C))) = 0$ (из (8)).

(12) $(B \supset C)$ и $(A \supset C)$ являются L-формулами (из (1), по определению L-формулы).

(13) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((B \supset C)) = 1$ и $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((A \supset C)) = 0$ (из (2), (3), (11) и (12), по определению$I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(14) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((B \supset C)) = 1$ (из (13)).

(15) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(B) = 0$ или $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(C) = 1$ (из (1), (2), (3) и (14), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(16) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((A \supset C)) = 0$ (из (13)).

(17) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(A) = 1$ и $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(C) = 0$ (из (1), (2), (3) и (16), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(18) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(A) = 1$ (из (17)).

Опираясь на утверждение (18), получаем, что

(19) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(A) \neq 0$.

(20) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(B) = 1$ (из (10) и (19)).

Опираясь на утверждение (20), получаем, что

(21) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(B) \neq 0$.

(22) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(C) = 1$ (из (15) и (21)).

Опираясь на утверждение (22), получаем, что

(23) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(C) \neq 0$.

(24) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(C) = 0$ (из (17)).

Утверждение (24) противоречит утверждению (23). Следовательно, неверно допущение (6).

Таким образом, (25) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)))) \neq 0$.

(26) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)))) = 1$ (из (5) и (25)).

Снимая допущение (2) и обобщая, получаем, что

(27) для всякой $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценки v $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)))) = 1$.

(28) $((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)))$ есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимая L-формула (из (27), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимой L-формулы).

Снимая допущение (1) и обобщая, получаем, что

(29) для всяких L-формул A, B и C: ((A $\supset$ B) $\supset$ ((B $\supset$ C) $\supset$ (A $\supset$ C))) есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимая L-формула.

Очевидно, что (30) всякая L-формула вида (I) есть ((A $\supset$ B) $\supset$ ((B $\supset$ C) $\supset$ (A $\supset$ C))) для некоторых L-формул A, B и C.

Опираясь на утверждения (29) и (30), получаем, что всякая L-формула вида (I) есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимая L-формула.

Итак, доказана $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимость всякой L-формулы вида (I).

Докажем $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимость всякой L-формулы вида (XI, α).

(1) A и D являются L-формулами и D не является квазиэлементарной L-формулой длины $< \alpha$ (допущение).

(2) A есть L-формула (из (1)).

(3) D есть L-формула (из (1)).

(4) D не есть квазиэлементарная L-формула длины $< \alpha$ (из (1)).

(5) v есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценка (допущение).

(6) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}$ есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивание при v (из (5), по соглашению об обозначении).

(7) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}$ есть отображение множества всех L-формул во множество $\{0, 1\}$ (из (5) и (6), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

Вспомним, что (8) $h(D)$ есть длина L-формулы D.

Опираясь на утверждения (4) и (8), получаем, что

(9) неверно, что D есть квазиэлементарная L-формула и $h(D) < \alpha$.

(10) D есть квазиэлементарной L-формула (допущение).

(11) Неверно, что $h(D) < \alpha$ (из (9) и (10).

Но тогда понятно, что (12) $h(D) \geq \alpha$.

Понятно, что (13) $h(D) < max(\alpha, \beta)$ или $h(D) \geq max(\alpha, \beta)$.

(14) $h(D) < max(\alpha, \beta)$ (допущение).

(15) Если $v(D) = 1$, то $v((\neg D)) = 0$ (из (3), (12) и (14), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценки).

В свете утверждения (14) ясно, что

(16) $h(D) \leq max(\alpha, \beta)$.

(17) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(D) = v(D)$ (из (5), (6), (10) и (16), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

Очевидно, что (18) $h((\neg D)) = h(D) + 1$.

Опираясь на утверждения (14) и (18), получаем, что

(19) $h((\neg D)) \leq max(\alpha, \beta)$.

Понятно, что (20) $(\neg D)$ есть квазиэлементарная L-формула.

(21) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg D)) = v((\neg D))$ (из (5), (6), (19) и (20), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(22) Если $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(D) = 1$, то $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg D)) = 0$ (из (15), (17) и (21)).

Опираясь на утверждения (3) и (7), получаем, что

(23) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(D) = 1$ или $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(D) = 0$.

(24) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg D)) = 0$ или $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(D) = 0$ (из (22) и (23)).

Используя утверждения (2), (3), (5), (6), (24), определение L-формулы и определение $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке, получаем, что

(25) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((\neg D) \supset (D \supset A))) = 1$.

Снимая допущение (14), получаем, что

(26) если $h(D) < max(\alpha, \beta)$, то $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((\neg D) \supset (D \supset A))) = 1$.

(27) $h(D) \geq max(\alpha, \beta)$ (допущение).

(28) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg D)) = 1$ тогда и только тогда, когда $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(D) = 0$ (из (5), (6), (10) и (27), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(29) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg D)) \neq 1$ или $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(D) = 0$ (из (28)).

Разумеется, (30) $(\neg D)$ есть L-формула.

Опираясь на утверждения (7) и (30), получаем, что

(31) если $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg D)) \neq 1$, то $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg D)) = 0$.

(32) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg D)) = 0$ или $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(D) = 0$ (из (29) и (31)).

Используя утверждения (2), (3), (5), (6), (32), определение L-формулы и определение $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке, получаем, что

(33) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((\neg D) \supset (D \supset A))) = 1$.

Снимая допущение (27), получаем, что

(34) если $h(D) \geq max(\alpha, \beta)$, то $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((\neg D) \supset (D \supset A))) = 1$.

(35) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((\neg D) \supset (D \supset A))) = 1$ (из (13), (26) и (34)).

Снимая допущение (10), получаем, что

(36) если D есть квазиэлементарная L-формула, то $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((\neg D) \supset (D \supset A))) = 1$.

(37) D не есть квазиэлементарная L-формула (допущение).

(38) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\supset D)) = 1$ тогда и только тогда, когда $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(D) = 0$ (из (5), (6), (10) и (37), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

Здесь не приводим шаги (39), (40), (41), (42), аналогичные шагам (29), (30), (31), (32), соответственно.

Используя утверждения (2), (3), (5), (6), (42), определение L-формулы и определение $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке, получаем, что

(43) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((\neg D) \supset (D \supset A))) = 1$.

Снимая допущение (37), получаем, что

(44) если D не есть квазиэлементарная L-формула, то $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((\neg D) \supset (D \supset A))) = 1$.

(45) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((\neg D) \supset (D \supset A))) = 1$ (из (36) и (44)).

Снимая допущение (5) и обобщая, получаем, что

(46) для всякой $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценки v $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((\neg D) \supset (D \supset A))) = 1$.

(47) $((\neg D) \supset (D \supset A))$ есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимая L-формула (из (46), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимой L-формулы).

Снимая допущение (1) и обобщая, получаем, что

(48) для всякой L-формулы A и для всякой такой L-формулы D, что D не является квазиэлементарной L-формулой длины $< \alpha$: $((\neg \mathrm{D}) \supset (\mathrm{D} \supset \mathrm{A}))$ есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимая L-формула.

Очевидно, что (49) всякая L-формула вида (XI, α) есть $((\neg \mathrm{D}) \supset (\mathrm{D} \supset \mathrm{A}))$ для некоторой L-формулы A и для некоторой такой L-формулы D, что D не является квазиэлементарной L-формулой длины $< \alpha$.

Опираясь на утверждения (48) и (49), получаем, что всякая L-формула вида (XI, α) есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимая L-формула.

Итак, доказана $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимость всякой L-формулы вида (XI, α).

Докажем $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимость всякой L-формулы вида (XII, β).

(1) A и E являются L-формулами и E не является квазиэлементарной L-формулой длины $< \beta$ (допущение).

(2) A есть L-формула (из (1)).

(3) E есть L-формула (из (1)).

(4) E не есть квазиэлементарная L-формула длины $< \beta$ (из (1)).

(5) v есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценка (допущение).

(6) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}$ есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивание при v (из (5), по соглашению об обозначении).

(7) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}$ есть отображение множества всех L-формул во множество $\{0, 1\}$ (из (5) и (6), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

Вспомним, что (8) $h(E)$ есть длина L-формулы E.

Опираясь на утверждения (4) и (8), легко показать, что

(9) E не есть квазиэлементарная L-формула или $h(E) \geq \beta$.

(10) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg(A \supset A))) \neq 1$.

Докажем утверждение (10).

Очевидно, что (10.1) $(A \supset A)$ есть L-формула, не являющаяся квазиэлементарной L-формулой.

(10.2) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg(A \supset A))) = 1$ тогда только тогда, когда $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((A \supset A)) = 0$ (из (5), (6) и (10.1), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(10.3) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((A \supset A)) = 1$ тогда только тогда, когда $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(A) = 0$ или $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(A) = 1$ (из (2), (5) и (6), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

В свете утверждений (2) и (7) ясно, что

(10.4) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(A) = 0$ или $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(A) = 1$.

(10.5) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((A \supset A)) = 1$ (из (10.3) и (10.4)).

Опираясь на утверждение (10.5), получаем, что

(10.6) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((A \supset A)) \neq 0$.

(10.7) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg(A \supset A))) \neq 1$ (из (10.2) и (10.6)).

Утверждение (10) доказано.

Разумеется, (11) $(\neg(A \supset A))$ есть L-формула.

В свете утверждений (7) и (11) ясно, что

(12) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg(A \supset A))) = 0$ или $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg(A \supset A))) = 1$.

(13) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg(A \supset A))) = 0$ (из (10) и (12)).

В свете утверждений (3) и (7) ясно, что

(14) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(E) = 0$ или $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(E) = 1$.

(15) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(E) = 1$ (допущение).

Используя утверждения (2), (3), (5), (6), (13), (15) и определение $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке, получаем, что

(16) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((E \supset (\neg(A \supset A)))) = 0$.

(17) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((E \supset (\neg(A \supset A)))) = 0$ или $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg E)) = 1$ (из(16)).

Разумеется, (18) $(E \supset (\neg(A \supset A)))$ и $(\neg E)$ являются L-формулами.

(19) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((E \supset (\neg(A \supset A))) \supset (\neg E))) = 1$ (из (5), (6), (17) и (18), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

Снимая допущение (15), получаем, что

(20) если $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(E) = 1$, то $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((E \supset (\neg(A \supset A))) \supset (\neg E))) = 1$.

(21) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(E) = 1$ (допущение).

(22) E есть квазиэлементарная L-формула (допущение).

(23) $h(E) \geq \beta$ (из (9) и (22)).

(24) $h(E) < max(\alpha, \beta)$ (допущение).

(25) Если $v(E) = 0$, то $v((\neg E)) = 1$ (из (5), (22), (23) и (24), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценки).

В свете допущения (24) ясно, что верны утверждения (26) и (27)

(26) $h(E) \leq max(\alpha, \beta)$.

(27) $h((\neg E)) \leq max(\alpha, \beta)$.

Разумеется, (28) $(\neg E)$ есть квазиэлементарная L-формула.

(29) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(E) = v(E)$ (из (5), (6), (22) и (26), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(30) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg E)) = v((\neg E))$ (из (5), (6), (27) и (28), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(31) $v(E) = 0$ (из (21) и (29)).

(32) $v((\neg E)) = 1$ (из (25) и (31)).

(33) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg E)) = 1$ (из (30) и (32)).

Снимая допущение (24), получаем, что

(34) если $h(E) < max(\alpha, \beta)$, то $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg E)) = 1$.

(35) $h(E) \geq max(\alpha, \beta)$ (допущение).

(36) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg E)) = 1$ тогда только тогда, когда $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(E) = 0$ (из (5), (6), (22) и (35), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(37) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg E)) = 1$ (из (21) и (36)).

Снимая допущение (35), получаем, что

(38) если $h(E) \geq max(\alpha, \beta)$, то $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg E)) = 1$.

Известно, что (39) $h(E) < max(\alpha, \beta)$ или $h(E) \geq max(\alpha, \beta)$.

(40) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg E)) = 1$ (из (34), (38) и (39)).

Снимая допущение (22), получаем, что

(41) если E есть квазиэлементарная L-формула, то $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg E)) = 1$.

(42) E не есть квазиэлементарная L-формула (допущение).

(43) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg E)) = 1$ тогда только тогда, когда $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(E) = 0$ (из (3), (5), (6) и (42), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(44) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg E)) = 1$ (из (21)).

Снимая допущение (42), получаем, что

(45) если E не есть квазиэлементарная L-формула, то $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg E)) = 1$.

(46) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg E)) = 1$ (из (41) и (45)).

(47) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((E \supset (\neg(A \supset A)))) = 0$ или $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg E)) = 1$ (из(16)) (из (46)).

Разумеется, (48) $(E \supset (\neg(A \supset A)))$ и $(\neg E)$ являются L-формулами.

(49) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((E \supset (\neg(A \supset A))) \supset (\neg E))) = 1$ (из (5), (6), (47) и (48), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

Снимая допущение (21), получаем, что

(50) если $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(E) = 0$, то $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((E \supset (\neg(A \supset A))) \supset (\neg E))) = 1$.

В свете утверждений (3) и (7) ясно, что

(51) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(E) = 0$ или $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(E) = 1$.

(52) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((E \supset (\neg(A \supset A))) \supset (\neg E))) = 1$ (из (20), (50) и (51)).

Снимая допущение (5) и обобщая, получаем, что

(53) для всякой $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценки v $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((E \supset (\neg(A \supset A))) \supset (\neg E))) = 1$.

(54) $((E \supset (\neg(A \supset A))) \supset (\neg E))$ есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимая L-формула (из (53), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимой L-формулы).

Снимая допущение (1) и обобщая, получаем, что

(55) для всякой L-формулы A и для всякой такой L-формулы E, что E не является квазиэлементарной L-формулой длины $< \beta$: $((\mathrm{E} \supset (\neg(\mathrm{A} \supset \mathrm{A}))) \supset (\neg \mathrm{E}))$ есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимая L-формула.

Очевидно, что (56) всякая L-формула вида (XII, β) есть $((\mathrm{E} \supset (\neg(\mathrm{A} \supset \mathrm{A}))) \supset (\neg \mathrm{E}))$ для некоторой L-формулы A и для некоторой такой L-формулы E, что E не является квазиэлементарной L-формулой длины $< \alpha$.

Опираясь на утверждения (55) и (56), получаем, что всякая L-формула вида (XII, β) есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимая L-формула.

Итак, доказана $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимость всякой L-формулы вида (XII, β). $\square$

Лемма 2. *Для всякого множества* M L*-формул и для всякой аксиомы* A *исчисления* $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ *верно, что* A $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$*-следует из* M.

Лемма 2 является простым следствием леммы 1 и определений.

Лемма 3. *Для всякого множества* M L*-формул и для всяких* L*-формул* A *и* B*: если* A $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$*-следуют из* M *и* (A $\supset$ B) $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$*-следует из* M*, то* B $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$*-следует из* M.

Стереотипное доказательство леммы 3 здесь не приводим.

Опираясь на леммы 2 и 3, нетрудно провести индуктивное доказательство следующей теоремы 5.

Теорема 5. *Для всякого множества* M L*-формул и для всякой* L*-формулы* A*: если* M $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ A*, то* A $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$*-следует из* M.

Теперь нашей целью является доказательство обращения теоремы 5.

Определим $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочное множество.

$I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочным множеством называем множество S L-формул, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) для всякой квазиэлементарной L-формулы Q: если $h(\mathrm{Q}) \geq \alpha$ и $\mathrm{Q} \in S$, то неверно, что $(\neg\mathrm{Q}) \notin S$,

(2) для всякой квазиэлементарной L-формулы Q: если $h(\mathrm{Q}) \geq \beta$ и неверно, что $\mathrm{Q} \notin S$, то $(\neg\mathrm{Q}) \in S$,

(3) для всяких L-формул A и B: $(\mathrm{A}\ \&\ \mathrm{B}) \in S$ и тогда только тогда, когда $\mathrm{A} \in S$ и $\mathrm{B} \in S$,

(4) для всяких L-формул A и B: $(\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \in S$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{A} \in S$ или $\mathrm{B} \in S$,

(5) для всяких L-формул A и B: $(\mathrm{A} \supset \mathrm{B}) \in S$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{A} \notin S$ или $\mathrm{B} \in S$,

(6) для всякой L-формулы A, не являющейся квазиэлементарной L-формулой: $(\neg\mathrm{A}) \in S$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{A} \in S$.

Лемма 4. *Для всякого* $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$*-оценочного множества* M *и для всякой квазиэлементарной* L*-формулы* Q*: если* $h(\mathrm{Q}) \geq max(\alpha,\beta)$*, то* $(\neg\mathrm{Q}) \in$ M *тогда только тогда, когда* $\mathrm{Q} \notin$ M.

Доказательство.

(1) M есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочное множество (допущение).

(2) Q есть квазиэлементарная L-формула Q (допущение).

(3) $h(Q) \geq max(\alpha,\beta)$ (допущение).

Опираясь на утверждение (3), получаем,что

(4) $h(Q) \geq \alpha$.

(5) Для всякой квазиэлементарной L-формулы Q: если h(Q) $\geq \alpha$ и Q $\in M$, то (¬Q) $\notin M$ (из (1), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочного множества).

(6) Если $Q \in M$, то $(\neg Q) \notin M$ (из (2), (4) и (5)).

(7) Если $(\neg Q) \in M$, то $Q \notin M$ (из (6)).

Опираясь на утверждение (3), получаем, что

(8) h(Q) $\geq \beta$.

(9) Для всякой квазиэлементарной L-формулы Q: если h(Q) $\geq \beta$ и Q $\notin M$, то (¬Q) $\in M$(из (1), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочного множества).

(10) Если Q $\notin M$, то (¬Q) $\in M$ (из (2), (8) и (9)).

(11) $(\neg Q) \in M$ тогда и только тогда, когда $Q \notin M$ (из (7) и (10)).

Снимая допущения (1), (2) и (3), получаем, что для всякого $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочного множества M и для всякой квазиэлементарной L-формулы Q: если h(Q)$\geq max(\alpha, \beta)$, то (¬Q) ∈ M тогда только тогда, когда Q ∉ M.

Лемма 4 доказана. □

Лемма 5. *Для всякого множества* M *L-формул и для всякой L-формулы* F*: если неверно, что* M $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ F*, то существует такое $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочное множество* K*,что* M $\subseteq$ K *и при этом неверно, что* K $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ F.

Доказательство.

(1) M есть множество L-формул (допущение).

(2) F есть L-формула (допущение).

(3) Неверно, что $M \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$ (допущение).

Условимся, что (4) U есть множество всех таких множеств X L-формул, что $M \subseteq$ X и неверно, что X $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$. Условимся также, что (5) $\subseteq_U$ есть множество всех таких упорядоченных пар ⟨a, b⟩, что a $\in U$, b $\in B$ и a $\subseteq$ b.

Очевидно, что (6) $\subseteq_U$ есть отношение частичного порядка на U. Поскольку $M \in U$, то (7) $U \neq \varnothing$.Но тогда понятно, что (8) упорядоченная пара $\langle U, \subseteq_U\rangle$ есть частично упорядоченное множество.

(9) Для всякой цепи в $\langle U, \subseteq_U\rangle$ существует верхняя грань в $\langle U, \subseteq_U\rangle$.

Докажем утверждение (9).

(9.1) Z есть цепь в $\langle U, \subseteq_U\rangle$ (допущение)

Ясно, что (9.2) $M \subseteq \Sigma(Z)$ и $\Sigma(Z)$ есть множество L-формул. Здесь $\Sigma(Z)$ есть объединение цепи Z, то есть $\Sigma(Z)$ равно множеству всех таких x, что x∈z для некоторого z из Z.

(9.3) $\Sigma(Z) \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$ (допущение).

Тогда (9.4) существует такое целое положительное число n и существуют такие L-формулы $\mathrm{A}_1,\ldots,\ \mathrm{A}_n$, что A_n есть F и для всякого целого положительного числа i, которое меньше или равно n, выполняется хотя бы одно из следующих трех условий: (1) $\mathrm{A}_i \in \Sigma(Z)$, (2) A_i есть аксиома исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$, (3) существуют такие целые положительные числа k и l, каждое из которых меньше i, что $\langle \mathrm{A}_k, \mathrm{A}_l, \mathrm{A}_i\rangle \in\ \mathrm{MP}_L$.

Пусть (9.5) n' есть целое положительное число, $\mathrm{A}'_1,\ldots,\ \mathrm{A}'_{n'}$ — L-формулы, $\mathrm{A}'_{n'}$ есть F и для всякого целого положительного числа i, которое меньше или равно n', выполняется хотя бы одно из следующих трех условий: (1) $\mathrm{A}_i \in \Sigma(Z)$, (2) A_i есть аксиома исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$, (3) существуют такие целые положительные числа k и l, каждое из которых меньше i, что $\langle \mathrm{A}_k, \mathrm{A}_l, \mathrm{A}_i\rangle \in \mathrm{MP}_L$.

Легко проверить, что

(9.6) n'-членная последовательность L-формул, первый член которой есть $\mathrm{A}'_1,\ldots,n'$-ый член которой есть $\mathrm{A}'_{n'}$, является $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-выводом из $\Sigma(Z) \cap \{\mathrm{A}'_1,\ldots,\ \mathrm{A}'_{n'}\}$ L-формулы F.

Очевидно, что

(9.7) $\Sigma(Z) \cap \{\mathrm{A}'_1,\ldots,\ \mathrm{A}'_{n'}\}$ есть конечное подмножество множества $\Sigma(Z)$.

Мы не приводим здесь простое индуктивное (методом прямой индукции) доказательство следующего утверждения (9.8).

(9.8) Существует такое множество H из Z, что $\Sigma(Z) \cap \{\mathrm{A}'_1,\ldots,\mathrm{A}'_{n'}\} \subseteq\ H$.

Пусть (9.9) $H \in Z$ и $\Sigma(Z) \cap \{\mathrm{A}'_1,\ldots,\ \mathrm{A}'_{n'}\} \subseteq H$.

Опираясь на утверждения (9.6) и (9.9) и определения 3 и 4, получаем, что

(9.10) n'-членная последовательность L-формул, первый член которой есть $\mathrm{A}'_1,\ldots,n'$-ый член которой есть $\mathrm{A}'_{n'}$, является $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-выводом из H L-формулы F. Понятно, что существует n'-членная последовательность L-формул, первый член которой есть $\mathrm{A}'_1,\ldots,\ n'$-ый член которой есть $\mathrm{A}'_{n'}$. В свете этого обстоятельства и утверждения (9.10) ясно, что

(9.11) существует $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-вывод из H L-формулы F.

Но тогда (9.12) $H \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$.

Разумеется, (9.13) $H \in U$.

(9.14) Неверно, что $H \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$ (из (4) и(9.13)).

Утверждение (9.14) противоречит утверждению (9.12).

Следовательно, неверно утверждение (9.3).

Итак, (9.15) неверно,что $\Sigma(Z) \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$.

(9.16) $\Sigma(Z) \in U$(из (9.2) и (9.15)).

Очевидно, что (9.17) для всякого z из Z верно, что z включается в $\Sigma(Z)$.

(9.18) $z \in Z$ (допущение).

(9.19) z включается в $\Sigma(Z)$ (из (9.17) и (9.18)).

(9.20) $z \subseteq_U \Sigma(Z)$ (из (5), (9.16), (9.18) и (9.19)).

Снимая допущение (9.18) и обобщая, получаем, что

(9.21) для всякого если z $\in Z$, то z $\subseteq_U \Sigma(Z)$.

Опираясь на утверждения (8), (9.1), (9.16) и (9.21) и применяя определение цепи в частично упорядоченном множестве и определение верхней грани множества в частично упорядоченном множестве, получаем, что

(9.22) $\Sigma(Z)$ есть верхняя грань цепи Z в $\langle U, \subseteq_U \rangle$.

(9.23) Существует верхняя грань цепи Z в $\langle U, \subseteq_U \rangle$ (из (9.22)).

Снимая допущение (9.1) и обобщая, получаем, что для всякой цепи в $\langle U, \subseteq_U \rangle$ существует верхняя грань в $\langle U, \subseteq_U \rangle$.

Утверждение (9) доказано.

Вспомним теперь лемму Цорна, которая гласит, что если для всякой цепи в частично упорядоченном множестве Ч существует верхняя грань в Ч, то в Ч существует максимальный элемент.

Из утверждений (8) и (9) получаем по лемме Цорна, что (10) в $\langle U, \subseteq_U \rangle$ существует максимальный элемент.

Пусть (11) $\boldsymbol{M}$ есть максимальный элемент в $\langle U, \subseteq_U \rangle$.

Ясно, что (12) неверно, что $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle \alpha,\beta \rangle}} F$.

(13) Для всякой L-формулы А: если А $\notin \boldsymbol{M}$, то $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle \alpha,\beta \rangle}}$ (А $\supset F$).

Докажем утверждение (13).

(13.1) A есть L-формула (допущение).

(13.2) $A \notin \boldsymbol{M}$ (допущение).

(13.3) Неверно, что $\boldsymbol{M} \cup A \vdash_{HI_{\langle \alpha,\beta \rangle}} F$ (допущение).

В свете допущения (13.2) ясно, что (13.4) $\boldsymbol{M} \neq \boldsymbol{M} \cup \{A\}$.

Разумеется, что (13.5) $\boldsymbol{M} \in U$. Поскольку $\boldsymbol{M} \in U$, то (13.6) М $\subseteq \boldsymbol{M}$.

Но тогда (13.7) М $\subseteq \boldsymbol{M} \cup \{A\}$.

Подчеркиваем, что (13.8) $\boldsymbol{M} \subseteq \boldsymbol{M} \cup \{A\}$.

(13.9) $\boldsymbol{M} \cup \{A\} \in U$ (из (4), (13.3), (13.7) и того, что $\boldsymbol{M} \cup \{A\}$ является множеством L-формул).

(13.10) $\boldsymbol{M} \subseteq_U \boldsymbol{M} \cup \{A\}$ (из (5), (13.5), (13.8) и (13.9)).

(13.11) $\boldsymbol{M}$ не является максимальным элементом в частично упорядоченном множестве $\langle U, \subseteq_U \rangle$ (из (13.4), (13.9) и (13.10), по определению максимального элемента в частично упорядоченном множестве).

Утверждение (13.11) противоречит утверждению (11).

Следовательно, неверно допущение (13.3).

Но тогда (13.12) $\boldsymbol{M} \cup \{A\} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$.

Разумеется, что (13.13) $\boldsymbol{M}$ есть множество L-формул, а A и F являются L-формулами.

(13.14) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A \supset F)$ (из (13.12) и (13.13), по теореме дедукции для $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-выводов).

Снимая допущения (13.1) и (13.2) и обобщая, получаем, что для всякой L-формулы A: если A $\notin \boldsymbol{M}$, то $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ (A $\supset F$).

Утверждение (13) доказано.

(14) Для всякой L-формулы A: если $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ A, то A $\in \boldsymbol{M}$.

Докажем утверждение (14).

(14.1) A есть L-формула (допущение).

(14.2) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$ (допущение).

(14.3) $A \notin \boldsymbol{M}$ (допущение).

(14.4) Если $A \notin \boldsymbol{M}$, то $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A \supset F)$ (из (12) и (14.1)).

(14.5) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A \supset F)$ (из (14.3) и (14.4)).

Опираясь на утверждения (14.2) и (14.5), легко доказать, что

(14.6) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$.

Утверждение (14.6) противоречит утверждению (12).

Следовательно, неверно допущение (14.3).

Но тогда (14.7) $A \in \boldsymbol{M}$.

Снимая допущения (14.1) и (14.2) и обобщая, получаем, что для всякой L-формулы A:

если $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ A, то A $\in \boldsymbol{M}$.

Утверждение (14) доказано.

(15) Для всяких L-формул A и B: (A&B) $\in \boldsymbol{M}$ тогда и только тогда, когда A $\in \boldsymbol{M}$ и B $\in \boldsymbol{M}$.

Докажем утверждение (15).

(15.1) A и B являются L-формулами (допущение).

Очевидно, что (15.2) если $(A\&B) \in \boldsymbol{M}$, то $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A\&B)$.

Опираясь на то, что $(A\&B) \supset A$ и $(A\&B) \supset B$ являются аксиомами исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$, можно доказать, что (15.3) если $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A\&B)$, то $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$ и $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} B$.

(15.5) Если $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$, то $A \in \boldsymbol{M}$ (из (13) и (15.1)).

(15.6) Если $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} B$, то $B \in \boldsymbol{M}$ (из (13) и (15.1)).

(15.7) Если $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$ и $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} B$, то $A \in \boldsymbol{M}$ и $B \in \boldsymbol{M}$ (из (15.5) и (15.6)).

(15.8) Если $(A\&B) \in \boldsymbol{M}$, то $A \in \boldsymbol{M}$ и $B \in \boldsymbol{M}$ (из (15.2), (15.3) и (15.7)).

Очевидно, что (15.9) если $A \in \boldsymbol{M}$ и $B \in \boldsymbol{M}$, то $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$ и $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} B$.

Опираясь на то, что $(A \supset (B \supset (A\&B))$ является аксиомой исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$, легко доказать, что (15.10) если $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$ и $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} B$, то $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A\&B)$.

Поскольку $(A\&B)$ есть L-формула, то в силу утверждения (14) верно, что

(15.12) если $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A\&B)$, то $(A\&B) \in \boldsymbol{M}$.

(15.13) Если $A \in \boldsymbol{M}$ и $B \in \boldsymbol{M}$, то $(A\&B) \in \boldsymbol{M}$ (из (15.9), (15.10) и (15.11)).

(15.14) $(A\&B) \in \boldsymbol{M}$ тогда и только тогда, когда $A \in \boldsymbol{M}$ и $B \in \boldsymbol{M}$ (из (15.8) и (15.13)).

Снимая допущение (15.1) и обобщая, получаем, что для всяких L-формул A и B верно следующее: (A&B) $\in \boldsymbol{M}$ тогда и только тогда, когда A $\in \boldsymbol{M}$ и B $\in \boldsymbol{M}$.

Утверждение (15) доказано.

(16) Для всяких L-формул A и B :(A∨B) $\in \boldsymbol{M}$ тогда и только тогда, когда A $\in \boldsymbol{M}$ или B $\in \boldsymbol{M}$.

Докажем утверждение (16).

(16.1) A и B являются L-формулами (допущение).

(16.2) $(A \vee B) \in \boldsymbol{M}$ (допущение).

(16.3) A $\notin \boldsymbol{M}$ и B $\notin \boldsymbol{M}$ (допущение).

В свете утверждения (16.2) ясно, что (16.4) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A \vee B)$.

(16.5) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A \supset F)$ и $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (B \supset F)$ (из (13), (16.1) и (16.3)).

Заметим, что (16.6) $((A \supset F) \supset ((B \supset F) \supset ((A \vee B) \supset F)))$ есть аксиома исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$.

Опираясь на утверждения (16.4), (16.5) и (16.6), легко доказать, что (16.7) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$.

Утверждение (16.7) противоречит утверждению (12).

Следовательно, неверно допущение (16.3).

Но тогда (16.8) $A \in \boldsymbol{M}$ или $B \in \boldsymbol{M}$.

Снимая допущение (16.2), получаем, что

(16.9) если $A \vee B \in$ M, то $A \in \boldsymbol{M}$ или $B \supset \boldsymbol{M}$.

Очевидно, что (16.10) если $A \in \boldsymbol{M}$ или $B \in \boldsymbol{M}$, то $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$ или $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} B$.

Опираясь на то, что аксиомами исчисления $HPar$ являются $(A \supset (A \vee B))$ и $(B \supset (A \vee B))$, легко доказать, что (16.11) если $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$ или $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} B$, то $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A \vee B)$.

Поскольку $(A \vee B)$ есть L-формула, то в силу утверждения (14) верно, что

(16.12) если $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A \vee B)$, то $(A \vee B) \in \boldsymbol{M}$.

(16.13) Если $A \in \boldsymbol{M}$ или $B \in \boldsymbol{M}$, то $(A \vee B) \in \boldsymbol{M}$ (из (16.10), (16.11) и (16.12)).

(16.14) $(A \vee B) \in \boldsymbol{M}$ тогда и только тогда, когда $A \in \boldsymbol{M}$ или $B \in \boldsymbol{M}$ (из (16.9) и (16.13)).

Снимая допущение (16.1) и обобщая, получаем, что для всяких L-формул A и B верно следующее: (A$\vee$ B) $\in \boldsymbol{M}$ тогда и только тогда, когда A $\in \boldsymbol{M}$ или B $\in \boldsymbol{M}$.

Утверждение (16) доказано.

(17) Для всяких L-формул A и B: (A $\supset$ B) $\in \boldsymbol{M}$ тогда и только тогда, когда A $\notin \boldsymbol{M}$ или B $\in \boldsymbol{M}$.

Докажем утверждение (17).

(17.1) A и B являются L-формулами (допущение).

(17.2) $(A \supset B) \in \boldsymbol{M}$ (допущение).

(17.3) $A \in \boldsymbol{M}$ (допущение).

В свете допущений (17.1) и (17.3) ясно, что верны следующие утверждения (17.4) и (17.5)

(17.4) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A \supset B)$.

(17.5) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$.

Опираясь на утверждения (17.4) и (17.5), легко доказать что

(17.6) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} B$.

(17.7) Если $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} B$, то $B \in \boldsymbol{M}$ (из (14) и (17.1)).

(17.8) $B \in \boldsymbol{M}$ (из (17.6) и (17.7)).

Снимая допущение (17.3), получаем, что

(17.9) если $A \in \boldsymbol{M}$, то $B \in \boldsymbol{M}$.

(17.10) $A \notin \boldsymbol{M}$ или $B \in \boldsymbol{M}$ (из (17.9)). Снимая допущение (17.2), получаем, что

(17.11) если $(A \supset B) \in \boldsymbol{M}$, то $A \notin \boldsymbol{M}$ или $B \in \boldsymbol{M}$.

(17.12) $A \notin \boldsymbol{M}$ (допущение).

(17.13) $(A \supset B) \notin \boldsymbol{M}$ (допущение).

Поскольку $(A \supset B)$ есть L-формула, то в силу утверждения (14) верно, что

(17.14) если $(A \supset B) \notin \boldsymbol{M}$, то $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} ((A \supset B) \supset F)$.

(17.15) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} ((A \supset B) \supset F)$ (из (17.13) и (17.14)).

Можно доказать, что для всяких L-формул A, B и C $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ (((A $\supset$ B) $\supset$ C) $\supset$ ((A $\supset$ C) $\supset$ C)).

В частности, верно, что (17.16) $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (((A \supset B) \supset F) \supset ((A \supset F) \supset F))$.

Опираясь на утверждения (17.15) и (17.16), легко доказать, что

(17.17) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} ((A \supset F) \supset F)$.

(17.18) Неверно, что $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$ (допущение).

В свете утверждения (17.18) ясно, что (17.19) $A \notin \boldsymbol{M}$.

(17.20) Если $A \notin \boldsymbol{M}$, то $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A \supset F)$ (из (13) и (17.1)).

(17.21) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A \supset F)$ (из (17.19) и (17.20)).

Опираясь на утверждение (17.17) и (17.21), легко доказать, что (17.22) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$.

Утверждение (17.22) противоречит утверждению (12).

Следовательно, неверно допущение (17.18).

Но тогда (17.23) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$.

(17.24) Если $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$, то $A \in \boldsymbol{M}$ (из (14) и (17.1)).

(17.25) $A \in \boldsymbol{M}$ (из (17.23) и (17.24)).

Утверждение (17.25) противоречит утверждению (17.12).

Следовательно, неверно допущение (17.13).

Но тогда (17.26) $(A \supset B) \in \boldsymbol{M}$.

Снимая допущение (17.12), получаем, что (17.27) если $A \notin \boldsymbol{M}$, то $(A \supset B) \in \boldsymbol{M}$.

(17.28) $B \in \boldsymbol{M}$ (допущение).

В свете утверждения (17.28) ясно, что (17.29) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} B$.

Опираясь на то, что $(B \supset (A \supset B))$ является аксиомой исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$, легко доказать, что

(17.30) если $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} B$, то $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A \supset B)$.

(17.31)$\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A \supset B)$ (из (17.29) и (17.30)). Поскольку $(A \supset B)$ есть L-формула, то в силу утверждения (14) верно, что

(17.32) если$\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A \supset B)$, то $(A \supset B) \in \boldsymbol{M}$.

(17.33) $(A \supset B) \in \boldsymbol{M}$ (из (17.31) и (17.32)).

Снимая допущение (17.28), получаем, что

(17.34) если $B \in \boldsymbol{M}$, то $(A \supset B) \in \boldsymbol{M}$.

(17.35) Если $A \notin \mathbf{M}$ или $B \in \boldsymbol{M}$, то $(A \supset B) \in \boldsymbol{M}$ (и (17.27) и (17.34)).

(17.36) $(A \supset B) \in \boldsymbol{M}$ тогда и только тогда, когда $A \notin \mathbf{M}$ или $B \in \boldsymbol{M}$ (из (17.11) и (17.35)).

Снимая допущение (17.1) и обобщая, получаем, что для всяких L-формул A и B верно следующее: (A $\supset$ B) $\in$ $\boldsymbol{M}$ тогда и только тогда, когда A $\notin$ $\mathbf{M}$ или B $\in$ $\boldsymbol{M}$.

Утверждение (17) доказано.

(18) Для всякой квазиэлементарной L-формулы Q: если h(Q) $\geq \alpha$ и Q $\in$ $\boldsymbol{M}$, то ($\neg$Q) $\notin$ $\boldsymbol{M}$.

Докажем утверждение (18).

(18.1) Q есть квазиэлементарная L-формула (допущение).

(18.2) $h(Q) \geq \alpha$ и $Q \in \boldsymbol{M}$ (допущение).

(18.3) $(\neg Q) \in \boldsymbol{M}$ (допущение).

(18.4) $Q \in \boldsymbol{M}$ (из (18.2)).

В свете утверждений (18.2) и (18.4) очевидны утверждения (18.5) и (18.6).

(18.5) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (\neg Q)$.

(18.6) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} Q$.

(18.7) $h(Q) \geq \alpha$ (из (18.2)).

Используя утверждение (18.7), получаем, что

(18.8) неверно, что $h(Q) < \alpha$.

(18.9) Неверно, что Q есть квазиэлементарная L-формула и $h(Q) < \alpha$ (из (18.8)).

(18.10) Q не есть квазиэлементарная L-формула длины $< \alpha$ (из (18.9)).

Разумеется, (18.11) $Q, F, ((\neg Q) \supset (Q \supset F))$ являются L-формулами.

Опираясь на утверждения (18.10), (18.11) и описание множества всех аксиом исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$, получаем , что

(18.12) $((\neg Q) \supset (Q \supset F))$ есть аксиома исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$.

Используя утверждения (18.5), (18.6) и (18.12), легко показать что

(18.13) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$.

Снимая допущение (18.3), получаем, что

(18.14) если $(\neg Q) \in \boldsymbol{M}$, то $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$.

(18.15) Неверно, что $(\neg Q) \in \boldsymbol{M}$ (из (12) и (18.14)).

Снимая допущение (18.1) и (18.2) и обобщая, получаем, что для всякой квазиэлементарной L-формулы Q: если h(Q) $\geq \alpha$ и Q $\in$ $\boldsymbol{M}$, то ($\neg$Q) $\notin$ $\boldsymbol{M}$.

Утверждение (18) доказано.

(19) Для всякой квазиэлементарной L-формулы Q: если h(Q) $\geq \beta$ и Q $\notin$ $\boldsymbol{M}$, то ($\neg$Q) $\in$ $\boldsymbol{M}$.

Докажем утверждение (19).

(19.1) Q есть квазиэлементарная L-формула (допущение).

(19.2) $h(Q) \geq \beta$ и $Q \notin \boldsymbol{M}$ (допущение).

(19.3) $(\neg Q) \notin \boldsymbol{M}$ (допущение).

(19.4) $Q \notin \boldsymbol{M}$ (из (19,2)).

Разумеется, (19.5) Q и $(\neg Q)$ являются L-формулами.

В свете утверждений (13), (19.3), (19.4) и (19.5) очевидны утверждения (19.6) и (19.7).

(19.6) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} ((\neg Q) \supset F)$.

(19.7) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (Q \supset F)$.

(19.8) $h(Q) \geq \beta$ (из (19.2)).

Используя утверждение (19.8), получаем,что (19.9) неверно, что $h(Q) < \beta$.

(19.10) Неверно,что Q есть квазиэлементарная L-формула и $h(Q) \geq \beta$ (из (19.9)).

(19.11) Q не есть квазиэлементарная L-формула длины $< \beta$ (из (18.10)).

Можно доказать ,что

(19.12) для всякой L-формулы А: если А не есть квазиэлементарная L-формула длины $< \beta$, то $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ (A$\vee$($\neg$A)).

(19.13) Если Q не есть квазиэлементарная L-формула длины $< \beta$, то $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (Q \vee (\neg Q))$ (из (19.5) и (19.12)).

(19.14) $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (Q \vee (\neg Q))$ (из (19.11) и (19.13)).

Очевидно, что (19.15) $((Q \supset F) \supset (((\neg Q) \supset F) \supset ((Q \vee (\neg Q)) \supset F)))$ есть аксиома исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$.

Опираясь на утверждения (19.6), (19.7), (19.13) и (19.15), легко показать ,что

(19.16) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$.

Снимая допущение (19.3), получаем, что

(19.17) если $(\neg Q) \notin \boldsymbol{M}$, то $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$.

(19.18) ($\neg$Q) $\in \boldsymbol{M}$ (из (2) и (19.17)).

Снимая допущения (19.1) и (19.2) и обобщая, получаем, что для всякой квазиэлементарной L-формулы Q: h(Q) $\geq \beta$ и Q $\notin \boldsymbol{M}$, то ($\neg$Q) $\in \boldsymbol{M}$.

Утверждение (19) доказано.

(20) Для всякой L-формулы А, не являющейся квазиэлементарной L-формулой: ($\neg$А) $\in \boldsymbol{M}$ тогда и только тогда, когда А $\notin \boldsymbol{M}$.

Докажем утверждение (20).

(20.1) A есть L-формула, не являющаяся квазиэлементарной L-формулой (допущение).

(20.2) $(\neg A) \in \boldsymbol{M}$ (допущение).

(20.3) $A \in \boldsymbol{M}$ (допущение).

В свете утверждений (20.2) и (20.3) очевидны утверждения (20.4) и (20.5).

(20.4) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (\neg A)$.

(20.5) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$.

(20.6) A не есть квазиэлементарная L-формула длины $< \beta$ (из (20.1)).

Разумеется, (20.7) A, F и $((\neg A) \supset (A \supset F))$ являются L-формулами.

Опираясь на утверждения (20.6), (20.7)) и описание множества всех аксиом исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$, получаем,что

(20.8) $((\neg A) \supset (A \supset F))$ есть аксиома исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$.

Используя утверждения (20.4), (20.5) и ((20.8), легко показать,что

(20.9) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$.

Снимая допущения (20.3), получаем, что

(20.10) если $A \in \boldsymbol{M}$, то $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$.

(20.11) $(\neg A) \in \boldsymbol{M}$ (из (12) и (20.10)).

Снимая допущения (20.2), получаем, что

(20.12) если $(\neg A) \in \boldsymbol{M}$, то $A \notin \boldsymbol{M}$.

(20.13) $A \notin \boldsymbol{M}$ (допущение).

(20.14) $(\neg A) \notin \boldsymbol{M}$ (допущение).

Разумеется, (20.15) A и $(\neg \mathrm{A})$ являются L-формулами.

В свете утверждений (13), (20.13), (20.14) и (20.15) очевидны утверждения (20.16) и (20.17).

(20.16) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} ((\neg A) \supset F))$.

(20.17) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A \supset F)$.

Можно доказать, что (20.18) для всякой L-формулы A, не являющейся квазиэлементарной L-формулой длины $< \beta, \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (\mathrm{A} \vee (\neg \mathrm{A}))$.

(20.19) A не является квазиэлементарной L-формулой длины $< \beta$ (из (20.1)).

(20.20) $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (\mathrm{A} \vee (\neg \mathrm{A}))$(из (20.15), (20.18) и (29.19)).

Очевидно, что (20.21) $((A \supset F) \supset (((\neg A) \supset F) \supset ((A \vee (\neg A)) \supset F)))$ есть аксиома исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$.

Опираясь на утверждения (20.16), (20.17), (20.20) и (20.21), легко показать,что (20.22) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$.

Снимая допущение (20.14), получаем, что

(20.23) если $(\neg A) \notin \boldsymbol{M}$, то $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$.

(20.24) $(\neg A) \in \boldsymbol{M}$ (из (12) и (20.23)).

Снимая допущение (20.13), получаем, что

(20.25) если $A \notin \boldsymbol{M}$, то $(\neg A) \in \boldsymbol{M}$.

(20.26) $(\neg A) \in \boldsymbol{M}$ тогда и только тогда, когда A$\notin$ $\boldsymbol{M}$ (из (20.12) и (20.25)).

Снимая допущения (20.1) и обобщая, получаем, что для всякой L-формулы A, не являющейся квазиэлементарной L-формулой: $(\neg\mathrm{A}) \in \boldsymbol{M}$ тогда и только тогда, когда A $\notin \boldsymbol{M}$.

Утверждение (20) доказано.

Опираясь на утверждения (15), (16), (17), (18), (19), и (20) и определение $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочного множества, получаем, что $\boldsymbol{M}$ есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочное множество. Являясь максимальным элементом в частично упорядоченном множестве $\langle U, \subseteq_U\rangle$, $\boldsymbol{M}$ выполняет условие: $M \subseteq \boldsymbol{M}$ и неверно, что $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$. Таким образом, доказано, что (22) существует такое $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочное множество K, что $M \subseteq$ K и при этом неверно, что K $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$.

Снимая допущения (1) и (2) и обобщая, получаем, что для всякого множества M L-формул и для всякой L-формулы F: если неверно, что M $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ F, то существует такое $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочное множество K,что M $\subseteq$ K и при этом неверно, что K $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ F.

Лемма 5 доказана. □

Лемма 6. *Для всякого $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочного множества* K *существует такая $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценка* v, *что для всякой L-формулы* A*:* $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle\alpha,\beta\rangle}(A) = 1$ *тогда и только тогда, когда* A $\in$ K.

Доказательство.

(1) $\boldsymbol{K}$ есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочное множество (допущение).

Условимся, что (2) $\mathrm{v}_{\boldsymbol{K}}$ есть множество всех таких упорядоченных пар $\langle$x, y$\rangle$, что выполняются следующие условия: (1) x есть квазиэлементарная L-формула длины $\leq \max(\alpha,\beta)$, (2) y $\in$ {0,1}, (3) y=1 тогда и только тогда, когда x $\in \boldsymbol{K}$.

Очевидны следующие утверждения (3) и (4).

(3) $v_{\boldsymbol{K}}$ является $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценкой.

(4) $\Phi_{v_{\boldsymbol{K}}}^{\langle\alpha,\beta\rangle}$ есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивание при $v_{\boldsymbol{K}}$.

(5) Для всякой L-формулы A: $\Phi_{v_{\boldsymbol{K}}}^{\langle\alpha,\beta\rangle}(\mathrm{A}) = 1$ тогда и только тогда, когда A $\in \boldsymbol{K}$.

Докажем утверждение (5), используя индукцию по построению L-формулы. Для этого достаточно доказать следующие утверждения (5.1), (5.2), (5.3), (5.4) и (5.5).

(5.1) Для всякой пропозициональной переменной q языка L: $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(\mathrm{q}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{q} \in \boldsymbol{K}$.

(5.2) Для всяких L-формул B и C: если ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(\mathrm{B}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{B} \in \boldsymbol{K}$) и ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(\mathrm{C}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{C} \in \boldsymbol{K}$), то ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\mathrm{B}\&\mathrm{C})) = 1$ тогда и только тогда, когда $(\mathrm{B}\&\mathrm{C}) \in \boldsymbol{K}$).

(5.3) Для всяких L-формул B и C: если ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(\mathrm{B}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{B} \in \boldsymbol{K}$) и ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(\mathrm{C}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{C} \in \boldsymbol{K}$), то ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\mathrm{B}\vee\mathrm{C})) = 1$ тогда и только тогда, когда $(\mathrm{B}\vee\mathrm{C}) \in \boldsymbol{K}$).

(5.4) Для всяких L-формул B и C: если ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(\mathrm{B}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{B} \in \boldsymbol{K}$) и $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(\mathrm{C}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{C} \in \boldsymbol{K}$), то ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\mathrm{B}\supset\mathrm{C})) = 1$ тогда и только тогда, когда $(\mathrm{B}\supset\mathrm{C}) \in \boldsymbol{K}$).

(5.5) Для всякой L-формулы B: если ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(\mathrm{B}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{B} \in \boldsymbol{K}$), то ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\neg\mathrm{B})) = 1$ тогда и только тогда, когда $(\neg\mathrm{B}) \in \boldsymbol{K}$).

Докажем утверждение (5.1).

(5.1.1) q есть пропозициональная переменная языка L (допущение).

Очевидно следующее утверждение (5.1.2).

(5.1.2) q есть квазиэлементарная L-формула, длина которой $\leq \max(\alpha, \beta)$.

(5.1.3) $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(q) =_{V\boldsymbol{K}} (q)$ (из (4) и (5.1.2), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(5.1.4) $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(q) = 1$(допущение).

(5.1.5) ${}_{V\boldsymbol{K}}(q) = 1$(из 5.1.3) и (5.1.4)).

(5.1.6) $q \in \boldsymbol{K}$ (из (2), (5.1.2) и (5.1.5)).

Снимая допущение (5.1.4), получаем, что

(5.1.7) если $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(q) = 1$, то $q \in \boldsymbol{K}$.

(5.1.8) $q \in \boldsymbol{K}$ (допущение).

(5.1.9) ${}_{V\boldsymbol{K}}(q) = 1$(из (2), (5.1.2) и (5.1.8)).

(5.1.10)$\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(q) = 1$ (из (5.1.3) и (5.1.9)).

Снимая допущение (5.1.8), получаем, что

(5.1.11) если $q \in \boldsymbol{K}$, то $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(q) = 1$.

(5.1.12) $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(q) = 1$ тогда и только тогда, когда $q \in \boldsymbol{K}$ (из (5.1.7) и (5.1.11)).

Снимая допущение (5.1.1) и обобщая, получаем, что для всякой пропозициональной переменной q языка L: $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(\mathrm{q}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{q} \in \boldsymbol{K}$.

Утверждение (5.1) доказано.

Докажем утверждение (5.2).

(5.2.1) B и C являются L-формулами (допущение).

(5.2.2) $(\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(B) = 1$ тогда и только тогда, когда $B \in \boldsymbol{K})$ и $(\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(C) = 1$ тогда и только тогда, когда $C \in \boldsymbol{K})$ (допущение).

(5.2.3) $(\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((B\&C)) = 1$ тогда и только тогда, когда $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(B) = 1$ и $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(C) = 1$ (из (3), (4) и (5.2.1), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(5.2.4) $(B\&C) \in \boldsymbol{K}$ тогда и только тогда, когда $B \in \boldsymbol{K}$ и $C \in \boldsymbol{K}$(из (1) и (5.2.1), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочного множества).

(5.2.5) $(\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((B\&C)) = 1$ тогда и только тогда, когда $(B\&C) \in \boldsymbol{K}$ (из (5.2.2), (5.2.3) и (5.2.4)).

Снимая допущения (5.2.1) и (5.2.2) и обобщая, получаем, что для всяких L-формул B и C: если $(\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(\mathrm{B}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{B} \in \boldsymbol{K})$ и $(\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(\mathrm{C}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{C} \in \boldsymbol{K})$, то $(\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\mathrm{B}\&\mathrm{C})) = 1$ тогда и только тогда, когда $(\mathrm{B}\&\mathrm{C}) \in \boldsymbol{K})$.

Утверждение (5.2) доказано.

Докажем утверждение (5.3).

(5.3.1) B и C являются L-формулами (допущение).

(5.3.2) $(\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(B) = 1$ тогда и только тогда, когда $B \in \boldsymbol{K})$ и $(\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(C) = 1$ тогда и только тогда, когда $C \in \boldsymbol{K})$ (допущение).

(5.3.3) $(\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((B \vee C)) = 1$ тогда и только тогда, когда $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(B) = 1$ или $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(C) = 1$ (из (3), (4) и (5.3.1), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(5.3.4) $(B \vee C) \in \boldsymbol{K}$ тогда и только тогда, когда $B \in \boldsymbol{K}$ или $C \in \boldsymbol{K}$ (из (1) и (5.3.1), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочного множества).

(5.3.5) $(\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((B \vee C)) = 1$ тогда и только тогда, когда $(B \vee C) \in \boldsymbol{K}$ (из (5.3.2), (5.3.3) и (5.3.4)).

Снимая допущения (5.3.1) и (5.3.2) и обобщая, получаем, что для всяких L-формул B и C: если $(\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(\mathrm{B}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{B} \in \boldsymbol{K})$ и $(\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(\mathrm{C}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{C} \in \boldsymbol{K})$, то $(\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\mathrm{B}\vee\mathrm{C})) = 1$ тогда и только тогда, когда $(\mathrm{B}\vee\mathrm{C}) \in \boldsymbol{K})$.

Утверждение (5.3) доказано.

Докажем утверждение (5.4).

(5.4.1) B и C являются L-формулами (допущение).

(5.4.2) ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(B) = 1$ тогда и только тогда, когда $B \in \mathbf{K}$) и ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(C) = 1$ тогда и только тогда, когда $C \in \boldsymbol{K}$) (допущение).

(5.4.3) ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((B \supset C)) = 1$ тогда и только тогда, когда $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(B) = 0$ или $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(C) = 1$ (из (3), (4) и (5.4.1), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(5.4.4) $(B \supset C) \in \boldsymbol{K}$ тогда и только тогда, когда $B \notin \boldsymbol{K}$ или $C \in \boldsymbol{K}$ (из (1) и (5.4.1), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочного множества).

(5.4.5) ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((B \supset C)) = 1$ тогда и только тогда, когда $(B \supset C) \in \boldsymbol{K}$ (из (5.4.2), (5.4.3) и (5.4.4)).

Снимая допущения (5.4.1) и (5.4.2) и обобщая, получаем, что для всяких L-формул B и C: если ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(\mathrm{B}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{B} \in \boldsymbol{K}$) и ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(\mathrm{C}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{C} \in \boldsymbol{K}$), то $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\mathrm{B}\supset\mathrm{C})) = 1$ тогда и только тогда, когда $(\mathrm{B}\supset\mathrm{C}) \in \boldsymbol{K}$).

Утверждение (5.4) доказано.

Докажем утверждение (5.5).

(5.5.1) B есть L-формула (допущение).

(5.5.2) $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(B) = 1$ тогда и только тогда, когда $B \in \boldsymbol{K}$ (допущение).

Очевидно, что (5.5.3) если $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(B) = 0$, то неверно, что $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(B) = 1$.

(5.5.4) $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}$ есть отображение в $\{0, 1\}$ (из (3) и (4), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

В свете утверждения (5.5.4) ясно, что

(5.5.5) если неверно, что $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(B) = 1$, то $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(B) = 0$.

(5.5.6) Неверно, что $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(B) = 1$ тогда и только тогда, когда $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(B) = 0$ (из (5.5.3) и (5.5.5)).

(5.5.7) B не есть квазиэлементарная L-формула (допущение).

(5.5.8) ${}^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) = 1$ тогда и только тогда, когда $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}\ (B) = 0$ (из (3), (4), (5.5.1), (5.5.7), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(5.5.9) $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) = 1$ тогда и только тогда, когда неверно, что $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(B) = 1$ (из (5.5.6) и (5.5.8)).

(5.5.10) $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) = 1$ тогда и только тогда, когда $B \notin \boldsymbol{K}$ (из (5.5.2) и (5.5.9)).

(5.5.11) $(\neg B) \in \boldsymbol{K}$ тогда и только тогда, когда $B \notin \boldsymbol{K}$ (из (1), (5.5.1) и (5.5.7), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочного множества).

(5.5.12) $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) = 1$ тогда и только тогда, когда $(\neg B) \in \boldsymbol{K}$ (из (5.5.10) и (5.5.11)).

Снимая допущение (5.5.7), получаем, что

(5.5.13) если B не есть квазиэлементарная L-формула, то $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) = 1$ тогда и только тогда, когда $(\neg B) \in \boldsymbol{K}$.

(5.5.14) B есть квазиэлементарная L-формула (допущение).

Разумеется, что (5.5.15) $(\neg B)$ есть квазиэлементарная L-формула (допущение).

Ясно, что (5.5.16) $h(B) < max(\alpha,\beta)$ или $h(B) \geq max(\alpha,\beta)$.

(5.5.17) $h(B) < max(\alpha,\beta)$ (допущение).

Тогда очевидно, что (5.5.18) $h((\neg B)) \leq max(\alpha,\beta)$.

(5.5.19)$\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) =_{V\boldsymbol{K}} ((\neg B))$ (из (3), (4), (5.5.15) и (5.5.18), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(5.5.20) $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((B)) = 1$ (допущение).

(5.5.21) $_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) = 1$ (из (5.5.19) и (5.5.20)).

(5.5.22) $(\neg B) \in \boldsymbol{K}$ (из (2), (5.5.15), (5.5.18) и (5.5.21)).

Снимая допущение (5.5.20), получаем, что

(5.5.23) если $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) = 1$, то $(\neg B) \in \boldsymbol{K}$.

(5.5.24) $(\neg B) \in \boldsymbol{K}$ (допущение).

(5.5.25) $_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) = 1$(из (2), (5.5.15), (5.5.18) и (5.5.24)).

(5.5.26) $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) = 1$ (из (5.5.19) и (5.5.25)).

Снимая допущение (5.5.24), получаем, что

(5.5.27) если $(\neg B) \in \boldsymbol{K}$, то $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) = 1$.

(5.5.28) $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) = 1$ тогда и только тогда, когда $(\neg B) \in \boldsymbol{K}$ (из (5.5.23) и (5.5.27)).

Снимая допущение (5.5.17), получаем, что

(5.5.29) если $h(B) < max(\alpha,\beta)$, то $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) = 1$ тогда и только тогда, когда $(\neg B) \in \boldsymbol{K}$.

(5.5.30) $h(B) \geq max(\alpha,\beta)$ (допущение).

(5.5.31) $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) = 1$ тогда и только тогда, когда $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(B) = 0$ (из (3), (4), (5.5.14) и (5.5.30), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(5.5.32)$\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) = 1$ тогда и только тогда, когда $B \notin \boldsymbol{K}$ (из (5.5.2), (5.5.6) и (5.5.31)).

(5.5.33) $(\neg B) \in \boldsymbol{K}$ тогда и только тогда, когда $B \notin \boldsymbol{K}$ (из (1), (5.5.14) и (5.5.30), по лемме 1).

(5.5.34) $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) = 1$ тогда и только тогда, когда $(\neg B) \in \boldsymbol{K}$ (из (5.5.32) и (5.5.33)).

Снимая допущение (5.5.30), получаем, что

(5.5.35) если $h(B) \geq max(\alpha, \beta)$, то $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) = 1$ тогда и только тогда, когда $(\neg B) \in \boldsymbol{K}$.

(5.5.36) $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) = 1$ тогда и только тогда, когда $(\neg B) \in \boldsymbol{K}$ (из (5.5.16), (5.5.29) и (5.5.35)).

Снимая допущение (5.5.14), получаем, что

(5.5.37) если B есть квазиэлементарная L-формула, то $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) = 1$ тогда и только тогда, когда $(\neg B) \in \boldsymbol{K}$.

(5.5.38) $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) = 1$ тогда и только тогда, когда $(\neg B) \in \boldsymbol{K}$ (из (5.5.13) и (5.5.37)).

Снимая допущения (5.5.1) и (5.5.2) и обобщая, получаем, что для всякой L-формулы B: если $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(\mathrm{B}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{B} \in \mathbf{K}$, то $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) = 1$ тогда и только тогда, когда $(\neg B) \in \boldsymbol{K}$.

Утверждение (5.5) доказано.

Утверждение (5) доказано.

Опираясь на утверждения (3) и (5), получаем, что существует такая $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценка v, что для всякой L-формулы A: $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{\mathrm{v}}(\mathrm{A}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{A} \in \mathbf{K}$.

Снимая допущение (1) и обобщая, получаем, что для всякого $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочного множества K существует такая $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценка v, что для всякой L-формулы A: $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{\mathrm{v}}(\mathrm{A}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{A} \in \mathrm{K}$.

Лемма 6 доказана. □

Теперь докажем теорему 6 — обращение теоремы 5.

Теорема 6. *Для всякого множества* M *L-формул и для всякой L-формулы* A*: если* A *$I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-следует из* M*, то* $\mathrm{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} \mathrm{A}$.

Доказательство.

(1) M есть множество L-формул (допущение).

(2) A есть L-формула (допущение).

(3) A $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-следует из M (допущение).

(4) Неверно, что $M \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$ (допущение).

(5) Существует такое $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочное множество K, что $M \subseteq \mathrm{K}$ и при этом неверно, что $\mathrm{K} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$ (из (1), (2) и (4), по лемме 5).

Пусть (6) K есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочное множество, $M \subseteq K$ и при этом неверно, что $K \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$.

(7) K есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочное множество (из (6)).

(8) Существует такая $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценка v, что для всякой L-формулы A верно следующее: φ_{v}(A)=1 тогда и только тогда, когда A принадлежит множеству K (из (7), по лемме 6).

Пусть (9) w есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценка и для всякой L-формулы A верно следующее: φ_w(A)=1 тогда и только тогда, когда A принадлежит множеству K.

(10) $M \subseteq K$ (из (6)).

(11) Для всякой L-формулы A из M верно, что φ_w(A)=1 (из (9) и (10)).

Ясно, что (12) для всякого множества M L-формул и для всякой формулы A из M верно, что A $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-выводима из M.

(13) Неверно, что $K \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$ (из (6)).

(14) K есть множество L-формул (из (7), по определению $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочного множества).

(15) A не принадлежит множеству K (из (2), (12), (13) и (14)).

(16) Для всякой L-формулы A верно следующее: φ_w(A)=1 тогда и только тогда, когда A принадлежит множеству K (из (9)).

(17) Неверно, что $\varphi_w(A)$=1 (из (2), (15) и (16)).

(18) Для всякой $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценки v верно следующее: если для всякой L-формулы B из M φ_{v}(B)=1, то $\varphi_{\mathrm{v}}(A)$=1 (из (3), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-следования).

(19) w есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценка (из (9)).

(20) Если для всякой L-формулы B из K φ_w(B)=1, то $\varphi_w(A)$=1 (из (18) и (19)).

(21) $\varphi_w(A)$=1 (из (11) и (20)).

Утверждение (21) противоречит утверждению (17). Следовательно, неверно допущение (4). Итак, $M \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$. Завершаем доказательство теоремы 6, снимая допущения (1), (2) и (3) и обобщая. □

В свете теорем 5 и 6 очевидна следующая теорема 7.

Теорема 7. *Для всякого множества* M *L-формул и для всякой L-формулы* A*:* M $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ A *тогда и только тогда, когда* A $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$*-следует из M.*

Легко убедиться в справедливости следующих утверждений У1 и У2.

У1. Для всякой L-формулы A: $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$A тогда и только тогда, когда существует $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-вывод из пустого множества L-формулы A.

У2. Для всякой L-формулы A: A есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимая L-формула тогда и только тогда, когда A $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-следует из пустого множества.

Используя теорему 7 и утверждения У1 и У2, получаем следующую теорему 8.

Теорема 8. *Для всякой L-формулы* A*:* $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ A *тогда и только тогда, когда* A *есть* $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$*-общезначимая L-формула.*

Опираясь на теорему 8 и соглашение об использовании «$I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$», убеждаемся, что верна следующая теорема 9 об адекватности построенной здесь семантики логике $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$.

Теорема 9. *Для всякой L-формулы* A*:* A $\in I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ *тогда и только тогда, когда* A *есть* $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$*-общезначимая L-формула.*

Автор планирует опубликовать продолжение этой статьи, в котором будут даны доказательство табличности любой такой I-логики $I_{\langle x,y\rangle}$ васильевского типа, что $x \neq \omega$ и $y \neq \omega$, и доказательство нетабличности любой такой I-логики $I_{\langle x,y\rangle}$ васильевского типа, что $x = \omega$ или $y = \omega$.

Литература

[1] *Васильев Н.А.* Воображаемая (неаристотелева) логика // Н.А.Васильев Воображаемая логика. Избранные труды. М.: Наука. 1989. С. 53–94

[2] *Генцен Г.* Исследование логических выводов // Математическая теория логического вывода. М., 1967. С. 9–74.

[3] *Ершов Ю.Л., Палютин Е.А.* Математическая логика. М., 1979.

[4] *Попов В.М.* Две последовательности простых паранормальных логик // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. Материалы IX Общероссийской научной конференции 22–24 июня 2006 г. СПб., 2006. С. 382–385.

[5] *Попов В.М.* Интервалы простых паралогик // Смирновские чтеиия по логике. Материалы 5-й конференции 20–22 июня 2007, Москва, 2007. С. 35–37.

[6] *Попов В.М.* Две последовательности простых паранепротиворечивых логик // Логические исследования. М.: Наука, 2007. Вып. 14. С. 257–261.

[7] *Попов В.М.* Две последовательности простых параполных логик//Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. Материалы X-й научной конференции 26–28 июня 2008 г. СПб., 2008. С. 304–306.

[8] *Попов В.М.* Некоторые интервалы между простыми паралогиками // Логические исследования. М.: Наука. Вып. 15. 2009. С. 182–184.

[9] *Попов В.М.* Секвенциальные аксиоматизации простых паралогик // Логические исследования. М.: Наука. Вып. 16. 2010. С. 205–220.

[10] *Попов В.М.* Семантическая характеризация паранепротиворечивых логик $I_{1,1}, I_{1,2}, I_{1,3} \dots$ // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. Материалы XI-й научной конференции 2010 г. СПб., 2010. С. 366–368.

[11] *Попов В.М.* Семантическая характеризация параполных логик $I_{1,1}, I_{1,2}, I_{1,3} \dots$ // Логика, методология, науковедение: актуальные проблемы и перспективы. Сборник докладов и тезисов всероссийской научной конференции. Ростов-на-Дону, Из-во Южного федерального университета. 2010. С. 114–116.

[12] *Попов В.М.* Секвенциальная аксиоматизация логики $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ // Восьмые смирновские чтения: материалы Международной научной конференции, Москва, 19–21 июня 2013г. М.: Современные тетради, 2013. С. 27–29.

[13] *Попов В.М.* Об одном обобщении теоремы Гливенко // Логические исследования. 2015. Том 21. № 1. С. 100–121.

[14] *Смирнов В.А.* Формальный вывод и логические исчисления // Теория логического вывода. М., 1999. С.16–233.

[15] *Arruda A.I.* On the imaginary logic of N.A.Vasil'ev // Proceedings of Fourth Latin-American Symposium on Mathematical Logic. North-Holland, 1979. P. 1–41.

V.M. Popov

Sequent Axiomatization and Semantics of I-logics of Vasiliev's Type

Popov Vladimir Mikhailovich
Department of Logic, Faculty of Philosophy, Lomonosov Moscow State University
Lomonosovsky prospect, 27–4, GSP-1, Moscow, 119991, Russian Federation.
E-mail: `pphiloslog@mail.ru`

I study here logics of Vasiliev's type were found in the process of explication of some of the ideas of the Russian logician and philosopher Nikolai Alexandrovich Vasiliev underlying his "imaginary logic". This article demonstrates how to construct a simple and convenient search for proof of sequent axiomatization of I-logics of Vasiliev's type and how to build intuitively clear two-valued semantics, adequate I-logics of Vasiliev's type. In the present paper are defined by I-logics of Vasiliev's type, built their sequent axiomatization, provides the necessary semantic definitions and prove a theorem about the justification of $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-proofs (theorem 5) and theorem about the completeness of $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-proofs (theorem 6). The work concludes with a number of corollaries of these theorems and the announcement of a solution to the problem of existence of finite characteristic matrix for the logics of Vasiliev's type.

Keywords: I-logic of Vasiliev's type, sequent axiomatization of I-logics of Vasiliev's type, semantics of I-logics of Vasiliev's type

References

[1] Vasiliev, N.A. "Voobrazhaemaya (nearistoteleva) logika" [Imaginary (aaristotelous) logic], *N.A. Vasil'ev Voobrazhaemaya logika. Izbrannye trudy* [A.Vasiliev Imaginary logic. Selected works]. M.: Nauka. 1989. pp. 53–94. (In Russian)

[2] Gentzen, G. "Issledovanie logicheskikh vyvodov" [The Study of logical inference], *Matematicheskaya teoriya logicheskogo vyvoda* [Mathematical theory of logical inference]. M., 1967. pp. 9–74. (In Russian)

[3] Ershov, Yu.L., Palyutin, E. A. *Matematicheskaya logika* [Mathematical logic]. M., 1979. (In Russian)

[4] Popov, V.M. "Dve posledovatel'nosti prostykh paranormal'nykh logik" [Two sequences of simple paranormal logics], *Sovremennaya logika: problemy teorii, istorii i primeneniya v nauke* [Modern logic: problems of theory, history and application in science]. Materials of IX all-Russian scientific conference, 22–24 June 2006 - St. Petersburg, 2006. pp. 382–385. (In Russian)

[5] Popov, V.M. "Intervaly prostykh paralogik" [Intervals simple paralogic], *Smirnovskie chteiiya po logike* [Smirnov, caiia logically]. Materials of the 5th conference on June 20–22, 2007, Moscow, 2007. pp. 35–37. (In Russian)

[6] Popov, V.M. "Dve posledovatel'nosti prostykh paraneprotivorechivykh logik" [Two sequences of simple paraconsistent logics], *Logicheskie issledovaniya* [Logical investigations], M.: Nauka. Vol. 14. 2007. pp. 257–261. (In Russian)

[7] Popov, V. M. "Dve posledovatel'nosti prostykh parapolnykh logik" [Two sequence of simple parabolic logic], *Sovremennaya logika: problemy teorii, istorii i primeneniya v nauke* [Modern logic: problems of theory, history and application in science]. Materials of the X-th scientific conference June 26–28, 2008 — St. Petersburg, 2008. pp. 304–306. (In Russian)

[8] Popov, V.M. "Nekotorye intervaly mezhdu prostymi paralogikami" [Some intervals between simple paralogical], *Logicheskie issledovaniya* [Logical investigations], Mю: Nauka. Vol. 15. 2009. pp. 182–184. (In Russian)

[9] Popov, V.M. "Sekventsial'nye aksiomatizatsii prostykh paralogik" [Sequential axiomatization of simple paralogic], *Logicheskie issledovaniya* [Logical investigations], Moscow, Nauka. Vol. 16. 2010. pp. 205–220. (In Russian)

[10] Popov, V.M. "Semanticheskaya kharakterizatsiya paraneprotivorechivykh logik $I_{1,1}, I_{1,2}, I_{1,3}\ldots$" [Semantical characterization of paraconsistent logics $I_{1,1}, I_{1,2}, I_{1,3}\ldots$], *Sovremennaya logika: problemy teorii, istorii i primeneniya v nauke* [Modern logic: problems of theory, history and application in science]. Proceedings of XI-th scientific conference 2010 — St. Petersburg, 2010. pp. 366–368. (In Russian)

[11] Popov, V.M. "Semanticheskaya kharakterizatsiya parapolnykh logik $I_{1,1}, I_{1,2}, I_{1,3}\ldots$" [Semantical characterization of paracomplete logics $I_{1,1}, I_{1,2}, I_{1,3}\ldots$], *Logika, metodologiya, naukovedenie: aktual'nye problemy i perspektivy* [Logic, methodology, science of science: current problems and prospects]. A collection of reports and abstracts of all-Russian scientific conference. Rostov-on-don: in southern Federal University, 2010. pp. 114–116. (In Russian)

[12] Popov, V.M. "Sekventsial'naya aksiomatizatsiya logiki $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$" [Sequential axiomatization of the logic $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$], *Vos'mye smirnovskie chteniya* [The Eighth Smirnov's readings] materials of International scientific conference, Moscow, 19–21 June 2013. M.: Modern notebooks, 2013.With. 27–29. (In Russian)

[13] Popov, V.M. "Ob odnom obobshchenii teoremy Glivenko" [On a generalization of a theorem of Glivenko] // *Logicheskie issledovaniya* [Logical investigations]. M.: Nauka. Vol. 21(1). 2015. pp. 100–121. (In Russian)

[14] Smirnov, V.A. "Formal'nyi vyvod i logicheskie ischisleniya" [Formal inference and logical calculi], *Teoriya logicheskogo vyvoda* [The Theory of logical inference]. M., 1999. pp. 16–233. (In Russian)

[15] Arruda, A.I. "On the imaginary logic of N. A. Vasiliev", *Proceedings of Fourth Latin-American Symposium on Mathematical Logic.* North-Holland, 1979. pp. 1–41.

Логические исследования
2016. Т. 22. № 1. С. 70–81
УДК 162.2+510.645.3

Logical Investigations
2016, vol. 22, no 1, pp. 70–81

В.И. Маркин

Интерпретация категорических высказываний в терминах релевантного следования

Маркин Владимир Ильич
Кафедра логики, философский факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.
119991, Российская Федерация, Москва, ГСП-1,
Ломоносовский проспект, д. 27, корп. 4.
E-mail: vladimirmarkin@mail.ru

В статье формулируется нестандартная семантика языка позитивной силлогистики, в которой значимость элементарных формул (форм категорических высказываний) определяется в терминах релевантного следования. Эта идея реализуется в рамках предложенного В.И. Шалаком [3] подхода к построению семантики силлогистики: субъектам и предикатам категорических высказываний сопоставляются в качестве значений формулы языка пропозициональной логики, а определение значимости силлогистических формул использует отношение классической выводимости. В данной работе это отношение заменяется на отношение следования в релевантной логике **FDE**. Интерпретационная функция δ ставит в соответствие каждому общему термину некоторую формулу пропозиционального языка с исходными связками $\neg$, $\wedge$ и $\vee$. Постулируются следующие условия значимости формул силлогистики при интерпретации δ: SaP значима, е.т.е. из $\delta(S)$ релевантно следует $\delta(P)$; SeP значима, е.т.е. из $\delta(S)$ релевантно следует $\neg\delta(P)$; SiP значима, е.т.е. из $\delta(S)$ не следует релевантно $\neg\delta(P)$; SoP значима, е.т.е. из $\delta(S)$ не следует релевантно $\delta(P)$; для сложных формул стандартные. Силлогистическое исчисление, формализующее класс общезначимых формул, содержит следующие постулаты: классические тавтологии, схемы аксиом $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$, $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$, $SeP \supset PeS$, SaS, $SiP \equiv \neg SeP$, $SoP \equiv \neg SaP$, единственное правило вывода — *modus ponens*. Доказываются метатеоремы о семантической непротиворечивости и полноте данного исчисления относительно «релевантизированной» семантики.

Ключевые слова: силлогистика, категорические высказывания, релевантное следование, семантика, исчисление, метатеорема о непротиворечивости, метатеорема о полноте

Идею построения релевантных аналогов для различных логических систем выдвигал и активно поддерживал Е.К. Войшвилло. Он рассматривал релевантную логику не как *раздел* современной логики, а как ее новый *этап* и ставил задачу построения теории непарадоксального, релевантного следования не только применительно к системам классической логики, но и для неклассических логических теорий. Впечатляющие результаты в этом направлении были получены, например, Я.В. Шрамко [4] относительно интуиционистской логики.

Вопрос о «релевантизации» систем силлогистики тоже, как говорится, витал в воздухе. Но в чем эта «релевантизация» должна была заключаться? Силлогистические исчисления после известной работы Я. Лукасевича [5] формулируются обычно как надстройка над классическим исчислением высказываний. Для формул такого языка можно, в принципе, определить непарадоксальное отношение следования, а в сам язык добавить синтаксический аналог данного отношения — релевантную импликацию. Такой подход имеет право на существование, но он, скорее всего, не даст сколько-нибудь интересных следствий для принципов и законов самой силлогистики. Собственно силлогистические аксиомы известных ее систем не вызывают особых сомнений и критики с позиций теории релевантного следования.

Другой возможный подход к решению данной задачи состоит в том, чтобы отношение релевантного следования использовалось при семантической трактовке самих элементарных формул языка силлогистики (форм категорических высказываний). Но для этого должна быть в корне изменена стандартная, экстенсиональная парадигма, доминирующая при построении семантик силлогистических исчислений. Идея «релевантизации» силлогистики, понимаемой в указанном выше ключе, может быть успешно реализована в рамках оригинального подхода к построению семантик для систем силлогистики, который был недавно предложен В.И. Шалаком [3]. Интерпретация силлогистических формул была названа им «синтаксической», поскольку возможными значениями субъектов и предикатов категорических высказываний в построенной им семантике являются не множества предметов, а формулы языка пропозициональной логики.

В.И. Шалак сформулировал адекватную «синтаксическую» интерпретацию для известной силлогистики **ФС** — исчисления, дедуктивно эквивалентного системе Дж. Шефердсона [6], **ФС** формализует позитивный фрагмент так называемой *фундаментальной силлогистики*. Ее дедуктивными постулатами являются схемы аксиом

A0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний,
A1. $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$, **A5**. $SiP \supset SiS$,
A2. $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$, **A6**. $SoP \supset SiS$,
A3. $SeP \supset PeS$, **A7**. $SiP \equiv \neg SeP$,
A4. SaS, **A8**. $SoP \equiv \neg SaP$,

и единственное правило вывода — *modus ponens*. Понятие доказательства обычное.

Для интерпретации языка **ФС** В.И. Шалак вводит функцию δ, которая сопоставляет каждому общему термину формулу языка классической логики высказываний, содержащего — в качестве исходных — связки $\neg$, $\wedge$ и $\vee$. Условия значимости атомарных формул силлогистического языка при некоторой интерпретации δ определяются так:

$\delta \models SaP$, е.т.е. $\delta(S) \vdash \delta(P)$,
$\delta \models SeP$, е.т.е. $\delta(S), \delta(P) \vdash \mathbf{f}$,
$\delta \models SiP$, е.т.е. $\delta(S), \delta(P) \nvdash \mathbf{f}$,
$\delta \models SoP$, е.т.е. $\delta(S) \nvdash \delta(P)$,

где «$\delta \models A$» означает, что силлогистическая формула A значима при интерпретации δ, «$\mathbf{f}$» — константа ложности, а «$\vdash$» — отношение классической выводимости на множестве пропозициональных формул. Условия значимости сложных формул языка силлогистики стандартные.

Заметим, что условия значимости для SeP и SiP могут быть эквивалентным образом переформулированы:

$\delta \models SeP$, е.т.е. $\delta(S) \vdash \neg\delta(P)$,
$\delta \models SiP$, е.т.е. $\delta(S) \nvdash \neg\delta(P)$.

Зададимся вопросом, останется ли данная «синтаксическая» интерпретация адекватной силлогистическому исчислению **ФС**, если в условиях значимости формул классическую выводимость заменить на *релевантную*, и если нет, то какая система силлогистики адекватно формализует «релевантизированную» указанным образом семантику.

В качестве релевантной выводимости уместно рассмотреть выводимость в известной релевантной системе **FDE** либо ее семантический аналог — отношение первоуровневого релевантного следования ($\vDash_{rel}$), задаваемого, например, в семантике обобщенных описаний состояний Е.К. Войшвилло [1, с. 23–28].

Определение интерпретационной функции δ не меняется: она сопоставляет каждому общему термину формулу языка классической логики высказываний, не содержащей иных связок, кроме $\neg$, $\wedge$ и $\vee$.

Условия значимости для элементарных силлогистических формул (при интерпретации δ) модифицируются следующим образом:

(I1) $\delta \models SaP$, е.т.е. $\delta(S) \vDash_{rel} \delta(P)$,
(I2) $\delta \models SeP$, е.т.е. $\delta(S) \vDash_{rel} \neg\delta(P)$,
(I3) $\delta \models SiP$, е.т.е. $\delta(S) \nvDash_{rel} \neg\delta(P)$,
(I4) $\delta \models SoP$, е.т.е. $\delta(S) \nvDash_{rel} \delta(P)$.

Условия значимости для сложных формул остаются классическими.

Формула A языка позитивной силлогистики называется общезначимой, если и только если $\delta \models A$ при любой интерпретации δ.

Некоторые аксиомы системы **ФС** общезначимы в «релевантизированной» семантике. Однако, **A5** и **A6** перестают быть схемами общезначимых формул.

Допустим, что $\delta(S) = q \wedge \neg q$, а $\delta(P) = r$. При выборе такого δ формула SiP значима (так как $q \wedge \neg q \nvDash_{rel} \neg r$), и формула SoP значима (так как $q \wedge \neg q \nvDash_{rel} r$), но формула SiS не является значимой, поскольку $q \wedge \neg q \vDash_{rel} q \wedge \neg q$. В силу этого, формулы $SiP \supset SiS$ и $SoP \supset SiS$ не являются значимыми при указанном δ, поэтому они необщезначимы.

Силлогистическое исчисление с постулатами **A0**, **A1**–**A4**, **A7**–**A8** и *modus ponens* рассматривалось мною ранее [2]. Это система **ИФС**, адекватно формализующая один из вариантов «интенсиональной» семантики силлогистического языка.

Продемонстрируем непротиворечивость и полноту исчисления **ИФС** относительно «релевантизированной» семантики В.И. Шалака.

Теорема 1. ***Метатеорема о непротиворечивости.*** *Всякая теорема исчисления **ИФС** общезначима.*

Доказательство. В силу того, что условия значимости сложных формул задаются как в классической логике, все аксиомы **A0** общезначимы, а правило *modus ponens* сохраняет общезначимость.

Аксиомы **A1** и **A2** общезначимы в силу транзитивности релевантного следования в **FDE**: $(\alpha \vDash_{rel} \beta \mathbin{\dot{\wedge}} \beta \vDash_{rel} \gamma) \Rightarrow \alpha \vDash_{rel} \gamma$ (где α, β и γ — формулы пропозиционального языка).

Аксиома **A3** общезначима в силу следующего свойства релевантного следования: $\alpha \vDash_{rel} \neg\beta \Rightarrow \beta \vDash_{rel} \neg\alpha$.

Аксиома **A4** общезначима, поскольку релевантное следование рефлексивно: $\alpha \vDash_{rel} \alpha$.

Условия значимости **A7** и **A8** в нашей семантике тавтологичны, поэтому и эти аксиомы в ней общезначимы.

Таким образом, все аксиомы исчисления **ИФС** общезначимы, а единственное правило этой системы сохраняет свойство «быть общезначимой формулой». □

Доказательство обратной метатеоремы (теоремы о полноте **ИФС**) ведем методом Хенкина.

Назовем множество формул Γ силлогистического языка **ИФС**-*непротиворечивым*, если и только если оно не содержит формул $A_1, A_2, ..., A_n$ таких, что формула $\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n)$ доказуема в **ИФС**.

В дальнейшем нам достаточно будет ограничиться рассмотрением непротиворечивых множеств, формулы которых содержат *конечное* число общих терминов. Пусть $\mathcal{T}$ — произвольное конечное множество терминов, а $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$ — множество всех формул силлогистического языка, не содержащих иных терминов, кроме элементов $\mathcal{T}$.

Назовем множество формул Δ **ИФС**-*максимальным* относительно $\mathcal{T}$, если и только если Δ **ИФС**-непротиворечиво и для любой формулы $A \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}}$ верно: $A \in \Delta$ или $\neg A \in \Delta$.

Стандартным образом доказывается аналог леммы Линденбаума:

Лемма 1. *Произвольное **ИФС**-непротиворечивое множество формул* Γ *такое, что множество общих терминов* $\mathcal{T}$ *в формулах из* Γ *является конечным, можно расширить до **ИФС**-максимального относительно* $\mathcal{T}$ *множества* Δ.

Любое **ИФС**-максимальное относительно $\mathcal{T}$ множество формул обладает важными свойствами (для произвольных формул A и B из $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$):

(а) если A теорема **ИФС**, то $A \in \Delta$;

(б) если $A \supset B \in \Delta$ и $A \in \Delta$, то $B \in \Delta$;

(в) $\neg A \in \Delta$, е.т.е. $A \notin \Delta$;

(г) $A \wedge B \in \Delta$, е.т.е. $A \in \Delta$ и $B \in \Delta$;

(д) $A \vee B \in \Delta$, е.т.е. $A \in \Delta$ или $B \in \Delta$;

(е) $A \supset B \in \Delta$, е.т.е. $A \in \Delta \Rightarrow B \in \Delta$;

(ж) $A \equiv B \in \Delta$, е.т.е. $A \in \Delta \Leftrightarrow B \in \Delta$.

В дальнейшем, с целью упрощения метатеоретических рассуждений, будем полагать, что алфавит объектного языка силлогистики содержит следующий список общих терминов: $P_1, P_2, ...$, а алфавит языка пропозициональной логики — следующий список пропозициональных переменных: $p_1, p_2, ...$ В метаязыке мы используем в качестве синтаксических переменных по общим терминам большие латинские буквы: S, P, Q, R, M, а в качестве метазнаков для пропозициональных переменных — малые латинские буквы: s, p, q, r, m. Договоримся, что малая буква представляет пропозициональную переменную с индексом j (то есть p_j) тогда и только тогда, когда соответствующая большая буква представляет общий термин с тем же индексом (а именно, термин P_j).

С каждым **ИФС**-максимальным относительно конечного $\mathcal{T}$ множеством формул Δ будем ассоциировать каноническую интерпретацию общих терминов δ_Δ.

Если термин Q отсутствует в $\mathcal{T}$, то $\delta_\Delta(Q) = q$ (то есть, согласно только что принятому соглашению, δ_Δ сопоставляет произвольному общему термину P_j формулу языка логики высказываний p_j — пропозициональную переменную с тем же индексом). Этот пункт необходим исключительно для того, чтобы обеспечить всюду определенность δ_Δ.

Пусть теперь $Q \in \mathcal{T}$. Зададим сначала связанную с множеством Δ функцию π_Δ, которая каждому термину из $\mathcal{T}$ сопоставляет множество литералов — пропозициональных переменных и (или) их отрицаний: $\pi_\Delta(Q) = \{r : QaR \in \Delta\} \cup \{\neg r : QeR \in \Delta\}$. $\delta_\Delta(Q)$ в этом случае будет представлять собой конъюнкцию всех литералов из $\pi_\Delta(Q)$. Для того чтобы обеспечить однозначность отображения δ_Δ, положим, что члены этой элементарной конъюнкции упорядочены так: положительные литералы (пропозициональные переменные) предшествуют в ней отрицательным (отрицаниям переменных), а среди как положительных, так и отрицательных литералов каждый литерал с меньшим индексом предшествует каждому литералу с большим индексом.

Для упрощения доказательства основной леммы обоснуем два вспомогательных утверждения. Существенным образом будем использовать при этом синтаксический критерий релевантного первоуровнего следования $\vDash_{rel}$, предложенный Е.К. Войшвилло [1, с. 38–40]: $\alpha \vDash_{rel} \beta$, если и только если для каждого дизъюнктивного члена α_i ДНФ α существует дизъюнктивный член β_j ДНФ β такой, что множество конъюнктивных членов (литералов) β_j есть подмножество множества конъюнктивных членов (литералов) α_i.

Лемма 2. *Пусть Δ — произвольное **ИФС**-максимальное относительно конечного $\mathcal{T}$ множество формул, и пусть S и P — общие термины из $\mathcal{T}$. Тогда $\delta_\Delta(S) \vDash_{rel} \delta_\Delta(P)$, если и только если $\pi_\Delta(P) \subseteq \pi_\Delta(S)$.*

Доказательство. Из определения δ_Δ вытекает, что формулы $\delta_\Delta(S)$ и $\delta_\Delta(P)$ находятся в дизъюнктивной нормальной форме, каждая из них является вырожденной ДНФ, состоящей из единственной элементарной конъюнкции. В данном случае, согласно критерию Войшвилло, для наличия релевантного следования второй формулы из первой необходимо и достаточно, чтобы каждый литерал из элементарной конъюнкции $\delta_\Delta(P)$ содержался в элементарной конъюнкции $\delta_\Delta(S)$. Но множество литералов в составе $\delta_\Delta(P)$ есть не что иное, как $\pi_\Delta(P)$, а множество литералов в составе $\delta_\Delta(S)$ есть $\pi_\Delta(S)$. $\square$

Лемма 3. *Пусть Δ — произвольное **ИФС**-максимальное относительно конечного $\mathcal{T}$ множество формул, и пусть S и P — общие термины из $\mathcal{T}$. Тогда $\delta_\Delta(S) \vDash_{rel} \neg\delta_\Delta(P)$, если и только если существует положительный литерал (пропозициональная переменная) r такой, что $r \in \pi_\Delta(S)$ и $\neg r \in \pi_\Delta(P)$, или существует положительный литерал r такой, что $\neg r \in \pi_\Delta(S)$ и $r \in \pi_\Delta(P)$.*

Доказательство. Выше уже отмечалось, что $\delta_\Delta(S)$ и $\delta_\Delta(P)$ представляют собой ДНФ, состоящие из одной элементарной конъюнкции. В системе **FDE** справедливы законы Де Моргана, а также законы введения и удаления двойного отрицания. В силу этого формула $\neg\delta_\Delta(P)$ релевантно эквивалентна дизъюнкции литералов (вырожденных конъюнкций), то есть некоторой ДНФ γ, причем каждый литерал в составе этой γ противоречит некоторому литералу из элементарной конъюнкции $\delta_\Delta(P)$. Поэтому, согласно критерию Войшвилло, $\delta_\Delta(S) \vDash_{rel} \neg\delta_\Delta(P)$ имеет место тогда и только тогда, когда в составе γ найдется литерал, входящий также и в состав $\delta_\Delta(S)$, а значит принадлежащий $\pi_\Delta(S)$. Но γ состоит из литералов, противоречащих элементам множества $\pi_\Delta(P)$. Следовательно, необходимым и достаточным условием релевантного следования $\neg\delta_\Delta(P)$ из $\delta_\Delta(S)$ является существование пары противоречащих литералов, один из которых содержится в $\pi_\Delta(S)$, а другой в $\pi_\Delta(P)$. Здесь имеются две возможности: положительный литерал r может принадлежать $\pi_\Delta(S)$, а его отрицание $\neg r$ принадлежать $\pi_\Delta(P)$, либо наоборот, $r \in \pi_\Delta(P)$, а $\neg r \in \pi_\Delta(S)$. $\square$

Перейдем к доказательству основной леммы о равносильности двух утверждений — о принадлежности силлогистической формулы некоторому **ИФС**-максимальному множеству формул Δ и о значимости этой формулы при канонической интерпретации, связанной с этим Δ.

Лемма 4. *Пусть Δ — произвольное множество формул, **ИФС**-максимальное относительно конечного множества терминов $\mathcal{T}$. Для любой формулы $A \in \mathcal{F}_\mathcal{T}$ верно: $\delta_\Delta \models A$, если и только если $A \in \Delta$.*

Доказательство. Доказательство ведется индукцией по числу связок в формуле A.

I. Пусть A есть SaP.

Докажем сначала, что $\delta_\Delta \models SaP \Rightarrow SaP \in \Delta$.

1. $\delta_\Delta \models SaP$ допущение
2. $\delta_\Delta(S) \vDash_{rel} \delta_\Delta(P)$ 1; (I1)
3. $\pi_\Delta(P) \subseteq \pi_\Delta(S)$ 2; Лемма 2
4. $PaP \in \Delta$ **A4**, (a)
5. $p \in \pi_\Delta(P)$ 4; опр. π_Δ
6. $p \in \pi_\Delta(S)$ 3, 5
7. $SaP \in \Delta$ 6; опр. π_Δ

Докажем обратное утверждение: $SaP \in \Delta \Rightarrow \delta_\Delta \models SaP$.

1. $SaP \in \Delta$ допущение

| +2. $r \in \pi_\Delta(P)$
| 3. $PaR \in \Delta$ 2; опр. π_Δ
| 4. $(PaR \wedge SaP) \supset SaR \in \Delta$ **A1**, (a)
| 5. $SaR \in \Delta$ 3, 1, 4; (г), (б)
| 6. $r \in \pi_\Delta(S)$ 5; опр. π_Δ

7. $\dot\forall r(r \in \pi_\Delta(P) \Rightarrow r \in \pi_\Delta(S))$ 2–6; $\Rightarrow_i$, $\dot\forall_i$

| +8. $\neg q \in \pi_\Delta(P)$
| 9. $PeQ \in \Delta$ 8; опр. π_Δ
| 10. $(PeQ \wedge SaP) \supset SeQ \in \Delta$ A2, (a)
| 11. $SeQ \in \Delta$ 9, 1, 10; (г), (б)
| 12. $\neg q \in \pi_\Delta(S)$ 11; опр. π_Δ

13. $\dot\forall r(\neg r \in \pi_\Delta(P) \Rightarrow \neg r \in \pi_\Delta(S))$ 8–12; $\Rightarrow_i$, $\dot\forall_i$
14. $\pi_\Delta(P) \subseteq \pi_\Delta(S)$ 7, 13
15. $\delta_\Delta(S) \vDash_{rel} \delta_\Delta(P)$ 14; Лемма 2
16. $\delta_\Delta \models SaP$ 15; (I1)

II. Пусть A есть SeP.

Докажем сначала, что $\delta_\Delta \models SeP \Rightarrow SeP \in \Delta$.

1. $\delta_\Delta \models SeP$ допущение
2. $\delta_\Delta(S) \vDash_{rel} \neg\delta_\Delta(P)$ 1; (I2)
3. $\dot\exists r(r \in \pi_\Delta(S) \dot\wedge \neg r \in \pi_\Delta(P)) \dot\vee$
   $\dot\vee \dot\exists r(\neg r \in \pi_\Delta(S) \dot\wedge r \in \pi_\Delta(P))$ 2; Лемма 3

| +4. $\dot\exists r(r \in \pi_\Delta(S) \dot\wedge \neg r \in \pi_\Delta(P))$
| 5. $SaR \in \Delta \dot\wedge PeR \in \Delta$ 4; $\dot\exists_e$, опр. π_Δ
| 6. $PeR \supset ReP \in \Delta$ **A3**, (a)
| 7. $(ReP \wedge SaR) \supset SeP \in \Delta$ **A2**, (a)
| 8. $SeP \in \Delta$ 5, 6, 7; (г),(б)

$+9.\ \dot{\exists} r(\neg r \in \pi_\Delta(S) \mathbin{\dot\wedge} r \in \pi_\Delta(P))$	
$10.\ SeQ \in \Delta \mathbin{\dot\wedge} PaQ \in \Delta$	9; $\dot{\exists}_e$, опр. π_Δ
$11.\ SeQ \supset QeS \in \Delta$	**A3**, (а)
$12.\ (QeS \wedge PaQ) \supset PeS \in \Delta$	**A2**, (а)
$13.\ PeS \supset SeP \in \Delta$	**A3**, (а)
$14.\ SeP \in \Delta$	10, 11, 12, 13; (г),(б)

15. $SeP \in \Delta$ 3, 4–8, 9–14; $\dot{\vee}_e$

Докажем обратное утверждение: $SeP \in \Delta \Rightarrow \delta_\Delta \models SeP$.

1. $SeP \in \Delta$	допущение
2. $\neg p \in \pi_\Delta(S)$	1; опр. π_Δ
3. $PaP \in \Delta$	**A4**, (а)
4. $p \in \pi_\Delta(P)$	3; опр. π_Δ
5. $\dot{\exists} r(\neg r \in \pi_\Delta(S) \mathbin{\dot\wedge} r \in \pi_\Delta(P))$	2, 4
6. $\delta_\Delta(S) \vDash_{rel} \neg\delta_\Delta(P)$	5; Лемма 3
7. $\delta_\Delta \models SeP$	6; (I2)

III. Пусть A есть SiP.

Данный случай сводится к случаю II в силу того, что условия значимости формулы SiP противоречат условиям значимости формулы SeP, а также в силу наличия в **ИФС**-максимальном множестве аксиомы **A7**.

IV. Пусть A есть SoP.

Данный случай сводится к случаю I в силу того, что условия значимости формул SoP и SaP противоречат друг другу, и в силу наличия в **ИФС**-максимальном множестве аксиомы **A8**.

Разбор случаев, когда A — сложная формула, прост: используем индуктивное допущение, условия значимости сложных формул и свойства (а)–(ж) **ИФС**-максимального множества. □

Докажем теперь метатеорему о полноте исчисления **ИФС** относительно предложенной нами семантики.

Теорема 2. ***Метатеорема о полноте.*** *Всякая общезначимая формула доказуема в исчислении **ИФС**.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную общезначимую формулу A. Допустим, что она недоказуема в **ИФС**. Тогда множество формул $\{\neg A\}$ **ИФС**-непротиворечиво. Пусть $\mathcal{T}$ — множество общих терминов, входящих в формулу A. Очевидно, что $\mathcal{T}$ является конечным. Согласно Лемме 1, $\{\neg A\}$ может быть расширено до **ИФС**-максимального относительно $\mathcal{T}$ множества формул Δ. Поскольку $\neg A \in \Delta$, постольку, в силу Леммы 4, $\delta_\Delta \models \neg A$. В силу семантики пропозиционального отрицания, A не является значимой при каноническом приписывании δ_Δ. Следовательно, формула A необщезначима. В рассуждении получено противоречие, значит допущение о недоказуемости A в **ИФС** неверно, и потому формула A является теоремой данного исчисления. $\square$

Таким образом, замена классической выводимости на релевантную в предложенной В.И. Шалаком «синтаксической» интерпретации формул силлогистики **ФС**, сужает класс собственно силлогистических законов этой системы. Интересным представляется вопрос о том, какие системы силлогистики окажутся адекватными при принятии в данной семантике иных отношений первоуровнего следования, а также при наложении разного рода ограничений на формулы пропозиционального языка, которые сопоставляются в качестве значений общим терминам категорических высказываний.

Литература

[1] *Войшвилло Е.К.* Философско-методологические аспекты релевантной логики. М.: Издательство Московского университета, 1988. 144 с.

[2] *Маркин В.И.* Фундаментальная силлогистика с интенсиональной точки зрения // Логические исследования. 2002. Вып.9. С. 119–130.

[3] *Шалак В.И.* Синтаксическая интерпретация категорических атрибутивных высказываний // Логические исследования. 2015. №21(1). С. 60–78.

[4] *Шрамко Я.В.* Логическое следование и интуиционизм. Киев: ВИПОЛ, 1997. 180 с.

[5] *Łukasiewicz J.* Aristotle's Syllogistic From the Standpoint of Modern Formal Logic. Oxford Univ Press; 2nd edition, 1957. 222 p.

[6] *Shepherdson J.C.* On the Interpretation of Aristotelian Syllogistic // The Journal of Symbolic Logic. 1956. Vol. 21 (2). P. 137–147.

V.I. Markin

The Interpretation of Categorical Propositions in Terms of Relevant Entailment

Markin Vladimir Ilyich
Department of Logic, Faculty of Philosophy, Lomonosov Moscow State University.
Lomonosovsky prospect, 27–4, GSP-1, Moscow, 119991, Russian Federation.
E-mail: vladimirmarkin@mail.ru

In the paper we state a non-standard semantics for positive syllogistic language, where the validity of atomic formulas (the forms of categorical propositions) is defined in terms of relevant entailment. This idea is realized within the bounds of V.I. Shalack's approach to the construction of syllogistic semantics [3]: the formulas of propositional logic are assigned to the subjects and the predicates as their meanings, and the validity definitions for syllogistic formulas base on the relation of classical deducibility. In the paper we change this relation for the entailment relation of relevant system **FDE**. Interpretative function δ assigns a formula of the propositional language with primitive connectives $\neg$, $\wedge$ and $\vee$, for every universal term. We postulate the following validity conditions for syllogistic formulas under the interpretation δ: SaP is valid iff $\delta(S)$ entails $\delta(P)$ in **FDE**; SeP is valid iff $\delta(S)$ entails $\neg\delta(P)$; SiP is valid iff $\delta(S)$ doesn't entail $\neg\delta(P)$; SoP is valid iff $\delta(S)$ doesn't entail $\delta(P)$; for complex formulas they are usual. Syllogistic calculus formalized the set of logical valid formulas, contains the following postulates: classical tautologies, axiom schemes $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$, $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$, $SeP \supset PeS$, SaS, $SiP \equiv \neg SeP$, $SoP \equiv \neg SaP$, and the only rule *modus ponens*. The soundness and completeness theorems are proved.

Keywords: syllogistic, categorical propositions, relevant entailment, semantics, calculus, soundness theorem, completeness theorem

References

[1] Voishvillo, E.K. *Filosofsko-metodologicheskie aspekty relevantnoi logiki* [Philosophical and methodological aspects of relevant logic]. M.: Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta, 1988. 144 p. (In Russian)

[2] Markin, V.I. "Fundamental'naya sillogistika s intensional'noi tochki zreniya" [Fundamental syllogistic from the intensional point of view], *Logicheskie issledovaniya* [Logical Investigations]. 2002, vol. 9, pp. 119–130. (In Russian)

[3] Shalack, V.I. "Sintaksicheskaya interpretatsiya kategoricheskikh atributivnykh vyskazyvanii" [Syntactic interpretation of categorical attributive propositions], *Logicheskie issledovaniya* [Logical Investigations]. 2015, vol. 21(1), pp. 60–78. (In Russian)

[4] Shramko, Ya.V. *Logicheskoe sledovanie i intuitsionizm* [Logical entailment and intuitionism]. Kiev: VIPOL, 1997. 180 p. (In Russian)

[5] Łukasiewicz, J. *Aristotle's Syllogistic From the Standpoint of Modern Formal Logic*. Oxford Univ Press; 2nd edition, 1957. 222 p.

[6] Shepherdson, J.C. "On the Interpretation of Aristotelian Syllogistic", *The Journal of Symbolic Logic*. 1956, vol. 21(2), p. 137–147.

Логические исследования
2016. Т. 22. № 1. С. 82–107
УДК 510.64

Logical Investigations
2016, vol. 22, no 1, pp. 82–107

Д.Ю. Максимов

Логика Н.А. Васильева и многозначные логики

Максимов Дмитрий Юрьевич
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН.
117997, Российская Федерация, Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.
E-mail: phoenixjhanjaa@yandex.ru

Рассматривается история понятия многозначности в логике с единых позиций как история отрицания. Основное внимание при этом уделяется логике Н.А. Васильева, ее связям с индийской логикой сйадвада, с логиками Я. Лукасевича, логикой Д.А. Бочвара. Выясняется многозначная природа логики Васильева, ее формальная модель в топосах. В топосах вводится новое понятие отрицания «в некотором смысле». Тогда множество типов суждения у Васильева оказывается множеством образующих дистрибутивной решетки истинностных значений топоса, которые переводятся друг в друга отрицанием «в соответствующем смысле», а васильевское понимание отрицания соответствует решеточному отрицанию (псевдодополнению). Обсуждается понимание Васильевым закона исключенного n-го и паранепротиворечивости: Н.А. Васильев рассматривал свой закон исключенного n-го как дизъюнкцию образующих, как дизъюнкцию разных способов построения отрицательного суждения «в некотором смысле», а закон непротиворечия как конъюнкцию утверждения и его отрицания «в некотором смысле». Указаны условия для моделирования этих законов в категориях.

Ключевые слова: Логика Васильева, многозначная логика, категорная семантика.

1. Введение

В многозначных логиках, в отличие от классической двузначной логики, истинность высказывания может отличаться от *true* и *false* и принимать значения во множествах, имеющих больше двух элементов. Это значит, что высказывания могут быть не только истинными или ложными. Есть несколько следующих основных источников возникновения таких логических систем:

— Во-первых, это возможная зависимость истинности высказывания от контекста, в котором оно употребляется, а также гносеологические идеи скептицизма.

— Во-вторых, это неполнота информации, которая требуется для однозначной оценки высказывания как истинного или ложного.

— В-третьих, это временная неопределенность истинности высказываний о будущих событиях.

— В-четвертых, это нечеткость понятий, относительно которых делается высказывание.

В основном из первого источника возникла многозначность в системах логики Древней Индии (§ 2). Анализ понятия частного высказывания в аристотелевской логике выявил наличие в таких высказываниях неполноты информации и привел Н.А. Васильева в начале XX века к логике, которая очень похожа на индийские системы, но также содержит оригинальную интерпретацию отрицания (§ 3).

Попытки оценить истинность высказываний о будущих событиях имеют богатую историю. Еще Аристотель, не вводя третьего истинностного значения, не распространял действия принципа двузначности (согласно которому любое высказывание или только истинно, или только ложно) на будущие события. В противном случае не было бы ни свободы выбора, ни случайных событий. В средние века У. Оккам, по сути, вводит третье истинностное значение для будущих событий, которое он интерпретирует как «неопределенно», для согласования теологической концепции Божественного предвидения со свободной волей человека. В первой половине XX века Я. Лукасевич, из сходных с Аристотелем соображений, создает сначала трехзначную логику, а затем и многозначные системы с линейной шкалой истинностных значений (§ 4). Впоследствии, на основе трехзначной логики Лукасевича и из иных соображений появилось много других вариантов, что связано со значительной свободой построения истинностных таблиц для логических связок и отсутствием содержательной семантики для такой логики.

Наконец, из идей нечеткости понятий (например, «молодой», «куча» и др.) и приближенных рассуждений в середине XX века появилась нечеткая логика Л. Заде с такой же линейной шкалой истинностных значений, как у Лукасевича (§ 5). Впоследствии появились нечеткие логики с нелинейными шкалами.

В данной работе мы рассмотрим понятие многозначности во всех этих системах с единых позиций, как историю понятия отрицания. Основное внимание при этом будет уделено логике Н.А. Васильева, ее связям в древнеиндийской логикой, логикой Лукасевича и др. Выясняется многозначная природа логики Васильева, предлагается ее формальная модель в топосах. Обсуждается понимание Васильевым закона исключенного n-го и паранепротиворечивости.

Определение отрицания связано со структурой шкалы истинностных значений, на которой отрицание определяется. Поэтому вторая линия развития идет по используемым шкалам: у Лукасевича и в родственных (по шкале) логиках — линейная решетка, в 4-значной модальной логике Лукасевича и в логике Белнапа — простейшая дистрибутивная решетка, в логике Васильева — это общая дистрибутивная решетка (или даже недистрибутивная в обобщении в топосах), в нечеткозначной логике — дальнейшее обобщение понятия решетки.

2. Многозначность в логике Древней Индии[1]

Первые следы скептицизма, выражающие наличие гносеологических ситуаций с неустранимым сомнением, встречаются уже в «Ригведе». И это приводит к отрицанию принципа двузначности и признанию возможности одновременного существования и не-существования: « Тогда не было ни сущего, ни не-сущего. . . » [5]. Впоследствии адживики пришли к выводу, что также возможна ситуация, когда нечто «и есть, и не есть», что к ряду предметов можно применять двойственные определения: «и мир, и не-мир», «и душа, и не-душа» и проч. [21]. Таким образом, к VI–IV вв. до н.э. в Индии существовало четыре способа описания реальности: о любом предмете можно сказать, что он есть, или не есть, или и есть и не есть, или ни есть ни не есть. Такая схема получила название «чатушкуотика», т.е. «имеющая четыре вершины». Эту концепцию, как и возникшие на ее основе доктрины аджнянавада и сйадвада, использовали все направления индийской философии, но наибольшее распространение она получила у буддистов. При этом буддизм, отвергая возможность выразить в словах, с помощью логических рассуждений, объективную реальность, использовал «чатушкуотику» в чисто пропедевтических целях.

Если буддизм отвергал всякую возможность выразить истину в слове, то джайны только сомневались в такой возможности и, в частности, выразить истину вариантами «чатушкуотики». Поэтому они дополнили четырехвершинную схему пятой вершиной: «Я не говорю этого. Я не говорю так. Я не говорю иначе. Я не говорю нет. Я не говорю не нет» [17]. Эта концепция получила название аджнянавада и может быть проинтерпретирована следующим образом.

1) Неверно, что объект есть. 2) Неверно, что он не есть. 3) Неверно, что он есть и не есть. 4) Неверно, что он ни есть, ни не есть. 5) Неверно, что 1)–4) истинны. Действительно, «так» значит не «иначе»; «нет» означает ни «так», ни «иначе»; «не нет» отрицает все эти три возможности. Наконец, «Я не говорю этого» отрицает отрицания всех других четырех суждений. При этом термин «неверно» не означает, что отрицающие друг друга пять высказываний являются взаимоисключающими.

[1] На основании [17].

Таким образом, слово «аджнянавада» обозначает некий скептицизм, когда сторонник этой доктрины не знает, знает ли он или нет что-либо о предмете. Впоследствии джайны разработали более сложную доктрину сйадвада, в которой о любом объекте можно высказаться семью способами: 1) Объект некоторым образом существует; 2) Некоторым образом не существует; 3) Некоторым образом и существует и не существует; 4) Некоторым образом непредикативен; 4) Некоторым образом и существует и непредикативен; 6) Некоторым образом и не существует и непредикативен; 7) Некоторым образом и существует, и не существует, и непредикативен [17]. Опять-таки, как и в аджнянаваде, все эти семь высказываний не являются взаимоисключающими. Термин «сйад» («некоторым образом») указывает на зависимость истинности высказывания от контекста, на ограниченность и конкретность утверждения, на истинность относительно определенных предпосылок.

Так, например, в ситуации 1), когда говорится, что кувшин некоторым образом существует, имеется в виду некоторый конкретный, например этот глиняный, кувшин. Тогда, если говорить, например, о серебряном кувшине, то высказывание 1) будет ложным, а истинным возможно будет высказывание 2). В свою очередь высказывание 2) трактует небытие предмета как бытие некоторого другого предмета. Иначе говоря, если кувшин некоторым образом не есть, то это означает, что он некоторым образом не кувшин, а кусок обожженной глины, или выполняет другие, не свойственные кувшину функции или просто другой кувшин, не тот, который имелся в виду.

Высказывание 3) можно толковать и как совпадение в разных степенях бытия и небытия, и как существование с одной точки зрения и несуществование с другой. Например, рассматривая одну часть предмета с точки зрения его собственных свойств, а другую — с точки зрения чуждых ему свойств. В отличие от этого, высказывание 4) относится ко всему предмету в целом и утверждает его некоторым образом неописуемость (например, демонов) или отсутствие ответа на данный вопрос. Например, цвет предмета может зависеть от освещения, и каков он в действительности, непонятно. То есть в данном случае любое словесное описание неполно и зависит от точки зрения субъекта.

Истинность остальных высказываний рассматривается также с точки зрения соотношения собственных и чуждых свойств разных частей объекта и, кроме того, с учетом невозможности описать предмет вообще.

Следует подчеркнуть, что все упомянутые логические системы имеют дело с объектным рядом, с конкретными вещами, но не с идеями и понятиями [13]. Истинность суждений о предметах находится «в зависимости не просто от склонности судящего рассудка, но от относительного характера самой многогранной реальности» [18]. В начале XX века Н.А. Васильев тоже пришел к выводу о необходимости разделять в логике уровень понятий и уровень фактов, но, в отличие от индийских логиков, у него принцип двузначности относится к уровню фактов, о которых можно делать однозначные утверждения, а вот о понятиях можно высказываться многими способами и для них должен выполняться закон исключенного четвертого. Впоследствии Васильев обобщает свои взгляды и на уровень фактов, но в воображаемом мире, и приходит в этом случае к закону исключенного n-го.

3. Логика Н.А. Васильева

В предыдущем разделе мы видели, что в индийских логических системах к идее многозначности приходят, в основном, из варьирования гносеологических принципов, из идей скептицизма. Н.А. Васильев выделяет в логике два слоя. Один слой относится к познающему субъекту — это, в его терминологии, металогика. Это законы, которые касаются суждения в целом и носят гносеологический характер. Один из них — закон исключенного третьего: «всякое суждение или истинно или ложно». И эти законы металогики, гносеологические принципы Васильев не варьирует: «мы предполагаем неизменность познающего субъекта и его рациональных функций — способности суждения и вывода» [2]. Но Васильев варьирует принципы, зависящие от познаваемых объектов. В этом слое он также выделяет два логических уровня. Один уровень относится к суждениям о фактах, о результатах наблюдения, опыта. К другому уровню относятся суждения о понятиях, о законах. Такие суждения передают не существования, а закон, связь между существованиями. Для разных систем объектов, разных миров, законы онтологического, эмпирического уровня могут различаться. Васильев рассматривает два таких закона — закон противоречия в формулировке Канта: «ни одной вещи не может принадлежать предикат, противоречащий ей», — и закон исключенного третьего в его онтологической формулировке [2]. Именно эти законы, относящиеся к вещам, Васильев и предлагает модифицировать.

3.1. О частных суждениях и законе исключенного четвертого

Свою первую статью [3] Н.А. Васильев посвящает трактовке частных суждений в силлогистике. В силлогистике суждения делятся на общие и частные, что дает четыре формы: общеутвердительное A, общеотрицательное E, частноутвердительное I, частноотрицательное O. Частное суждение выражается формулой: «некоторые S суть (не суть) P». Как указывает Васильев, знак частности может иметь два смысла: 1) некоторые, а может быть и все, по крайней мере некоторые; 2) некоторые, но не все, только некоторые. Анализируя первый вариант, Васильев приходит к выводу, что такой смысл могут иметь только предложения, но не суждения. Это проблематическое, неопределенное высказывание. Но наука не может иметь дело с неопределенными высказываниями, поэтому, делает вывод Васильев, слово «некоторые» в частных суждениях может иметь только смысл «не все». Поскольку «некоторые S суть P», а остальные «не суть P», то оба частных высказывания I и O представляют одно общее высказывание M: «все S или суть P, или не суть P». Такое высказывание Васильев называет индифферентным.

Для этого высказывания Васильев предлагает две формы трактовки. Одна — дизъюнктивная, которая предполагает, что весь объем S распределен по признакам P, Q, R ... — «некоторые S суть P», «некоторые S суть Q», «некоторые S суть R». Другая форма — акцидентальная, которая предполагает, что признак P не обязателен для S, случаен, возможен, что предикат P совместим с природой S. То есть акцидентальное суждение выражает определенное отношение между понятиями, их частичное совпадение. Это суждение не проблематическое, а утверждает некое правило. Напротив того, проблематическое относится всегда к фактам, а не к понятиям, выражает предположение о фактическом отношении. Такими частными суждениями о факте могут быть единичные, групповые, числовые или неопределенно-числовые («несколько S есть P») суждения и именно для них, доказывает Васильев, верна традиционная силлогистика Аристотеля с обычным квадратом противоположностей и законом исключенного третьего. Это неудивительно, поскольку, как мы видели в § 2, античное (индийское) мышление имело дело с отношениями между фактами, а не между понятиями. И греческая логика в этом пункте не отличается от индийской.

Если же иметь дело с понятиями, то для частных высказываний в трактовке Васильева вместо квадрата противоположностей получается треугольник противоположностей: «любая пара суждений A, E, M не может быть одновременно истинной, но может быть одновременно ложной». Отсюда следует закон исключенного четвертого для понятий, т.е. что истинно только одно из трех утверждений: A или E или M.

Таким образом, для любого понятия и всякого его предиката может быть три возможности:

— Либо понятию присущ данный предикат;

— Либо ему присущ противоречащий предикат;

— Либо ему присущ и тот, и другой, т.е. оба предиката совместимы с данным понятием (как, например, с понятием «человек» совместимы предикаты «брюнет» и «не брюнет»).

Можно то же выразить идеей модальности: каждый предикат или необходим, или невозможен, или возможен для данного понятия.

В этой своей первой статье Н.А. Васильев пока не рассматривает закон противоречия. Но впоследствии он развивает свою идею о возможной совместимости признаков и приходит к понятию неклассического отрицания, которое вообще не основано на понятии совместимости и получает в этом случае закон исключенного n-го и нарушение закона противоречия.

3.2. Закон паранепротиворечия и понятие отрицания

В своей второй статье [4] Н.А. Васильев переходит к логике, которая могла бы иметь место для предметов и субъектов в некоем воображаемом мире. Отталкиваясь от идей Лобачевского, построившего неевклидову геометрию, отказавшись от 5-го постулата Евклида, Васильев также предлагает отказаться от одного из законов логики Аристотеля. И свою воображаемую логику Васильев строит без закона противоречия. Закон противоречия, согласно Васильеву, выражает несовместимость утверждения и отрицания. Но отрицание — это, по определению, есть то, что не совместимо с утверждением. Поэтому, заключает Васильев, строить логику без закона противоречия значит строить логику с отрицанием, не основанном на несовместимости.

Отрицательное суждение имеет два аспекта. Первый — формальный: отрицательное суждение высказывает ложность утвердительного. Второй — материальный: отрицательное суждение основывается на несовместимости предикатов. Этот аспект указывает, на каком основании мы приходим к истинности отрицательных суждений. Изменив такое основание, можно прийти к неклассическому отрицанию.

Н.А. Васильев указывает, что утвердительное суждение основывается на непосредственном восприятии и ощущении, а отрицательное —

это всегда вывод. Мы не воспринимаем «не белое», а делаем вывод, что предмет не белый на том основании, что он какого-либо другого цвета. Но в воображаемом мире отрицательные суждения могут быть такими же непосредственными, как и положительные, где возможно непосредственное восприятие отрицательных ощущений и сам опыт в этом убеждает без всякого вывода. Поэтому в таком мире могут в одном предмете возникнуть основания и для утвердительного и для отрицательного суждений. Суждение, которое выражает присутствие в объекте оснований и для положительного и для отрицательного суждения, Васильев называет индифферентным.

Мы уже встречались в предыдущем разделе с индифферентными суждениями, но там они соотносились с частными суждениями, с высказыванием о классе и означали, что некоторый подкласс обладает данным предикатом, а другие подклассы не обладают им. Это были суждения о понятиях, выражающие некоторую закономерность, отношение между ними. Здесь же речь идет о суждениях единичных, о суждениях об отдельных фактах, которые выражают эмпирическую реальность мира, не совпадающего с нашим.

Далее Васильев строит силлогистику по той же схеме, что и в первой статье (см. § 3.1). Общие суждения, т.е. суждения о классе S, о понятии могут быть трех видов: 1) общеутвердительное суждение — все единичные S обладают предикатом P, все S суть P; 2) общеотрицательное суждение — все S не суть P; 3) индифферентное суждение — все S суть и не суть P. Кроме общих суждений могут быть еще частные, когда только некоторые S обладают данным предикатом. Васильев опять называет их акцидентальными и выделяет четыре вида таких суждений: 4) некоторые S суть P, а все остальные не суть P; 5) некоторые S суть P, а все остальные суть и не суть P; 6) некоторые S не суть P, а все остальные суть и не суть P; 7) некоторые S суть P, некоторые S не суть P, а все остальные суть и не суть P.

Мы видим, что Васильев в своих предположениях получает столько же форм (а именно семь), сколько их выделяют аджнянавадины в концепции сйадвада (см. § 2). Причем, все эти формы практически дословно совпадают, если заменить термин «непредикативен» сйадвады на индифферентное суждение Васильева. Но получены они из разных гносеологических предпосылок и относятся к разным уровням: у Васильева — к уровню понятий, к классам, а у аджнянавадинов — к уровню фактов, к единичным объектам. Правда, схема рассуждений в аджнянаваде схожа со схемой Васильева: в предмете выделяются разные части, к которым можно относить разные суждения, и отрицание признака вещи понимается как наличие признака другой вещи. Можно представить, что скептицизм аджнянавады связан с предположением того, что реальные объекты «живут» в воображаемом мире Васильева и мы имеем дело с его проекцией на наш мир.

Н.А. Васильев в своих рассуждениях о воображаемой логике исходил из возможности в воображаемом мире непосредственного восприятия, ощущения как наличия признака, так и его отсутствия. В таком мире есть три качественно различных суждения — утвердительное, отрицательное и индифферентное и, поэтому, имеет место закон исключенного четвертого. Но можно также мыслить миры с n качественно различными суждениями, из которых мы можем иметь дело только с утверждением и отрицанием. В таком мире уже будет иметь место закон исключенного $n{+}1$-го, который утверждает наличие n форм суждений и исключает $n{+}1$ форму.

Интересно отметить, что Н.А. Васильев не вводит иерархию форм суждений по степени истинности. Поэтому у него нет проблемы с выбором значения для отрицания индифферентного суждения, как у Лукасевича (см. § 4). Он вводит дополнительный тип неопределенного суждения, как колебания между двумя другими возможностями, что аналогично аристотелевскому пониманию частного высказывания: «некоторые, а может быть и все» (см. § 3.1). Такие неопределенные суждения берутся в качестве отрицания каждой из трех форм суждений и связывают воображаемую логику с логикой Аристотеля. Таким образом, по существу, Васильев предложил в качестве множества истинностных значений дистрибутивную решетку с тремя образующими (см. след. разд.). В этой шкале логические связки определяются как решеточные операции, т.е. отрицание определяется как псевдодополнение, дизъюнкция и конъюнкция — как объединение и пересечение соответственно, а импликация $Z = A \to B$ как наибольший элемент, который имеет пересечение с A такое же, как B.

3.3. Формальная модель идей Н.А. Васильева

К сожалению, Н.А. Васильев не успел перевести свою систему на язык символической логики, а сама система содержит большое разнообразие идей, порой неясно выраженных. Поэтому существуют многообразные формальные модели его взглядов. При этом в немногочисленных известных работах логику Н.А. Васильева рассматривают, в основном, не как многозначную, а как предшественницу паранепротиворечивых или модальных логик и с этих позиций и пытаются моделировать [20], [16].

Так, А. Арруда исходит из того, что в логике Васильева два уровня — логический и металогический, поэтому она вводит два типа отрицания: для одного выполняется закон противоречия, для другого нет, что близко идеям Д.А. Бочвара [1] (см. § 4). Причем, не обязательно вводить для этого два символа — можно ввести два типа пропозициональных букв с разными правилами для них. В варианте с двумя символами отрицания вводятся также две конъюнкции, что приводит к формально более близким к взглядам Васильева выводам: для неклассического отрицания $\sim$ закон исключенного третьего $X \vee \sim X$ не выполняется, но выполняется закон исключенного четвертого $X \vee \sim X \vee (X \cdot \sim X)$, где $\cdot$ — неклассическая конъюнкция.

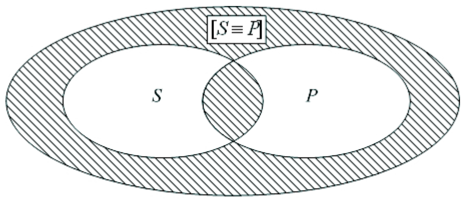
В.А. Смирнов рассматривает расширение классической логики, добавляя к ее структурным правилам силлогистические в целях аксиоматизации в силлогистике взглядов Васильева. Он вводит четыре модальных оператора — необходимости, случайности, возможности и детерминированности, что в совокупности делает аксиоматику такой силлогистики очень громоздкой.

В этом же направлении интерпретируется логика Васильева в [9]. Т.П. Костюк и В.И. Маркин построили силлогистическое исчисление, аксиоматизирующее класс общезначимых в этой семантике формул, доказали его непротиворечивость и полноту.

Однако существуют и многозначные интерпретации логики Васильева, например, перевод логики Васильева в язык многозначной логики предикатов [15]. В.И. Маркин доказал, что данный перевод погружает воображаемую логику в кванторную трехзначную логику, т.е. формула является законом воображаемой логики тогда и только тогда, когда ее перевод доказуем в трехзначной логике предикатов.

Основываясь на указании Н.А. Васильева о возможности двух типов отрицательных суждений — абсолютном и слабом, — в [6] Д.В. Зайцев и В.И. Маркин предложили интенсиональную семантику логики Васильева и соответствующее аксиоматическое исчисление.

Многозначная категорная семантика для идей Н.А. Васильева предложена в работе [25] (первые определения в [10]). В этой работе предложена модель взглядов Васильева в рамках аксиом пропозициональной части интуиционистской логики с добавлением аксиомы «исключенного n-го», что имеет место в определнном классе топосов (см. ниже). Автор исходит из наблюдения Васильева, что высказывание «некоторые S есть P» соответствует третьему способу сравнения понятий S и P и определяется пересечением S и P. В современной математической логике этому высказыванию больше всего соответствует понятие степени эквивалентности S и P — $[S \equiv P]$, в соответствии с которым S эквивалентно P там, где они пересекаются, или там, где оба не определены (рис. 1a).



$$[S \equiv P] = S \cup P \Rightarrow S \cap P$$

a

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, tail, "!"] \arrow[d, tail, "!"'] & 1 \arrow[r, "id"] \arrow[d, "T_S"] & 1 \arrow[d, "T"] \\
1 \arrow[r, "T"] & \Omega \arrow[r, "\neg_S"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

b

$$\begin{tikzcd}
\kappa \arrow[r, tail, "!"] \arrow[d, tail, "!"'] & 1 \arrow[r, "id"] \arrow[d, "T_S"] & 1 \arrow[d, "T"] \\
1 \arrow[r, "T_P"] & \Omega \arrow[r, "\neg_S"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

c

Рис. 1

Автор вводит понятие отрицания «в смысле S» — $\neg_S$, как характеристическую стрелку истинностного значения T_S, которое само является характером подобъекта S конечного объекта 1 в некотором топосе (рис. 1b, где Ω — объект истинностных значений этого топоса; для классической двузначной логики это просто множество $\{0,1\}$). Доказывается, что степень эквивалентности S и P совпадает с отрицанием

P «в смысле S» (или S «в смысле P»), т.е. это особый тип отрицания, который зависит от степени пересечения денотатов: на рис.1c для характеристической стрелки T_κ объекта $\kappa = [S \equiv P]$ имеем $T_\kappa = \neg_S T_P$.

Выяснено, что в специальном классе топосов выполняется закон «исключенного n-го», но в другом понимании, нежели у Васильева (см. ниже): $\bigvee\limits_{\mu \in Sub(1)} \neg_S P$, где дизъюнкция берется по всем элементам решетки истинностных значений. Такими специальными топосами являются, в частности, слабо экстенсиональные топосы, в которых неравные стрелки могут быть различимы частичным элементом. Такие топосы могут быть классическими и неклассическими. В последнем случае закон исключенного третьего в них не выполняется. Но могут быть и сильно неклассические топосы, в которых не выполняется и закон исключенного n-го. Таким образом в топосах могут моделироваться классическая логика, вариант логики Васильева или интуиционистская логика в зависимости от типа топоса. Такая категорная модель согласуется с представлениями Васильева о n-1 качественно различных типах отрицания и позволяет уточнить, что понимается под отрицанием у Васильева и в индийской концепции сйадвада.

Действительно, в своей логике Васильев берет в качестве отрицания каждого из трех типов высказывания высказывание, колеблющееся между двумя другими типами. Такое отрицание может соответствовать понятию отрицания в дистрибутивной решетке, например, в решетке истинностных значений некоторого топоса. Так, на рис. 2 изображена решетка истинностных значений некоторого классического топоса, состоящая из восьми элементов. Этот рисунок представляет верхнюю полурешетку с тремя образующими $\sim P$, P, I (достроенную пунктиром до решетки) семи способов высказывания в воображаемой логике Васильева (и, как мы видели, в сйадваде).

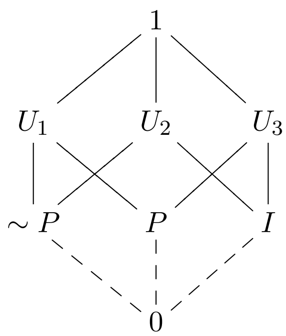


Рис. 2

I обозначает индифферентное высказывание «все S суть и не суть P», P — высказывание «все S суть P», $\sim P$ — «все S не суть P», U_1 — решеточное отрицание I — $\neg I$ соответствует колебанию между $\sim P$ и P и может иметь интерпретацию Васильева 4): «некоторые S суть P, а все остальные не суть P» (§ 3.2). Так же интерпретируются остальные элементы полурешетки. В таком случае отрицание I, например, «в смысле P» — $\neg_P I$ будет третьей образующей: $\neg_P I = \neg U_3 = \sim P$.

Таким образом, Н.А. Васильев различал отрицательное суждение $\sim P$ и отрицание суждения P, так что его операцию отрицания можно трактовать как решеточное отрицание (псевдодополнение), а формы высказывания о понятии («все S суть P», «все S не суть P», «все S суть и не суть P») как образующие этой решетки, которые, как мы видим, переводятся друг в друга не обычным отрицанием, как у Аристотеля, а отрицанием «в смысле P» (или «в смысле $\sim P$», или «в смысле I»).

Н.А. Васильев считал, что в законе «исключенного четвертого» истинно всегда одно утверждение из трех возможных — утвердительное, отрицательное или индифферентное, а два других ложны. Но если в решетке на рис. 2 одну из образующих принять за *true*, то решетка перестроится так, что две других образующих примут значение *false* [14]. Поэтому можно представить закон «исключенного четвертого» в современной форме — как дизъюнкцию образующих, которая всегда истинна. Таким образом, можно рассматривать закон исключенного n-го как дизъюнкцию разных способов построения отрицательного суждения «в некотором смысле». Поскольку дизъюнкция образующих все равно дает наибольший элемент решетки, то такое объединение эквивалентно объединению всех элементов решетки, всех истинностных значений — $\bigvee\limits_{\mu \in Sub(1)} \neg_S P$. Но решетка на рис. 2 булева, поэтому несмотря на то что в топосе с такой решеткой все равно верен закон «исключенного 4-го» и в васильевском понимании, и в форме $\bigvee\limits_{\mu \in Sub(1)} \neg_S P$, в топосах с такой решеткой истинностных значений верен обычный закон исключенного третьего: $X \vee \neg X$, где $\neg$ — решеточное отрицание (псевдодополнение). Таким образом, логика в топосах с такой решеткой хоть и многозначная, но на самом деле классическая. Чтобы логика была неклассической, но с законом «исключенного n-го», топос должен быть устроен определенным образом [25], например, быть слабо экстенсиональным. В таких топосах решетка истинностных значений небулева, а это значит, что образующие имеют нетривиальные пересечения. То есть для того, чтобы воображаемая логика была неклассической, некоторые из качественно различных отрицаний все-таки должны иметь пересекающиеся денотаты, как предполагал Н.А. Васильев в своей первой работе [3]. В этом случае такая логика будет паранепротиворечивой по Васильеву — конъюнкция утвердительного суждения и отрицательного суждения не ложна, т.е. в ней не выполняется закон непротиворечия в форме $P \wedge \sim P \to 0$, поскольку P может иметь ненулевое пересечение с $\sim P = \neg_I P$. Но для того чтобы не выполнялся обычный закон непротиворечия $P \wedge \neg P \to 0$, следует ввести неклассическую конъюнкцию и неклассическое отрицание, как это сделано в символическом виде в [20] (см. также начало этого параграфа) или для случая линейной логики проинтерпретировано в [25] в моноидальных категориях.

4. Логики Я. Лукасевича и родственные им

Я. Лукасевич пришел к созданию трехзначной логики в 20-х годах XX века, исследуя аристотелевскую проблему истинностного статуса будущих случайных событий [12]. Проблема состоит в том, что мы не можем сказать, истинно ли, например, утверждение: «Ян завтра в полдень будет дома», поскольку мы не знаем этого достоверно. Но точно так же мы не можем сказать, что это утверждение ложно, потому что для этого сегодня тоже нет оснований. Вместе с тем, дизъюнкция «Ян завтра в полдень будет дома или Ян завтра в полдень не будет дома», несомненно, истинна. Из этого Лукасевич делает вывод, что неверен принцип бивалентности, который состоит в том, что каждое высказывание либо истинно, либо ложно, и могут быть высказывания, которые ни истинны, ни ложны. Такие высказывания Лукасевич называет «безразличными». Интересно сравнить такие высказывания с индифферентными у Н.А. Васильева. Васильев предполагает, что единичные индифферентные высказывания относятся к материальному уровню и содержат в себе основания и для положительного и для отрицательного суждения. Лукасевич же предполагает, что таких оснований нет ни для одного, ни для другого. Тем самым, эти два логика в совокупности реализовали схему чатушкуотики (§ 2). Но у Васильева истинность суждений не упорядочена, а Лукасевич предлагает линейно-упорядоченную шкалу истинностных значений.

Васильев работал в рамках силлогистики и не успел представить свою систему даже в символическом виде. Лукасевич с самого начала разрабатывал *математическую* теорию трехзначной, а впоследствии и многозначной логики, что, однако, привело к несоответствию формальной теории исходным философским выводам. Дело в том, что простое добавление третьего истинностного значения требует переопределения логических связок, а сделать это можно, формально, разными способами, что приводит к разным трехзначным логикам, ни одна из которых, тем не менее, не соответствует исходным смысловым посылкам Лукасевича в полной мере. Это связано, возможно, с тем, что простое добавление третьего истинностного значения может привести только к линейной шкале истинностных значений, в то время как добавление индифферентного суждения Васильевым приводит, как мы видели в предыдущем разделе, к нелинейной решетке истинностных значений с тремя образующими.

В своей первой системе [23], в 1920 г., Я. Лукасевич берет в качестве исходных связок отрицание $\sim$ и импликацию $\to$, для которых оставляет классические значения тогда, когда аргументы принимают значения в множестве $\{0,1\}$. В остальных случаях Лукасевич доопределяет эти операции следующим образом: $(1 \to {}^1\!/_2) = ({}^1\!/_2 \to 0) = {}^1\!/_2$; $(0 \to {}^1\!/_2) = ({}^1\!/_2 \to {}^1\!/_2) = ({}^1\!/_2 \to 1) = 1$; $\sim {}^1\!/_2 = {}^1\!/_2$.

Другие логические связки определяются через исходные:

$P \vee Q = (P \to Q) \to Q$; $P \wedge Q = \sim(\sim P \vee \sim Q)$.

Легко проверить, что в логике Лукасевича не выполняются:

— Закон сокращения $(P \to (P \to Q)) \to (P \to Q)$;

— Закон исключенного третьего $P \vee \sim P$;

— Закон непротиворечия $\sim (P \wedge \sim P)$.

Все эти формулы принимают значения ${}^1\!/_2$ при $P = {}^1\!/_2$. Таким образом, мы видим, что формула «Ян завтра в полдень будет дома или Ян завтра в полдень не будет дома» не является истинной, что противоречит исходным посылкам введения третьего истинностного значения.

Поскольку добавление третьего истинностного значения было достаточно формальным и не привело к ожидаемой семантической интерпретации, то Я. Лукасевич, естественно, перешел к многозначным логикам, которые являются обобщениями его трехзначной. Обозначив третье истинностное значение как ${}^1\!/_2$ и руководствуясь интуицией линейного времени, Лукасевич стал принимать в качестве и других значений дробные величины. В отличие от Васильева, у которого истинностные значения качественно различны и линейно не упорядочены. Таким образом, в n-значной логике Лукасевича множество истинностных значений принадлежит единичному отрезку — 0, $1/(n\text{-}1)$, $2/(n\text{-}1)$, $\ldots (n\text{-}2)/(n\text{-}1)$, 1.

Волюнтаризм в построении истинностных таблиц в трехзначной логике Лукасевича может приводить к появлению других логических систем, в которых берутся другие возможные варианты определения логических связок. Это, например, трехзначная интуиционистская логика А. Гейтинга [22], логика Поста [27] и др. Но получены были эти логики из своих исходных посылок и имеют свои семантические интерпретации.

Совершенно особняком стоит трехзначная логика Д.А. Бочвара B_3 [1], во многом перекликающаяся с идеями Н.А. Васильева. Бочвар предложил эту логику для анализа логических и семантических парадоксов. Он интерпретировал третье истинностное значение как «бессмысленное» и, как и Васильев, не предполагал его промежуточности между истиной и ложью. Так же, как и Н.А. Васильев, Д.А. Бочвар рассматривает в логике два уровня — внешний, металогический, уровень метаязыка, на котором выполняются законы классической логики, и внутренний, неклассический. В связках внешнего уровня бессмысленное истинностное значение отождествляется с 0 (*false*), а на внутреннем уровне отрицание берется как у Лукасевича (но в терминах Бочвара — отрицание бессмысленного снова бессмысленно), и таблицы истинности для остальных связок тоже являются следствием интерпретации третьего истинностного значения как бессмысленного — хотя бы одного бессмысленного аргумента оказывается достаточно для бессмысленности всего выражения. Несмотря на то что Д.А. Бочвар не предполагал линейной упорядоченности множества истинностных значений, обычно его логику рассматривают с линейной шкалой и многозначные обобщения его логики предполагают именно линейную шкалу [8].

Пытаясь преодолеть семантические противоречия своей логики, Лукасевич создал ее модальные варианты, один из которых имеет нелинейную шкалу истинностных значений.

В 1930 г. Лукасевич предложил модальный вариант трехзначной логики [24], в котором поставил задачу дать такое определение оператора возможности, что все модальные предложения логики Аристотеля имели бы в ней интерпретацию. Такое определение оператора возможности $\mathrm{M}P$ имеет вид: $\mathrm{M}P = \sim P \to P$, что означает «возможно, что P» или «если не-P, то P». Оператор необходимости $\mathrm{L}P$, следовательно, имеет вид: $\mathrm{L}P = {\sim}\mathrm{M}{\sim} P$. Очень интересен также оператор случайности или неопределенности $\mathrm{Q}P$: $\mathrm{Q}P = \mathrm{M}P \wedge \mathrm{M}{\sim} P$, который выделяет третье истинностное значение: $\mathrm{Q}{}^1\!/\!_2 = 1$; $\mathrm{Q}1 = \mathrm{Q}0 = 0$. Смысл этого оператора в том, что описывая будущие случайные события как возможные, с истинностным значением ${}^1\!/\!_2$, мы получаем истинность высказывания «возможно, что Ян завтра в полдень будет дома и, возможно, что Ян завтра в полдень не будет дома», что не получалось без использования операторов модальности. Использование оператора случайности также позволяет получить закон исключенного 4-го Васильева: $P \vee \sim P \vee \mathrm{Q}P$ и закон паранепротиворечия в форме: $\sim (P \wedge \sim P \wedge \sim \mathrm{Q}P)$. Это закон исключенного 4-го для силлогистики Аристотеля, который Н.А. Васильев получил из анализа частных суждений, а не закон его воображаемой логики, где третий вид суждений является качественно отличным от утвердительного и отрицательного и составляет вместе с ними образующие дистрибутивной решетки (§§ 3.2, 3.3).

Тем не менее, при интерпретации логики Лукасевича, как претендующей на описание индетерминизма будущих случайных событий, возникают серьезные затруднения. Проблема в том, что определения Лукасевича $1/2 = \sim 1/2$, $1/2 = 1/2 \wedge 1/2$, $1/2 = 1/2 \vee 1/2$ противоречат нашей интуиции, которая оценивает истинность таких выражений независимо от того, относится высказывание к будущему или нет, и поэтому с помощью таких определений не удается дать адекватную интерпретацию [26]. Впоследствии Я. Лукасевич, не удовлетворенный несоответствием своей логики исходным посылкам, предложил 4-значную L-модальную логику [11], в которой увеличивает число модальных операторов. Эта логика уже имеет простейшую нелинейную решетку в качестве шкалы истинностных значений, наподобие логики Васильева. Множество истинностных значений получается прямым произведением множества истинностных значений классической логики на себя (рис. 3). Получается дистрибутивная решетка четырех истинностных значений, где ее образующие «u» и «d» — два значения, соответствующих «возможности».

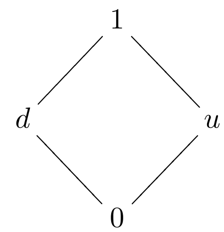


Рис. 3

Логические связки определяются как решеточные операции. Эта логика хоть и многозначная, но классическая, поэтому в ней выполняются законы исключенного третьего и непротиворечивости. Но поскольку теперь есть два варианта обозначения возможности, то Лукасевич определяет два оператора возможности и по два оператора необходимости и случайности. Однако были обнаружены совершенно интуитивно неприемлемые формулы, которые опровергают интерпретацию введенных модальных операторов как «возможность» и «необходимость» [7].

А.Р. Андерсон и Н.Д. Белнап [19] предложили рассматривать только такие формулы, в которые импликация входит только один раз и разделяет формулу на антецедент и консеквент, и получили эту же решетку. Все связки у них также решеточные, за исключением отрицания, которое имеет вид: $\sim u = u$, $\sim d = d$, а для 0 и 1 как обычно. Существуют различные расширения логики Белнапа, в том числе и с другой импликацией [8].

5. Нечеткая логика

Все рассмотренные раньше формальные логические многозначные системы естественно выражаются на языке нечеткой логики. Но нечеткая логика имеет обобщение, которое еще не было представлено. Нечеткая логика основана на теории нечетких множеств и позволяет давать неточные истинностные оценки. Она предназначена для анализа систем, в которых имеют место человеческие рассуждения и неопределенные понятия. Эта теория началась со статьи Л. Задэ в 1965 г. [29] и с тех пор бурно развивается. В этой теории следует различать два уровня нечеткости. Первый связан с понятием степени принадлежности $\mu_A(x)$ элемента x множеству A. Степень принадлежности выражается характеристической функцией со значениями в некоторой решетке M:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{наибольшая степень принадлежности, } x \in A \\ \nu, & \text{промежуточные степени принадлежности,} \\ & \nu \in M, x \in_\nu A \\ 0, & \text{наименьшая степень принадлежности, } x \notin A \end{cases}$$

Соответственно нечеткое подмножество — это подмножество элементов A, которые имеют одну степень принадлежности. Такие шкалы используют для оценки истинности выражений типа «небольшой», «не очень большой» и т.п. В логике Н.А. Васильева, 4-значной логике Я. Лукасевича и в логике Белнапа шкалы истинностных значений являются дистрибутивными решетками и степени принадлежности соответствуют степеням истинности. Но обычно в качестве шкалы M принимают отрезок [0,1]. Если М = 0,1, то нечеткие подмножества становятся обычными, четкими.

На решетке M обычным образом определяются решеточные операции, которые являются интерпретациями логических операций. В этом случае такая нечеткая логика становится обычной многозначной логикой в духе Васильева (§ 3.3). Но если шкала линейна, т.е. $M = [0{,}1]$, то отрицание определяется как в большинстве линейных шкал: $\sim \nu = 1 - \nu$. Тем не менее, такая нечеткая логика не является логикой Лукасевича, поскольку в ней не определяется импликация Лукасевича.

Второй уровень нечеткости, который и представляет дальнейшее обобщение шкалы истинностных значений, связан с тем, что оценкой истинности может быть не только элемент множества M, но и его, опять-таки нечеткое, подмножество. Это так называемая нечеткозначная логика [28]. В ней к нечетким относится само понятие степени истинности. Так, например, если высказывание «X является высоким человеком» имеет степень истинности 0,25 в нечеткой, т.е. многозначной логике, то в нечеткозначной само это значений 0,25 принадлежит нечеткому множеству «относительно невысоких людей». Это легко проиллюстрировать в категорных терминах аналогично § 3.3:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "\mu"] \arrow[d, tail, "!"'] & A \arrow[r, "T_\mu"] & \Omega \arrow[d, "f"] \\
1 \arrow[rr, "T"] & & \Omega
\end{tikzcd}$$

Рис. 4

На этом рисунке характеристическая функция T_μ подобъекта μ в общем случае является не элементом объекта истинностных значений Ω, а его подобъектом, и становится элементом только в случае, когда характеристическая функция композиции подобъекта μ и его характеристической функции тождественна: $f = id$.

Нечеткозначная логика является основой приближенных рассуждений, в которых используются неопределимые точно или количественно понятия. Для работы в такой ситуации недостаточно просто многозначных логик потому, что кроме неточной оценки истинности терма нужно еще так же неточно оценивать истинность вывода. Таким образом, в нечеткозначной логике являются неточными и значения истинности, и правила вывода. Однозначного определения таких правил вывода пока нет. Но это не все трудности — для нечетких подмножеств с нечеткой характеристической функцией иначе надо определять решеточные операции. Возможно, что категорная интерпретация нечеткой логики поможет прояснить эту ситуацию.

6. Заключение

Мы рассмотрели в этой работе историю понятия многозначности в логике. Мы видели, что уже в Древней Индии логическая многозначность возникла, по сути, как множественность форм отрицания. Позднее, уже в XX веке, Н.А. Васильев на основе возможной вариативности понимания логики Аристотеля приходит к идее многозначности в результате глубокого осмысления понятия отрицания. И мы видели, что частный случай его логики почти дословно совпадает с одной из форм логики Древней Индии.

Я. Лукасевич проблемой отрицания не занимался, он строил свою систему символической логики исходя из других мотивов. Но все логики с такой же, как у Лукасевича, шкалой истинностных значений различаются, в первую очередь, по своему определению отрицания. И логики с нелинейными шкалами тоже классифицируются по этому признаку — отрицание может быть решеточным, как в интуиционистской логике, или в приведенной модели логики Васильева, или в L-модальной логике Лукасевича, или искусственным, как в логике Белнапа.

Таким образом, первый вывод состоит в том, что различные варианты многозначности в логике порождаются, в основном, трактовкой операции отрицания независимо от исходных мотивов их создателей. Но важны также и интерпретации самих истинностных значений и операций — семантика формальных систем.

И здесь мы приходим ко второму выводу — использование для решения семантических проблем внутри теории внешних средств не приводит к желаемому результату. Каждая система имеет ту содержательную семантику, которая порождается ее внутренней структурой, и привлечение иных структур порождает и иную семантику.

Действительно, успех Н.А. Васильева был обусловлен тем, что он работал внутри силлогистики Аристотеля, использовал ее внутренние средства и провел анализ ее проблем, развивая, по сути, представления Аристотеля. Напротив, Я. Лукасевич, обозначив проблему в логике Аристотеля, формальным образом привлек для ее решения внешние средства символической логики без глубокого содержательного анализа внутри самой этой системы, его определения отрицания и импликации произвольны и семантически не обоснованы. Не удивительно, что полученная система, которая оказалась очень интересной, тем не менее, не имеет отношения к той проблеме, решить которую она была призвана.

В отличие от Лукасевича, Д.А. Бочвару удалось построить формальную систему на основе единой согласованной интерпретации третьего истинностного значения во всех связках (любая операция с бессмысленностью снова бессмысленна) и его система имеет содержательное обоснование, как и логика Васильева.

Вообще, категорная интерпретация логики Н.А. Васильева оказала существенную помощь в понимании его идей. Удалось придать естественный смысл его индифферентному высказыванию путем определения отрицания «в некотором смысле», прояснить соответствие понимания Васильевым различных типов суждений образующим дистрибутивной решетки и его представления об отрицании решеточному отрицанию. Выяснилось, что закон паранепротиворечия по Васильеву можно интерпретировать как конъюнкцию утверждения и его отрицания «в некотором смысле» и что выполняется он в определенных топосах с небулевой решеткой истинностных значений, что несколько корректирует выводы Н.А. Васильева о качественно различных типах суждений (образующих решетки) в воображаемой логике — по крайней мере некоторые из них должны иметь пересекающиеся денотаты для того, чтобы логика была неклассической.

Литература

[1] *Бочвар Д.А.* Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления // Математический сборник. 1938. Т.4. № 2. С. 287–308.

[2] *Васильев Н.А.* Логика и металогика // *Васильев Н.А.* Воображаемая логика. Избранные труды. М.: Наука, 1989. С. 94-123

[3] *Васильев Н.А.* О частных суждениях, о треугольнике противоположностей, о законе исключенного четвертого // *Васильев Н.А.* Воображаемая логика. Избранные труды. М.: Наука, 1989, С. 12–53

[4] *Васильев Н.А.* Воображаемая (неаристотелева) логика // *Васильев Н.А.* Воображаемая логика. Избранные труды. М.: Наука, 1989, С. 53–94.

[5] Древнеиндийская философия. М.: Мысль, 1972. 363 с.

[6] *Зайцев Д.В., Маркин В.И.* Воображаемая логика-2: реконструкция одного из вариантов знаменитой логической системы Н.А. Васильева // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН 1998. М.: ИФ РАН, 1999. С. 134–142.

[7] *Ивин А.А.* Парадоксы модальной логики Я. Лукасевича // Философские науки. 1980, № 1, С. 75–83.

[8] *Карпенко А.С.* Развитие многозначной логики. М.: Изд. ЛКИ, 2010. 444 с.

[9] *Костюк Т.П., Маркин В.И.* Формальная реконструкция воображаемой логики Н.А. Васильева // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. Материалы V Общероссийской научной конференции. СПб.: Изд. СПбГУ, 1998. С. 154–159.

[10] *Легович Ю.С. Максимов Д.Ю.* Логические модели выбора решения в самоорганизующихся системах // Проблемы управления. 2013. № 3. С. 18–26.

[11] *Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М.: ИЛ, 1959. 313 с.

[12] *Лукасевич Я.* О детерминизме // Логические исследования. 1993. Вып. 2. С. 190–205.

[13] *Маковельский А.О.* История логики. М.: Наука, 1967. 502 с.

[14] *Максимов Д.Ю.* Реконфигурирование системной иерархии методами многозначной логики // Автоматика и телемеханика. 2016. № 3. С. 123–136.

[15] *Маркин В.И.* Погружение воображаемой логики Н.А. Васильева в кванторную трехзначную логику // Логические исследования. 2000. Вып. 7. С. 252–260.

[16] *Смирнов В.А.* Логические идеи Н.А. Васильева и современная логика // *Васильев Н.А.* Воображаемая логика. Избранные труды. М.: Наука, 1989. С. 229–260.

[17] *Тереньтев А.А.* К интерпретации логико-методологических схем индийской религиозной философии. // Философские вопросы буддизма. Н.: Наука, 1984. С. 59–72.

[18] *Чаттерджи С., Датта Д.* Древняя индийская философия. М.: Изд. иностр. лит., 1954. 408 с.

[19] *Anderson A.R., Belnap N.D.* The pure calculus of entailement // The Journal of Simbolic Logic. 1962. Vol. 27(1). P. 19–52.

[20] *Arruda A.J.* On the imaginary logic of N.A. Vasiliev // Proceedings of Fourth Latin-American Symposium of Mathematical Logic / Eds. by A.I.Arruda, R.Chuaqui and N.C.A. da Costa. North-Holland, 1979. P. 1–41.

[21] *Basham A.L.* The History and Doctrines of Ajivikas. London: Luzac, 1951. 316 p.

[22] *Heiting A.* Die Formalen Regeln der intuitionistischen Logic // Sitzungsberichte der Preussischen Academie der Wissenschaften. Berlin: Phys.-Math. Klasse, 1930. P. 42–56.

[23] *Lucasiewicz J.* On three-valued logic // *Lucasiewicz J.* Selected works / Ed. by L. Borkowski. Amsterdam: N.-H. Pub.Co., 1970. P. 87–88.

[24] *Lucasiewicz J.* Philosophical remarks on many-valued systems of propositional logic // *Lucasiewicz J.* Selected works / Ed. by L. Borkowski. Amsterdam: N.-H. Pub.Co., 1970. P. 153–178.

[25] *Maximov D.Yu.* N.Vasiliev's logic ideas and categorical semantic of Many-Valued Logic // Logica Universalis. 2016. Vol. 10. P. 1–23.

[26] *Mox Shaw-Kwei* Logical paradoxes for many-valued system // The Journal of Symbolic Logic. 1954. Vol. 19(10). P. 37–40.

[27] *Post E.L.* Introduction to a general theory of elementary propositions // From Frege to Gedel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931 / Ed. by Jean van Heijenoort. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1967. P. 264–283.

[28] *Zadeh L.A.* The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning // Information and Control. 1975. № 8. P. 199–249.

[29] *Zadeh L.A.* Fuzzy sets // Information and Control. 1965. № 8. P. 338–353.

D.Yu. Maximov

N.A. Vasiliev's Logic and Many-valued Logics

Maximov Dmitriy Yurievich
V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences.
65 Profsoyuznaya St., Moscow, 117997, Russian Federation.
E-mail: phoenixjhanjaa@yandex.ru

The history of the notion of many-valuedness is considered in unified manner as the history of negation. The main attention is being paid to N.A. Vasiliev logic, its connections with indian logic of syadvada, with Lukasiewicz logics and logic of D. Bochvar. Many-valued nature of Vasiliev logic and it's formal model in topoi are cleared. A new notion of negation "from some viewpoint" is introduced in topoi. Then Vasiliev set of statement types appears as the set of elements forming a truth values distributive lattice of a topos. These elements translates one into the other by negation "from correspondent viewpoint" and Vasiliev negation understanding corresponds to lattice negation (pseudo-compliment). Vasiliev understanding of an excluded n-th rule and paraconsistency is discussed. Vasiliev considered his excluded n-th rule as disjunction of lattice forming elements, as disjunction of different negated "from some viewpoint" statement construction ways, and consistent rule as conjunction of a statement and its negation "from some viewpoint". The conditions of these rules modeling in categories are specified.

Keywords: Vasiliev logic, many–valued logic, categorical semantics

References

[1] Bochvar, D.A. "Ob odnom trekhznachnom ischislenii i ego primenenii k analizu paradoksov klassicheskogo rasshirennogo funktsional'nogo ischisleniya" [On a three-digit year and its application to the analysis of the paradoxes of the classical extended functional calculus], *Matematicheskii sbornik* [Mathematical Collection]. 1938. T.4. 2. pp. 287–308. (In Russian)

[2] Vasil'ev, N.A. "Logika i metalogika" [Logic and metalogic], in: N.A. Vasil'ev, *Voobrazhaemaya logika. Izbrannye trudy* [Imaginary Logic. Selected Works]. M.: Nauka, 1989. pp. 94–123. (In Russian)

[3] Vasil'ev, N.A. "O chastnykh suzhdeniyakh, o treugol'nike protivopolozhnostei, o zakone isklyuchennogo chetvertogo" [On the private judgments of the triangle of opposites, of the law of excluded fourth], in: N.A. Vasil'ev, *Voobrazhaemaya logika. Izbrannye trudy* [Imaginary Logic. Selected Works]. M.: Nauka, 1989, pp. 12–53. (In Russian)

[4] Vasil'ev, N.A. "Voobrazhaemaya (nearistoteleva) logika" [Imaginary (nearistoteleva) logic], in: N.A. Vasil'ev, *Voobrazhaemaya logika. Izbrannye trudy* [Imaginary Logic. Selected Works]. M.: Nauka, 1989, pp. 53–94. (In Russian)

[5] *Drevneindiiskaya filosofiya* [Ayurveda philosophy]. M.: Mysl', 1972. 363 pp. (In Russian)

[6] Zaitsev, D.V., Markin V.I. "Voobrazhaemaya logika-2: rekonstruktsiya odnogo iz variantov znamenitoi logicheskoi sistemy N.A. Vasil'eva" [Imaginary Logic 2: reconstruction of one of the variants of the famous logic systems NA Vasilyeva], *Trudy nauchno-issledovatel'skogo seminara logicheskogo tsentra Instituta filosofii RAN 1998* [Proceedings of the Scientific-Research Seminar logical center of the Institute of Philosophy, 1998]. M.: IF RAN, 1999. pp. 134–142. (In Russian)

[7] Ivin, A.A. "Paradoksy modal'noi logiki Ya. Lukasevicha" [Paradoxes of modal logics of Lukasiewicz], *Filosofskie nauki* [Philosophical Sciences], 1980, 1, pp. 75–83. (In Russian)

[8] Karpenko, A.S. *Razvitie mnogoznachnoi logiki* [The development of multi-valued logic]. M.: Izd. LKI, 2010. 444 pp. (In Russian)

[9] Kostyuk, T.P., Markin, V.I. "Formal'naya rekonstruktsiya voobrazhaemoi logiki N.A. Vasil'eva" [The formal reconstruction of an imaginary logic NA Vasilyeva], *Sovremennaya logika: problemy teorii, istorii i primeneniya v nauke. Materialy V Obshcherossiiskoi nauchnoi konferentsii* [Modern logic: problems of the theory, history and application in science. Proceedings of the V All-Russian scientific conference]. SPb.: Izd. SPbGU, 1998. pp. 154–159. (In Russian)

[10] Legovich, Yu.S., Maksimov, D.Yu. "Logicheskie modeli vybora resheniya v samoorganizuyushchikhsya sistemakh" [Logic model selection decisions in self-organizing systems], *Problemy upravleniya* [Problems of management], 2013, no 3, pp. 18–26. (In Russian)

[11] Lukasevich, Ya. *Aristotelevskaya sillogistika s tochki zreniya sovremennoi formal'noi logiki* [Aristotelian syllogistic terms of modern formal logic]. M.: IL, 1959. 313 pp. (In Russian)

[12] Lukasevich, Ya. "O determinizme" [About determinism], *Logicheskie issledovaniya* [Logical Investigations], 1993, vol.2, pp.190–205. (In Russian)

[13] Makovel'skii, A.O. *Istoriya logiki* [History of logic]. M.: Nauka, 1967. 502 pp. (In Russian)

[14] Maksimov, D.Yu. "Rekonfigurirovanie sistemnoi ierarkhii metodami mnogoznachnoi logiki" [Reconfiguring the system hierarchy of methods of multi-valued logic], *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 2016, № 3, pp. 123–136. (In Russian)

[15] Markin, V.I. "Pogruzhenie voobrazhaemoi logiki N.A. Vasil'eva v kvantornuyu trekhznachnuyu logiku" [Dive imaginary logic NA Vasilyeva quantifier in three-valued logic], *Logicheskie issledovaniya* [Logical Investigations], 2000, vol.7, pp. 252–260.(In Russian)

[16] Smirnov, V.A. "Logicheskie idei N.A. Vasil'eva i sovremennaya logika" [The logical idea NA Vasilyev and modern logic], in: N.A. Vasil'ev,

Voobrazhaemaya logika. Izbrannye trudy [Imaginary logic. Selected works]. M.: Nauka, 1989, pp. 229–260. (In Russian)

[17] Teren'tev, A.A. "K interpretatsii logiko-metodologicheskikh skhem indiiskoi religioznoi filosofii" [The interpretation of the logical and methodological schemes of the Indian religious philosophy], *Filosofskie voprosy buddizma* [Philosophical Problems of Buddhism]. N.: Nauka, 1984, pp. 59–72. (In Russian)

[18] Chatterdzhi, S., Datta, D. *Drevnyaya indiiskaya filosofiya* [Ancient Indian philosophy]. M.: Izd. inostr. lit., 1954. 408 pp. (In Russian)

[19] Anderson, A.R., Belnap, N.D. "The pure calculus of entailement", *The Journal of Simbolic Logic*, 1962, vol. 27(1), pp. 19–52.

[20] Arruda, A.J. "On the imaginary logic of N.A. Vasiliev", *Proceedings of Fourth Latin-American Symposium of Mathematical Logic*, eds. by A.I. Arruda, R. Chuaqui and N.C.A. da Costa. North-Holland, 1979. pp. 1–41.

[21] Basham, A.L. *The History and Doctrines of Ajivikas.* London: Luzac, 1951. 316 pp.

[22] Heiting, A. "Die Formalen Regeln der intuitionistischen Logic", *Sitzungsberichte der Preussischen Academie der Wissenschaften*, Berlin: Phys.-Math. Klasse, 1930. pp. 42–56.

[23] Lucasiewicz, J. "On three-valued logic", in: J Lucasiewicz, *Selected works*, ed. by L. Borkowski. Amsterdam: N.- H. Pub.Co., 1970, pp. 87–88.

[24] Lucasiewicz, J. "Philosophical remarks on many-valued systems of propositional logic", in: J Lucasiewicz *Selected works*, ed. by L. Borkowski. Amsterdam: N.- H. Pub.Co., 1970, pp. 153–178.

[25] Maximov, D.Yu. "N.Vasiliev's logic ideas and categorical semantic of manyvalued logic", in: J Lucasiewicz, *Logica Universalis*, ed. by L. Borkowski. 2016, vol. 10, pp. 1–23.

[26] Mox, Shaw-Kwei. "Logical paradoxes for many-valued system", *The Journal of Symbolic Logic*, 1954, vol. 19(10), pp. 37–40.

[27] Post, E.L. "Introduction to a general theory of elementary propositions", *From Frege to Gedel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*, ed. by Jean van Heijenoort. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1967. pp. 264–283.

[28] Zadeh, L.A. "The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning", *Information and Control*, 1975, no 8, pp. 199-249.

[29] Zadeh, L.A. "Fuzzy sets", *Information and Control*, 1965, no 8, pp. 338–353.

Логические исследования
2016. Т. 22. № 1. С. 108–124
УДК 510.644

Logical Investigations
2016, vol. 22, no 1, pp. 108–124

Y.I. Petrukhin

Correspondence Analysis for First Degree Entailment

Petrukhin Yaroslav Igorevich
Department of Logic, Faculty of Philosophy, Lomonosov Moscow State University.
Lomonosovsky prospekt, 27-4, GSP-1, Moscow, 119991, Russian Federation.
e-mail: yaroslav.petrukhin@mail.ru

In this paper natural deduction systems for four-valued logic **FDE** (first degree entailment) and its extensions are constructed. At that B. Kooi and A. Tamminga's method of correspondence analysis is used. All possible four-valued unary ($\star$) and binary ($\circ$) propositional connectives which could be added to **FDE** are considered. Then **FDE** is extended by Boolean negation ($\sim$) and every entry (line) of truth tables for $\star$ and $\circ$ is characterized by inference scheme. By adding all inference schemes characterizing truth tables for $\star$ and $\circ$ as rules of inference to the natural deduction for **FDE**, natural deduction for extension of **FDE** is obtained. In addition, applying of correspondence analysis gives axiomatizations of implicative extensions of **FDE** including $\mathbf{BN_4}$ and some extensions by classical implications.

Keywords: correspondence analysis, natural deduction, first degree entailment, Belnap-Dunn logic, four-valued logic, implicative extensions, classical implication

1. Introduction

A history of the logic **FDE** dates back to N.D. Belnap's abstract [5] and A.R. Anderson and N.D. Belnap's paper [1]. They investigate a system of first degree (tautological) entailment which inferences avoid paradoxes of classical entailment and contain connectives $\neg$, $\wedge$, and $\vee$. An implication is occured in a formula only once: as the main connective. In other words, all first degree formulas are of the form $A \to B$, where A and B do not contain $\to$. Since the definitions of $\to$ and $\models$ are equivalent, $\to$ is replaced by $\models$ in many papers on this subject (including this one). Moreover, Anderson and Belnap proved that **FDE** is a first degree fragment of relevant logic **E**, i.e. $A \to B$ (where A and B don't contain $\to$) is provable in **E** iff $A \to B$ is a first degree (tautological) entailment.

There are various semantics for **FDE**, but in this paper only two of them will be need: N.D. Belnap's semantics [3, 4] and J.M. Dunn's one [8]. They will be discussed in the next section.

The first formalisation of **FDE** was introduced in [1]. Since then, various studies of proof systems for **FDE** have been carried out. For this paper G. Priest's monography [15] is of particular importance: natural deduction system built in it is actively used here. It should be noted that there are also investigations devoted to extensions of **FDE**. (Some of them are considered in the section 6.)

This paper is a kind of continuation and generalization of these studies: it is an attempt to explore natural deductions systems axiomatizing all possible truth-table expansions of **FDE**[1]. Solving this problem, I use the technique of correspondence analysis, first applied by B. Kooi and A. Tamminga [13] for three-valued logic $\mathbf{K_3^2}$ (**LP**) [16] and its extensions[2].

In [20] A. Tamminga explains the idea of correspondence analysis applied to **LP** as follows:

> "<...> characterize every possible single entry in the truth table of a unary or a binary truth-functional operator by a basic inference scheme. As a consequence, each unary and each binary truth-functional operator is characterized by a set of basic inference schemes. Kooi and Tamminga show that if we add the inference schemes that characterize an operator to a natural deduction system for **LP**, we immediately obtain a natural deduction system that is sound and complete with respect to the logic that contains, next to **LP**'s negation, disjunction, and conjunction, the additional operator" [20, p. 256].

Thus, this paper continues B. Kooi and A. Tamminga's proof-theoretic studies of three-valued logics, spreading them on the field of four-valued logics and thereby offering universal instrument of axiomatization of all possible truth-table extensions of **FDE+**.

2. Semantics

N.D. Belnap's semantics [3, 4]. Consider a matrix $\mathfrak{M}_4 = \langle\{1, b, n, 0\}, \neg, \wedge, \vee, \{1, b\}\rangle$ of the logic **FDE**, a matrix $\mathfrak{M}_4^+ = \langle\{1, b, n, 0\}, \neg, \sim, \wedge, \vee, \{1, b\rangle\}$ of the logic **FDE+**, and a matrix $\mathfrak{M}_4^\# = \langle\{1, b, n, 0\}, \neg, \sim, \wedge, \vee, \star_1, \ldots, \star_n, \circ_1, \ldots, \circ_m, \{1, b\rangle\}$ of the logic **FDE#**.

---

[1]Note that for some technical reasons before constructing such systems **FDE** (alphabet of which language contains $\neg$ (De Morgan negation), $\wedge$ (conjunction) and $\vee$ (disjunction)) should be expanded by Boolean negation $\sim$. Let us denote this logic through **FDE+**.

[2]In A. Tamminga's paper [20] the similar result is obtained for $\mathbf{K_3}$ [12, 11] and its extensions.

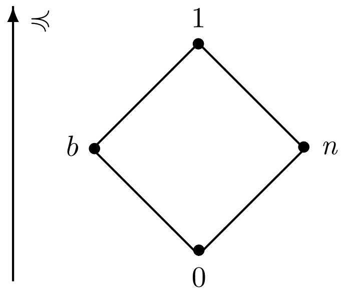
A	$\neg$	$\sim$
1	0	0
b	b	n
n	n	b
0	1	1

$\wedge$	1	b	n	0
1	1	b	n	0
b	b	b	0	0
n	n	0	n	0
0	0	0	0	0

$\vee$	1	b	n	0
1	1	1	1	1
b	1	b	1	b
n	1	1	n	n
0	1	b	n	0

Unary operators $\star_1, \ldots, \star_n$ and binary operators $\circ_1, \ldots, \circ_m$ are *arbitrary.* In the particular case they can be connectives of **FDE**+ or all possible four-valued connectives. By these reason I do not give here truth tables for them.

The values are ordered as follows: $0 \preccurlyeq n$, $0 \preccurlyeq b$, $n \preccurlyeq 1$, $b \preccurlyeq 1$; n and b are incomparable (see a picture below).



It is natural to regard the value 1 as "true", b as "true and false", n as "not true and not false" and 0 as "false". Note that N.D. Belnap himself defined the entailment through the relation $\preccurlyeq$. It was J.M. Font [9] who first proved that it is possible to redefine the entailment relation through designated values. The same result was independently obtained by D.V. Zaitsev and Y.V. Shramko [22]. Moreover, Y. Shramko and H. Wansing [18] proved that it is possible to define entailment through set $\{0, b\}$ of *anti*designated values.

J.M. Dunn's semantics [8]. Truth values here are subsets of a set of classical truth values $\{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}\}$, that is $\{\mathfrak{t}\}, \{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}\}, \emptyset$ and $\{\mathfrak{f}\}$ which are analogues of values 1, b, n and 0 from Belnap's semantics. The conditions of truth and falsity for formulas are as follows (v is a valuation):

$$\mathfrak{t} \in v(\neg A) \Leftrightarrow \mathfrak{f} \in v(A);$$
$$\mathfrak{f} \in v(\neg A) \Leftrightarrow \mathfrak{t} \in v(A);$$
$$\mathfrak{t} \in v({\sim}A) \Leftrightarrow \mathfrak{t} \notin v(A);$$
$$\mathfrak{f} \in v({\sim}A) \Leftrightarrow \mathfrak{f} \notin v(A);$$
$$\mathfrak{t} \in v(A \wedge B) \Leftrightarrow \mathfrak{t} \in v(A) \mathbin{\dot\wedge} \mathfrak{t} \in v(B);$$
$$\mathfrak{f} \in v(A \wedge B) \Leftrightarrow \mathfrak{f} \in v(A) \mathbin{\dot\vee} \mathfrak{f} \in v(B);$$
$$\mathfrak{t} \in v(A \vee B) \Leftrightarrow \mathfrak{t} \in v(A) \mathbin{\dot\vee} \mathfrak{t} \in v(B);$$
$$\mathfrak{f} \in v(A \vee B) \Leftrightarrow \mathfrak{f} \in v(A) \mathbin{\dot\wedge} \mathfrak{f} \in v(B).$$

In terms of J.M. Dunn's semantics the relation of entailment in logics **FDE**, **FDE+** and **FDE#** is defined as follows:

$$\Gamma \models A \Leftrightarrow \dot{\forall} v(\underset{B\in\Gamma}{\dot{\forall} B}\ \mathsf{t} \in v(B) \Rightarrow \mathsf{t} \in v(A)).$$

3. Inference schemes for arbitrary connectives

Remark 1 (About designations). Let us denote through $\mathcal{L}^{\#}$ a language of **FDE#**, through *Prop* a set of all propositional variables of the language $\mathcal{L}^{\#}$, through $Form^{\#}$ a set of all $\mathcal{L}^{\#}$-formulas (formulas in the language $\mathcal{L}^{\#}$); through $f_\star$ a truth table for $\star$ and through $f_\circ$ a truth table for $\circ$. Let $x, y, z \in \{1, b, n, 0\}$, then let us denote through $f_\star(x) = y$ such entry (line) of a truth table $f_\star$ that $\dot{\forall} A \dot{\forall} v(v(A) = x \Rightarrow v(\star A) = y)$; and through $f_\circ(x, y) = z$ such entry of a truth table $f_\circ$ that $\dot{\forall} A \dot{\forall} v((v(A) = x \mathbin{\dot{\wedge}} v(B) = y) \Rightarrow v(A \circ B) = z)$.

So, in this section propositions 1 and 2 are formulated. The first one states that for every entry of the form $f_\star(x) = y$ a characteristic inference scheme corresponds. The second one states that for every entry of the form $f_\circ(x, y) = z$ a characteristic inference scheme corresponds. It is clear that every operator $\star$ has 4 entries and it is characterised by 4 inference schemes; and every operator $\circ$ has 16 entries and it is characterised by 16 inference schemes. In the section 5 it is proved that by adding all inference schemes which characterise operators $\star_1, \dots, \star_n, \circ_1, \dots, \circ_m$ as rules of inference to **FDE+** we get not only sound, but complete natural deduction system for **FDE#** (i.e. for **FDE+** extended by $\star_1, \dots, \star_n, \circ_1, \dots, \circ_m$).

Proposition 1. *For every $\mathcal{L}^{\#}$-formula A:*

$$f_\star(0) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \quad {\sim} A, \neg A \models {\sim}\star A \wedge \neg \star A \\ n & \Leftrightarrow \quad {\sim} A, \neg A \models {\sim}\star A \wedge {\sim}\neg \star A \\ b & \Leftrightarrow \quad {\sim} A, \neg A \models \star A \wedge \neg \star A \\ 1 & \Leftrightarrow \quad {\sim} A, \neg A \models \star A \wedge {\sim}\neg \star A \end{cases}$$

$$f_\star(n) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \quad {\sim} A, {\sim}\neg A \models {\sim}\star A \wedge \neg \star A \\ n & \Leftrightarrow \quad {\sim} A, {\sim}\neg A \models {\sim}\star A \wedge {\sim}\neg \star A \\ b & \Leftrightarrow \quad {\sim} A, {\sim}\neg A \models \star A \wedge \neg \star A \\ 1 & \Leftrightarrow \quad {\sim} A, {\sim}\neg A \models \star A \wedge {\sim}\neg \star A \end{cases}$$

$$f_\star(b) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \quad A, \neg A \models {\sim}\star A \wedge \neg \star A \\ n & \Leftrightarrow \quad A, \neg A \models {\sim}\star A \wedge {\sim}\neg \star A \\ b & \Leftrightarrow \quad A, \neg A \models \star A \wedge \neg \star A \\ 1 & \Leftrightarrow \quad A, \neg A \models \star A \wedge {\sim}\neg \star A \end{cases}$$

$$f_\star(1) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \quad A, \sim\neg A \models \sim\star A \wedge \neg\star A \\ n & \Leftrightarrow \quad A, \sim\neg A \models \sim\star A \wedge \sim\neg\star A \\ b & \Leftrightarrow \quad A, \sim\neg A \models \star A \wedge \neg\star A \\ 1 & \Leftrightarrow \quad A, \sim\neg A \models \star A \wedge \sim\neg\star A \end{cases}$$

Proof. Suppose $f_\star(0) = 1$. Let us show that $\dot\forall A$: $\sim A, \neg A \models \star A \wedge \sim\neg\star A$. According to the remark 1, $f_\star(0) = 1$ means that $f_\star$ has an entry such that $\dot\forall A \dot\forall v(v(A) = 0 \Rightarrow v(\star A) = 1)$. In the terms of J.M. Dunn's semantics the last statement is interpreted as (α) $\dot\forall A\dot\forall v((\mathfrak{t} \notin v(A)\ \dot\wedge\ \mathfrak{f} \in v(A)) \Rightarrow (\mathfrak{t} \in v(\star A)\ \dot\wedge\ \mathfrak{f} \notin v(\star A)))$. Now suppose (β) $\mathfrak{t} \in v(\sim A)$ and $\mathfrak{t} \in v(\neg A)$. Therefore, (γ) $\mathfrak{t} \notin v(A)$ and $\mathfrak{f} \in v(A)$. From (α) and (γ) obtain that (δ) $\mathfrak{t} \in v(\star A)\ \dot\wedge\ \mathfrak{f} \notin v(\star A))$. Hence, (ε) $\mathfrak{t} \in v(\star A \wedge \sim\neg\star A)$. From (β) and (ε) obtain (ζ) $\dot\forall A\dot\forall v((\mathfrak{t} \in v(\sim A)\ \dot\wedge\ \mathfrak{t} \in v(\neg A)) \Rightarrow \mathfrak{t} \in v(\star A \wedge \sim\neg\star A))$. Therefore, (η) $\dot\forall A$: $\sim A, \neg A \models \star A \wedge \sim\neg\star A$.

Suppose (θ) $\dot\forall A$: $\sim A, \neg A \models \star A \wedge \sim\neg\star A$, let us prove that $f_\star(0) = 1$. From (θ) obtain (ι) $\dot\forall A\dot\forall v((\mathfrak{t} \in v(\sim A)\ \dot\wedge\ \mathfrak{t} \in v(\neg A)) \Rightarrow \mathfrak{t} \in v(\star A \wedge \sim\neg\star A))$. From (ι) follows (κ) $\dot\forall A\dot\forall v((\mathfrak{t} \notin v(A)\ \dot\wedge\ \mathfrak{f} \in v(A)) \Rightarrow (\mathfrak{t} \in v(\star A)\ \dot\wedge\ \mathfrak{f} \notin v(\star A)))$, which is equivalent to (λ) $\dot\forall A\dot\forall v(v(A) = 0 \Rightarrow v(\star A) = 1)$. According to the remark 1, $f_\star(0) = 1$ is an abbreviation for (λ).

The other cases are proved similarly. □

Now let us formulate the analogues proposition for binary operators.

Proposition 2. *For every $\mathcal{L}^\#$-formulas A and B:*

$$f_\circ(0,0) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \quad \sim A, \neg A, \sim B, \neg B \models \sim(A \circ B) \wedge \neg(A \circ B) \\ n & \Leftrightarrow \quad \sim A, \neg A, \sim B, \neg B \models \sim(A \circ B) \wedge \sim\neg(A \circ B) \\ b & \Leftrightarrow \quad \sim A, \neg A, \sim B, \neg B \models (A \circ B) \wedge \neg(A \circ B) \\ 1 & \Leftrightarrow \quad \sim A, \neg A, \sim B, \neg B \models (A \circ B) \wedge \sim\neg(A \circ B) \end{cases}$$

$$f_\circ(0,n) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \quad \sim A, \neg A, \sim B, \sim\neg B \models \sim(A \circ B) \wedge \neg(A \circ B) \\ n & \Leftrightarrow \quad \sim A, \neg A, \sim B, \sim\neg B \models \sim(A \circ B) \wedge \sim\neg(A \circ B) \\ b & \Leftrightarrow \quad \sim A, \neg A, \sim B, \sim\neg B \models (A \circ B) \wedge \neg(A \circ B) \\ 1 & \Leftrightarrow \quad \sim A, \neg A, \sim B, \sim\neg B \models (A \circ B) \wedge \sim\neg(A \circ B) \end{cases}$$

$$f_\circ(0,b) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \quad \sim A, \neg A, B, \neg B \models \sim(A \circ B) \wedge \neg(A \circ B) \\ n & \Leftrightarrow \quad \sim A, \neg A, B, \neg B \models \sim(A \circ B) \wedge \sim\neg(A \circ B) \\ b & \Leftrightarrow \quad \sim A, \neg A, B, \neg B \models (A \circ B) \wedge \neg(A \circ B) \\ 1 & \Leftrightarrow \quad \sim A, \neg A, B, \neg B \models (A \circ B) \wedge \sim\neg(A \circ B) \end{cases}$$

$$f_\circ(0,1) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \quad \sim A, \neg A, B, \sim\neg B \models \sim(A \circ B) \wedge \neg(A \circ B) \\ n & \Leftrightarrow \quad \sim A, \neg A, B, \sim\neg B \models \sim(A \circ B) \wedge \sim\neg(A \circ B) \\ b & \Leftrightarrow \quad \sim A, \neg A, B, \sim\neg B \models (A \circ B) \wedge \neg(A \circ B) \\ 1 & \Leftrightarrow \quad \sim A, \neg A, B, \sim\neg B \models (A \circ B) \wedge \sim\neg(A \circ B) \end{cases}$$

$$f_\circ(n,0) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \quad {\sim}A,\ {\sim}\neg A,\ {\sim}B,\ \neg B \models {\sim}(A \circ B) \wedge \neg(A \circ B) \\ n & \Leftrightarrow \quad {\sim}A,\ {\sim}\neg A,\ {\sim}B,\ \neg B \models {\sim}(A \circ B) \wedge {\sim}\neg(A \circ B) \\ b & \Leftrightarrow \quad {\sim}A,\ {\sim}\neg A,\ {\sim}B,\ \neg B \models (A \circ B) \wedge \neg(A \circ B) \\ 1 & \Leftrightarrow \quad {\sim}A,\ {\sim}\neg A,\ {\sim}B,\ \neg B \models (A \circ B) \wedge {\sim}\neg(A \circ B) \end{cases}$$

$$f_\circ(n,n) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \quad {\sim}A,\ {\sim}\neg A,\ {\sim}B,\ {\sim}\neg B \models {\sim}(A \circ B) \wedge \neg(A \circ B) \\ n & \Leftrightarrow \quad {\sim}A,\ {\sim}\neg A,\ {\sim}B,\ {\sim}\neg B \models {\sim}(A \circ B) \wedge {\sim}\neg(A \circ B) \\ b & \Leftrightarrow \quad {\sim}A,\ {\sim}\neg A,\ {\sim}B,\ {\sim}\neg B \models (A \circ B) \wedge \neg(A \circ B) \\ 1 & \Leftrightarrow \quad {\sim}A,\ {\sim}\neg A,\ {\sim}B,\ {\sim}\neg B \models (A \circ B) \wedge {\sim}\neg(A \circ B) \end{cases}$$

$$f_\circ(n,b) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \quad {\sim}A,\ {\sim}\neg A,\ B,\ \neg B \models {\sim}(A \circ B) \wedge \neg(A \circ B) \\ n & \Leftrightarrow \quad {\sim}A,\ {\sim}\neg A,\ B,\ \neg B \models {\sim}(A \circ B) \wedge {\sim}\neg(A \circ B) \\ b & \Leftrightarrow \quad {\sim}A,\ {\sim}\neg A,\ B,\ \neg B \models (A \circ B) \wedge \neg(A \circ B) \\ 1 & \Leftrightarrow \quad {\sim}A,\ {\sim}\neg A,\ B,\ \neg B \models (A \circ B) \wedge {\sim}\neg(A \circ B) \end{cases}$$

$$f_\circ(n,1) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \quad {\sim}A,\ {\sim}\neg A,\ B,\ {\sim}\neg B \models {\sim}(A \circ B) \wedge \neg(A \circ B) \\ n & \Leftrightarrow \quad {\sim}A,\ {\sim}\neg A,\ B,\ {\sim}\neg B \models {\sim}(A \circ B) \wedge {\sim}\neg(A \circ B) \\ b & \Leftrightarrow \quad {\sim}A,\ {\sim}\neg A,\ B,\ {\sim}\neg B \models (A \circ B) \wedge \neg(A \circ B) \\ 1 & \Leftrightarrow \quad {\sim}A,\ {\sim}\neg A,\ B,\ {\sim}\neg B \models (A \circ B) \wedge {\sim}\neg(A \circ B) \end{cases}$$

$$f_\circ(b,0) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \quad A,\ \neg A,\ {\sim}B,\ \neg B \models {\sim}(A \circ B) \wedge \neg(A \circ B) \\ n & \Leftrightarrow \quad A,\ \neg A,\ {\sim}B,\ \neg B \models {\sim}(A \circ B) \wedge {\sim}\neg(A \circ B) \\ b & \Leftrightarrow \quad A,\ \neg A,\ {\sim}B,\ \neg B \models (A \circ B) \wedge \neg(A \circ B) \\ 1 & \Leftrightarrow \quad A,\ \neg A,\ {\sim}B,\ \neg B \models (A \circ B) \wedge {\sim}\neg(A \circ B) \end{cases}$$

$$f_\circ(b,n) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \quad A,\ \neg A,\ {\sim}B,\ {\sim}\neg B \models {\sim}(A \circ B) \wedge \neg(A \circ B) \\ n & \Leftrightarrow \quad A,\ \neg A,\ {\sim}B,\ {\sim}\neg B \models {\sim}(A \circ B) \wedge {\sim}\neg(A \circ B) \\ b & \Leftrightarrow \quad A,\ \neg A,\ {\sim}B,\ {\sim}\neg B \models (A \circ B) \wedge \neg(A \circ B) \\ 1 & \Leftrightarrow \quad A,\ \neg A,\ {\sim}B,\ {\sim}\neg B \models (A \circ B) \wedge {\sim}\neg(A \circ B) \end{cases}$$

$$f_\circ(b,b) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \quad A,\ \neg A,\ B,\ \neg B \models {\sim}(A \circ B) \wedge \neg(A \circ B) \\ n & \Leftrightarrow \quad A,\ \neg A,\ B,\ \neg B \models {\sim}(A \circ B) \wedge {\sim}\neg(A \circ B) \\ b & \Leftrightarrow \quad A,\ \neg A,\ B,\ \neg B \models (A \circ B) \wedge \neg(A \circ B) \\ 1 & \Leftrightarrow \quad A,\ \neg A,\ B,\ \neg B \models (A \circ B) \wedge {\sim}\neg(A \circ B) \end{cases}$$

$$f_\circ(b,1) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \quad A,\ \neg A,\ B,\ {\sim}\neg B \models {\sim}(A \circ B) \wedge \neg(A \circ B) \\ n & \Leftrightarrow \quad A,\ \neg A,\ B,\ {\sim}\neg B \models {\sim}(A \circ B) \wedge {\sim}\neg(A \circ B) \\ b & \Leftrightarrow \quad A,\ \neg A,\ B,\ {\sim}\neg B \models (A \circ B) \wedge \neg(A \circ B) \\ 1 & \Leftrightarrow \quad A,\ \neg A,\ B,\ {\sim}\neg B \models (A \circ B) \wedge {\sim}\neg(A \circ B) \end{cases}$$

$$f_\circ(1,0) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \quad A,\ {\sim}\neg A,\ {\sim}B,\ \neg B \models {\sim}(A \circ B) \wedge \neg(A \circ B) \\ n & \Leftrightarrow \quad A,\ {\sim}\neg A,\ {\sim}B,\ \neg B \models {\sim}(A \circ B) \wedge {\sim}\neg(A \circ B) \\ b & \Leftrightarrow \quad A,\ {\sim}\neg A,\ {\sim}B,\ \neg B \models (A \circ B) \wedge \neg(A \circ B) \\ 1 & \Leftrightarrow \quad A,\ {\sim}\neg A,\ {\sim}B,\ \neg B \models (A \circ B) \wedge {\sim}\neg(A \circ B) \end{cases}$$

$$f_\circ(1,n) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \quad A,\ {\sim}\neg A,\ {\sim}B,\ {\sim}\neg B \models {\sim}(A\circ B) \wedge \neg(A\circ B) \\ n & \Leftrightarrow \quad A,\ {\sim}\neg A,\ {\sim}B,\ {\sim}\neg B \models {\sim}(A\circ B) \wedge {\sim}\neg(A\circ B) \\ b & \Leftrightarrow \quad A,\ {\sim}\neg A,\ {\sim}B,\ {\sim}\neg B \models (A\circ B) \wedge \neg(A\circ B) \\ 1 & \Leftrightarrow \quad A,\ {\sim}\neg A,\ {\sim}B,\ {\sim}\neg B \models (A\circ B) \wedge {\sim}\neg(A\circ B) \end{cases}$$

$$f_\circ(1,b) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \quad A,\ {\sim}\neg A,\ B,\ \neg B \models {\sim}(A\circ B) \wedge \neg(A\circ B) \\ n & \Leftrightarrow \quad A,\ {\sim}\neg A,\ B,\ \neg B \models {\sim}(A\circ B) \wedge {\sim}\neg(A\circ B) \\ b & \Leftrightarrow \quad A,\ {\sim}\neg A,\ B,\ \neg B \models (A\circ B) \wedge \neg(A\circ B) \\ 1 & \Leftrightarrow \quad A,\ {\sim}\neg A,\ B,\ \neg B \models (A\circ B) \wedge {\sim}\neg(A\circ B) \end{cases}$$

$$f_\circ(1,1) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \quad A,\ {\sim}\neg A,\ B,\ {\sim}\neg B \models {\sim}(A\circ B) \wedge \neg(A\circ B) \\ n & \Leftrightarrow \quad A,\ {\sim}\neg A,\ B,\ {\sim}\neg B \models {\sim}(A\circ B) \wedge {\sim}\neg(A\circ B) \\ b & \Leftrightarrow \quad A,\ {\sim}\neg A,\ B,\ {\sim}\neg B \models (A\circ B) \wedge \neg(A\circ B) \\ 1 & \Leftrightarrow \quad A,\ {\sim}\neg A,\ B,\ {\sim}\neg B \models (A\circ B) \wedge {\sim}\neg(A\circ B) \end{cases}$$

Proof. Suppose $f_\circ(b,n) = 0$. Let us show that $\dot\forall A\dot\forall B$: A, $\neg A$, ${\sim}B$, ${\sim}\neg B \models {\sim}(A\circ B) \wedge \neg(A\circ B)$. According to the remark 1, $f_\circ(b,n) = 0$ means that $f_\circ$ has an entry such that $\dot\forall A\dot\forall B\dot\forall v((v(A) = b \mathbin{\dot\wedge} v(B) = n) \Rightarrow v(A\circ B) = 0)$. In the terms of J.M. Dunn's semantics the last statement is understood as (α) $\dot\forall A\dot\forall B\dot\forall v((\mathfrak{t} \in v(A) \mathbin{\dot\wedge} \mathfrak{f} \in v(A) \mathbin{\dot\wedge} \mathfrak{t} \notin v(B) \mathbin{\dot\wedge} \mathfrak{f} \notin v(B)) \Rightarrow (\mathfrak{t} \notin v(A\circ B) \mathbin{\dot\wedge} \mathfrak{f} \in v(A\circ B)))$. Now suppose (β) $\mathfrak{t} \in v(A)$, $\mathfrak{t} \in v(\neg A)$, $\mathfrak{t} \in v({\sim}B)$ and $\mathfrak{t} \in v({\sim}\neg B)$. Therefore, (γ) $\mathfrak{t} \in v(A) \mathbin{\dot\wedge} \mathfrak{f} \in v(A) \mathbin{\dot\wedge} \mathfrak{t} \notin v(B) \mathbin{\dot\wedge} \mathfrak{f} \notin v(B)$. From (α) and (γ) obtain that (δ) $\mathfrak{t} \notin v(A\circ B) \mathbin{\dot\wedge} \mathfrak{f} \in v(A\circ B)$. Hence, (ε) $\mathfrak{t} \in v({\sim}(A\circ B) \wedge \neg(A\circ B))$. From (β) and (ε) obtain (ζ) $\dot\forall A\dot\forall v((\mathfrak{t} \in v(A) \mathbin{\dot\wedge} \mathfrak{t} \in v(\neg A) \mathbin{\dot\wedge} \mathfrak{t} \in v({\sim}B) \mathbin{\dot\wedge} \mathfrak{t} \in v({\sim}\neg B)) \Rightarrow \mathfrak{t} \in v({\sim}(A\circ B) \wedge \neg(A\circ B)))$. Therefore, (η) $\dot\forall A\dot\forall B$: A, $\neg A$, ${\sim}B$, ${\sim}\neg B \models {\sim}(A\circ B) \wedge \neg(A\circ B)$.

Suppose (θ) $\dot\forall A\dot\forall B$: A, $\neg A$, ${\sim}B$, ${\sim}\neg B \models {\sim}(A\circ B) \wedge \neg(A\circ B)$, let us prove that $f_\circ(b,n) = 0$. From (θ) obtain (ι) $\dot\forall A\dot\forall v((\mathfrak{t} \in v(A) \mathbin{\dot\wedge} \mathfrak{t} \in v(\neg A) \mathbin{\dot\wedge} \mathfrak{t} \in v({\sim}B) \mathbin{\dot\wedge} \mathfrak{t} \in v({\sim}\neg B)) \Rightarrow \mathfrak{t} \in v({\sim}(A\circ B) \wedge \neg(A\circ B)))$. From (ι) follows (κ) $\dot\forall A\dot\forall B\dot\forall v((\mathfrak{t} \in v(A) \mathbin{\dot\wedge} \mathfrak{f} \in v(A) \mathbin{\dot\wedge} \mathfrak{t} \notin v(B) \mathbin{\dot\wedge} \mathfrak{f} \notin v(B)) \Rightarrow (\mathfrak{t} \notin v(A\circ B) \mathbin{\dot\wedge} \mathfrak{f} \in v(A\circ B)))$, which is equivalent to (λ) $\dot\forall A\dot\forall B\dot\forall v((v(A) = b \mathbin{\dot\wedge} v(B) = n) \Rightarrow v(A\circ B) = 0)$. According to the remark 1, $f_\circ(b,n) = 0$ is an abbreviation for (λ).

The other cases are proved similarly. □

4. Natural deduction system

A natural deduction system for **FDE** is as follows[3]:

$$(\neg\neg I)\ \frac{A}{\neg\neg A} \qquad (\neg\neg E)\ \frac{\neg\neg A}{A} \qquad (\vee I_1)\ \frac{A}{A\vee B} \qquad (\vee I_2)\ \frac{B}{A\vee B}$$

[3]This system was first introduced by G. Priest [15].

$$(\vee E)\ \frac{A \vee B,\quad \begin{matrix}[A]^{+1} \\ C,\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]^{+2} \\ C\end{matrix}}{C} \qquad (\wedge I)\ \frac{A,\ B}{A \wedge B}$$

$$(\wedge E_1)\ \frac{A \wedge B}{A} \qquad (\wedge E_2)\ \frac{A \wedge B}{B} \qquad (\neg \vee I)\ \frac{\neg A \wedge \neg B}{\neg(A \vee B)}$$

$$(\neg \vee E)\ \frac{\neg(A \vee B)}{\neg A \wedge \neg B} \qquad (\neg \wedge I)\ \frac{\neg A \vee \neg B}{\neg(A \wedge B)} \qquad (\neg \wedge E)\ \frac{\neg(A \wedge B)}{\neg A \vee \neg B}$$

Rules for Boolean negation are as follows:

$$(EFQ)\ \frac{A,\ \sim A}{B} \qquad (EM)\ \frac{}{A \vee \sim A} \qquad (\sim\neg E)\ \frac{\sim\neg A}{\neg \sim A} \qquad (\neg \sim E)\ \frac{\neg \sim A}{\sim\neg A}$$

A rule of inference of the form $\mathcal{R}_\star(x,y)\ \dfrac{A_1, \dots, A_n}{B}$ corresponds to an entry $f_\star(x) = y$ of a truth table $f_\star$ and a rule of the form $\mathcal{R}_\circ(x,y,z)$ $\dfrac{A_1, \dots, A_m}{B}$ corresponds to an entry $f_\circ(x,y) = z$ of a truth table $f_\circ$. Each connective $\star$ needs 4 rules of the form $\mathcal{R}_\star(x,y)$ and each connective $\circ$ needs 16 rules of the form $\mathcal{R}_\circ(x,y,z)$. These rules are inference schemes introduced in the section 3. Here is an example. According to the proposition 1, the rule $\mathcal{R}_\star(0,0)$ corresponds to the entry $f_\star(0) = 0$ of the truth table $f_\star$:

$$\mathcal{R}_\star(0,0)\ \frac{\sim A,\ \neg A}{\sim\star A \wedge \neg \star A}\ .$$

5. Completeness theorem

It is not difficult to prove the following theorem 1.

Theorem 1 (Soundness). *For every set of $\mathcal{L}^\#$-formulas Γ and for every $\mathcal{L}^\#$-formula A: $\Gamma \vdash A \Rightarrow \Gamma \models A$.*

While proving completeness theorem prime theories are used as syntactic analogues of valuations.

Definition 1. For every set of $\mathcal{L}^\#$-formulas Γ and for every $\mathcal{L}^\#$-formulas A and B Γ is a prime theory, if the following conditions are true:

(Γ1) $\Gamma \neq Form^\#$ (*non-triviality*);

(Γ2) $\Gamma \vdash A \Leftrightarrow A \in \Gamma$ (*closure of* $\vdash$);

(Γ3) $A \vee B \in \Gamma \Rightarrow (A \in \Gamma\ \dot\vee\ B \in \Gamma)$ (*primeness*).

Elementhoods of $\mathcal{L}^{\#}$-formulas in prime theories are used as syntactic analogues of truth values.

Definition 2. For every prime theory Γ and for every $\mathcal{L}^{\#}$-formula A let us call $e(A, \Gamma)$ an elementhood of A in Γ and define it as follows:

$$e(A,\Gamma) = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow \quad A \in \Gamma,\ \neg A \notin \Gamma; \\ b & \Leftrightarrow \quad A \in \Gamma,\ \neg A \in \Gamma; \\ n & \Leftrightarrow \quad A \notin \Gamma,\ \neg A \notin \Gamma; \\ 0 & \Leftrightarrow \quad A \notin \Gamma,\ \neg A \in \Gamma. \end{cases}$$

The following lemma 1 shows us that the definition 2 is consistent with the truth tables for the propositional connectives.

Lemma 1. For every prime theory Γ and for every $\mathcal{L}^{\#}$-formulas A and B:

(1) $f_{\neg}(e(A,\Gamma)) = e(\neg A,\Gamma)$;

(2) $f_{\sim}(e(A,\Gamma)) = e({\sim} A,\Gamma)$;

(3) $f_{\vee}(e(A,\Gamma), e(B,\Gamma)) = e(A \vee B,\Gamma)$;

(4) $f_{\wedge}(e(A,\Gamma), e(B,\Gamma)) = e(A \wedge B,\Gamma)$;

(5) $f_{\star}(e(A,\Gamma)) = e(\star A,\Gamma)$;

(6) $f_{\circ}(e(A,\Gamma), e(B,\Gamma)) = e(A \circ B,\Gamma)$.

Proof.

(1) (A) $e(A,\Gamma) = 0$. Then $A \notin \Gamma$, $\neg A \in \Gamma$. Suppose $\neg\neg A \in \Gamma$. According to $(\neg\neg E)$, $A \in \Gamma$. Contradiction. Hence, $\neg\neg A \notin \Gamma$. Therefore, $e(\neg A,\Gamma) = 1 = f_{\neg}(0) = f_{\neg}(e(A,\Gamma))$.

(B) $e(A,\Gamma) = n$. Then $A \notin \Gamma$, $\neg A \notin \Gamma$. Similar to (A).

(C) $e(A,\Gamma) = b$. Then $A \in \Gamma$, $\neg A \in \Gamma$. According to $(\neg\neg I)$, $\neg\neg A \in \Gamma$. Therefore, $e(\neg A,\Gamma) = n = f_{\neg}(n) = f_{\neg}(e(A,\Gamma))$.

(D) $e(A,\Gamma) = 1$. Then $A \in \Gamma$, $\neg A \notin \Gamma$. Similar to (C).

(2) (A) $e(A,\Gamma) = 0$. $A \notin \Gamma$, $\neg A \in \Gamma$. According to (EM) and $(\Gamma 3)$, $A \in \Gamma \mathbin{\dot\vee} {\sim} A \in \Gamma$. Since $A \notin \Gamma$, ${\sim} A \in \Gamma$. Let $\neg {\sim} A \in \Gamma$. By the rule $(\neg {\sim} E)$ ${\sim}\neg A \in \Gamma$, by the rule (EFQ) $B \in \Gamma$. Contradiction. $\neg {\sim} A \notin \Gamma$. Hence, $e({\sim} A,\Gamma) = 1 = f_{\sim}(0) = f_{\sim}(e(A,\Gamma))$.

(B) $e(A,\Gamma) = n$. $A \notin \Gamma$, $\neg A \notin \Gamma$. According to (EM) and $(\Gamma 3)$, $\neg A \in \Gamma \dot{\vee} {\sim}\neg A \in \Gamma$. Since $\neg A \notin \Gamma$, ${\sim}\neg A \in \Gamma$. By the rule $({\sim}\neg E)$ $\neg {\sim} A \in \Gamma$. According to (EM) and $(\Gamma 3)$, $A \in \Gamma \dot{\vee} {\sim}A \in \Gamma$. Since $A \notin \Gamma$, ${\sim}A \in \Gamma$. Hence, $e({\sim}A,\Gamma) = b = f_{\sim}(n) = f_{\sim}(e(A,\Gamma))$.

(C) $e(A,\Gamma) = b$. $A \in \Gamma$, $\neg A \in \Gamma$. Let ${\sim}A \in \Gamma$. Then by the rule (EFQ) $B \in \Gamma$, that is $\Gamma = Form^{\#}$, that contradicts to $(\Gamma 1)$. ${\sim}A \notin \Gamma$. Let $\neg {\sim} A \in \Gamma$. By the rule $(\neg {\sim} E)$ ${\sim}\neg A \in \Gamma$, by the rule (EFQ) $B \in \Gamma$. Contradiction. $\neg {\sim} A \notin \Gamma$. Hence, $e({\sim}A,\Gamma) = n = f_{\sim}(b) = f_{\sim}(e(A,\Gamma))$.

(D) $e(A,\Gamma) = 1$. $A \in \Gamma$, $\neg A \notin \Gamma$. Let ${\sim}A \in \Gamma$. Then by the rule (EFQ) $B \in \Gamma$, that is $\Gamma = Form^{\#}$, that contradicts to $(\Gamma 1)$. ${\sim}A \notin \Gamma$. According to (EM) and $(\Gamma 3)$, $\neg A \in \Gamma \dot{\vee} {\sim}\neg A \in \Gamma$. Since $\neg A \notin \Gamma$, ${\sim}\neg A \in \Gamma$. By the rule $({\sim}\neg E)$ $\neg {\sim}A \in \Gamma$. Hence, $e({\sim}A,\Gamma) = 0 = f_{\sim}(1) = f_{\sim}(e(A,\Gamma))$.

(3) (A) $e(A,\Gamma) = 0$, $e(B,\Gamma) = 0$. $A \notin \Gamma$, $\neg A \in \Gamma$, $B \notin \Gamma$, $\neg B \in \Gamma$. Suppose $A \vee B \in \Gamma$. According to $(\Gamma 3)$, $A \in \Gamma \dot{\vee} B \in \Gamma$. Contradiction. Then $A \vee B \notin \Gamma$. According to $(\wedge I)$ and $(\neg \vee I)$, $\neg(A \vee B) \in \Gamma$. Hence, $e(A \vee B,\Gamma) = 0 = f_{\vee}(0,0) = f_{\vee}(e(A,\Gamma), e(B,\Gamma))$.

(B) $e(A,\Gamma) = n$, $e(B,\Gamma) = b$. $A \notin \Gamma$, $\neg A \notin \Gamma$, $B \in \Gamma$, $\neg B \in \Gamma$. By the rule $(\vee I_2)$, $A \vee B \in \Gamma$. Suppose $\neg(A \vee B) \in \Gamma$, then by the rule $(\neg \vee E)$, $\neg A \wedge \neg B \in \Gamma$, but by the rule $(\wedge E_1)$, $\neg A \in \Gamma$. Contradiction. Hence, $\neg(A \vee B) \notin \Gamma$. Consequently, $e(A \vee B,\Gamma) = 1 = f_{\vee}(n,b) = f_{\vee}(e(A,\Gamma), e(B,\Gamma))$.

The other cases are proved similarly.

(4) (A) $e(A,\Gamma) = 0$, $e(B,\Gamma) = n$. $A \notin \Gamma$, $\neg A \in \Gamma$, $B \notin \Gamma$, $\neg B \notin \Gamma$. Suppose $A \wedge B \in \Gamma$. Then by the rules $(\wedge E_1)$ and $(\wedge E_2)$, $A \in \Gamma$ and $B \in \Gamma$. Contradiction. $A \wedge B \notin \Gamma$. By the rules $(\vee I_1)$ and $(\neg \wedge I)$, $\neg(A \wedge B) \in \Gamma$. Hence, $e(A \wedge B,\Gamma) = 0 = f_{\wedge}(0,n) = f_{\wedge}(e(A,\Gamma), e(B,\Gamma))$.

(B) $e(A,\Gamma) = 1$, $e(B,\Gamma) = 1$. $A \in \Gamma$, $\neg A \notin \Gamma$, $B \in \Gamma$, $\neg B \notin \Gamma$. By the rule $(\wedge I)$, $A \wedge B \in \Gamma$. Suppose $\neg(A \wedge B) \in \Gamma$. By the rule $(\neg \wedge E)$, $\neg A \vee \neg B \in \Gamma$, but then, according to $(\Gamma 3)$, $\neg A \in \Gamma \dot{\vee} \neg B \in \Gamma$. Contradiction. Hence, $\neg(A \wedge B) \notin \Gamma$. Consequently, $e(A \wedge B,\Gamma) = 1 = f_{\wedge}(1,1) = f_{\wedge}(e(A,\Gamma), e(B,\Gamma))$.

The other cases are proved similarly.

(5) (A) Let $e(A,\Gamma)=0$. Then $A\notin\Gamma$, $\neg A\in\Gamma$.

(α) Suppose $e(\star A,\Gamma)=0$. Then $f_\star(0)=0$ and $\mathcal{R}_\star(0,0)$ is a rule for $\star$ in **FDE#**. According to (EM) and $(\Gamma 3)$, $A\in\Gamma\ \dot\vee \sim A\in\Gamma$. Since $A\notin\Gamma$, $\sim A\in\Gamma$. Then by the rules $\mathcal{R}_\star(0,0)$, $(\wedge E_1)$ and $(\wedge E_2)$ $\sim\star A\in\Gamma$ and $\neg\star A\in\Gamma$. Let $\star A\in\Gamma$. Then by the rule (EFQ) $B\in\Gamma$, that contradicts to $(\Gamma 1)$. $\star A\notin\Gamma$. Hence, $e(\star A,\Gamma)=0=f_\star(0)=f_\star(e(A,\Gamma))$.

(β) Suppose $e(\star A,\Gamma)=n$. Then $f_\star(0)=n$ and $\mathcal{R}_\star(0,n)$ is a rule for $\star$ in **FDE#**. Using (EM) and $(\Gamma 3)$, obtain that $\sim A\in\Gamma$. By the rules $\mathcal{R}_\star(0,n)$, $(\wedge E_1)$ and $(\wedge E_2)$ $\sim\star A\in\Gamma$ and $\sim\neg\star A\in\Gamma$. Using (EFQ), obtain that $\star A\notin\Gamma$ and $\neg\star A\notin\Gamma$. Hence, $e(\star A,\Gamma)=n=f_\star(0)=f_\star(e(A,\Gamma))$.

(γ) Suppose $e(\star A,\Gamma)=b$. Then $f_\star(0)=b$ and $\mathcal{R}_\star(0,b)$ is a rule for $\star$ in **FDE#**. Clearly, that $\sim A\in\Gamma$. By the rules $\mathcal{R}_\star(0,b)$, $(\wedge E_1)$ and $(\wedge E_2)$ $\star A\in\Gamma$ and $\neg\star A\in\Gamma$. Hence, $e(\star A,\Gamma)=b=f_\star(0)=f_\star(e(A,\Gamma))$.

(δ) Suppose $e(\star A,\Gamma)=1$. Then $f_\star(0)=1$ and $\mathcal{R}_\star(0,1)$ is a rule for $\star$ in **FDE#**. Clearly, that $\sim A\in\Gamma$. By the rules $\mathcal{R}_\star(0,1)$, $(\wedge E_1)$ and $(\wedge E_2)$ $\star A\in\Gamma$ and $\sim\neg\star A\in\Gamma$. By the rule (EFQ) $B\in\Gamma$, $\neg\star A\notin\Gamma$. Hence, $e(\star A,\Gamma)=1=f_\star(0)=f_\star(e(A,\Gamma))$.

The other cases are proved similarly.

(6) Analogues to (5).

□

LEMMA 2. For every prime theory Γ and for every valuation v_Γ such that $\dot\forall_{p\in Prop}\, p\ (v_\Gamma(p)=e(p,\Gamma))$: $\dot\forall_{A\in Form^\#}\, A\ (v_\Gamma(A)=e(A,\Gamma))$.

PROOF. By structural induction on $\mathcal{L}^\#$-formula A using the lemma 1. □

LEMMA 3 (LINDENBAUM). For every set of $\mathcal{L}^\#$-formulas Γ, for every $\mathcal{L}^\#$-formula A: if $\Gamma\nvdash A$, then $\dot\exists\Gamma^*$: $\Gamma^*\subseteq Form^\#$ and (1) $\Gamma\subseteq\Gamma^*$, (2) $\Gamma^*\nvdash A$ and (3) Γ^* is a prime theory.

PROOF. Let $B_1, B_2, \ldots$ be an enumeration of all $\mathcal{L}^\#$-formulas. Now define a sequence of sets of $\mathcal{L}^\#$-formulas $\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots$. Let $\Gamma_1=\Gamma$ and Γ_n somehow defined. Then let $\Gamma_{n+1}=\Gamma_n\bigcup\{B_{n+1}\}$, if $\Gamma_n\bigcup\{B_{n+1}\}\nvdash A$; and $\Gamma_{n+1}=\Gamma_n$ otherwise. Let Γ^* is the union of all Γ_i.

(1) Follows from the definition of Γ^*.

(2) I will use the straightforward induction on i. Since $\Gamma_1 = \Gamma$, $\Gamma_1 \nvdash A$. By the inductive assumption, $\Gamma_i \nvdash A$. If $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i$, then $\Gamma_{i+1} \nvdash A$. If $\Gamma_{i+1} \neq \Gamma_i$, then $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \bigcup \{B_{i+1}\}$. Suppose $\Gamma_i \bigcup \{B_{i+1}\} \vdash A$. But then (by the definition of the sequence of $\Gamma_1, \Gamma_2, ...$) $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i$. Contradiction. Hence, $\Gamma_i \bigcup \{B_{i+1}\} \nvdash A$. Thus, if $\Gamma_{i+1} \neq \Gamma_i$, then $\Gamma_{i+1} \nvdash A$. Clearly, that if for all Γ_i true, that $\Gamma_i \nvdash A$, then $\Gamma^* \nvdash A$.

(3) Let us prove that: (A) $\Gamma^* \neq Form^{\#}$ (non-triviality); (B) $\Gamma^* \vdash B \Leftrightarrow B \in \Gamma^*$ (closure of $\vdash$); (C) $B \vee C \in \Gamma^* \Rightarrow (B \in \Gamma^* \dot{\vee} C \in \Gamma^*)$ (primeness).

(A) Since $\Gamma^* \nvdash A$, obviously, that $\Gamma^* \neq Form^{\#}$.

(B) ($\Rightarrow$). Suppose $\Gamma^* \vdash B$. Then $\dot{\exists} i$: $B = B_i$ and $\dot{\exists}\Gamma_i$: $\Gamma_i \vdash B_i$. Suppose $B_i \notin \Gamma_i$. Hence, $\Gamma_{i-1} \bigcup \{B_i\} \vdash A$. But then $\Gamma^* \vdash A$, because $\Gamma_{i-1} \subseteq \Gamma^*$ and $\Gamma^* \vdash B$. Nonetheless, it was proved in (2) that $\Gamma^* \nvdash A$. Then $B_i \in \Gamma_i$. Thus, $\Gamma^* \vdash B \Rightarrow B \in \Gamma^*$.

($\Leftarrow$). Suppose $B \in \Gamma^*$, $\Gamma^* \nvdash B$. Then $\dot{\exists} i$: $B = B_i$ and $\dot{\exists}\Gamma_{i-1}$: $\Gamma_{i-1} \bigcup \{B_i\} \vdash A$. Since $\Gamma_{i-1} \subseteq \Gamma^*$, $\Gamma^* \bigcup \{B_i\} \vdash A$. From here and the fact, that $\Gamma^* \nvdash A$, obtain, that $B_i \notin \Gamma^*$, that is $B \notin \Gamma^*$. Contradiction. Hence, $\Gamma^* \vdash A$. Thus, $B \in \Gamma^* \Rightarrow \Gamma^* \vdash A$.

(C) Suppose $B \vee C \in \Gamma^*$, but $B \notin \Gamma^*$, $C \notin \Gamma^*$. Since $B \vee C \in \Gamma^*$, $\Gamma^* \vdash B \vee C$ (see (B)). On the other hand, $\dot{\exists} i$: $B = B_i$ and $\dot{\exists} j$: $C = B_j$; $\Gamma_{i-1} \bigcup \{B_i\} \vdash A$ and $\Gamma_{j-1} \bigcup \{B_j\} \vdash A$. Moreover, $\Gamma_{i-1} \subseteq \Gamma^*$ and $\Gamma_{j-1} \subseteq \Gamma^*$. Then $\Gamma^* \bigcup \{B_i\} \vdash A$ and $\Gamma^* \bigcup \{B_j\} \vdash A$. From here and the fact, that $\Gamma^* \vdash B_i \vee B_j$, by the rule ($\vee E$) obtain, that $\Gamma^* \vdash A$, but according to (2), $\Gamma^* \nvdash A$. Hence, $B \vee C \in \Gamma^* \Rightarrow (B \in \Gamma^* \dot{\vee} C \in \Gamma^*)$.

□

Theorem 2 (Completeness). *For every set of $\mathcal{L}^{\#}$-formulas Γ and for every $\mathcal{L}^{\#}$-formula A: $\Gamma \models A \Rightarrow \Gamma \vdash A$.*

Proof. By contraposition. Let $\Gamma \nvdash A$. Then, by lemma 3, $\dot{\exists}\Gamma^*(\Gamma \subseteq \Gamma^*$, $\Gamma^* \nvdash A$ and Γ^* is a prime theory). According to lemma 2, there is a valuation v_{Γ^*} such, that $\dot{\forall}_{B \in \Gamma} B\, v_{\Gamma^*}(B) \in \{1, b\} \mathbin{\dot{\wedge}} v_{\Gamma^*}(A) \notin \{1, b\}$. But then $\Gamma \not\models A$. □

Theorem 3 (Adequacy). *For every set of $\mathcal{L}^{\#}$-formulas Γ and for every $\mathcal{L}^{\#}$-formula A: $\Gamma \models A \Leftrightarrow \Gamma \vdash A$.*

Proof. The theorem follows from the theorems 1 and 2. □

6. Natural deduction for implicative extensions of FDE

6.1. History and semantics

Using the technique of correspondence analysis, it is possible to axiomatize extensions of **FDE**, for example, implicative: $\mathbf{BN_4}$, **Par**, **FDEA**, **FDEB**, **FDEC**, and **FDED**. Connective $\mapsto$ is implication of the logic $\mathbf{BN_4}$, $\to_e$ is implication of the logic **Par**, $\to_a$ is implication of the logic **FDEA**, $\to_b$ is implication of the logic **FDEB**, $\to_c$ is implication of the logic **FDEC**, and $\to_d$ is implication of the logic **FDED**.

$\mapsto$	1	b	n	0
1	1	0	n	0
b	1	b	n	0
n	1	n	1	n
0	1	1	1	1

$\to_e$	1	b	n	0
1	1	b	n	0
b	1	b	n	0
n	1	1	1	1
0	1	1	1	1

$\to_a$	1	b	n	0
1	1	b	n	0
b	1	1	n	n
n	1	1	1	1
0	1	1	1	1

$\to_b$	1	b	n	0
1	1	b	n	0
b	1	1	n	n
n	1	b	1	b
0	1	1	1	1

$\to_c$	1	b	n	0
1	1	b	n	0
b	1	b	n	0
n	1	b	1	b
0	1	1	1	1

$\to_d$	1	b	n	0
1	1	b	n	0
b	1	b	n	0
n	1	b	1	b
0	1	b	1	b

A	$\neg_e$	$\neg_a$	$\neg_c$	$\neg_d$
1	0	0	0	0
b	0	n	0	0
1	1	b	b	b
0	1	1	1	b

The logic $\mathbf{BN_4}$ first appeared in R.T. Brady's paper [6], where several semantics for it and a Hilbert-style calculus are introduced. There is another reference of this logic (independent of [6]) in J.K. Slaney's paper [19].

The logic **Par** was first formulated by V.M. Popov [14] in the form of sequent and Hilbert-style calculuses. A similar Hilbert-style system independently appeared in A. Avron's paper [2] under the name **HBe**. Avron also introduced four-valued semantics for $\to_e$ [2]. Moreover, functional equivalence of $\to_e$ and $\mapsto$ was proven in [2]. Furthermore, the truth table for $\to_e$ is mentioned in A.P. Pynko's paper [17] in relation to [14], but independent of [2]. In addition, it is easy to see that $A \to_e B \equiv_{def} \neg_e A \vee B$[4].

[4] M. De and H. Omori [7] investigated four-valued classical negations $\neg_e$, $\neg_a$, $\neg_c$ and $\neg_d$ (in the notation of [7] $\neg_e$, $\neg_1$, $\neg_2$ and $\neg_5$) in line with the study of the relationship

Using negations $\neg_a$, $\neg_c$ and $\neg_d$, it's possible to define implications of logics **FDEA**, **FDEC**[5] and **FDED**: $A \to_a B \equiv_{def} \neg_a A \vee B$; $A \to_c B \equiv_{def} \neg_c A \vee B$; $A \to_d B \equiv_{def} \neg_d A \vee B$.

A semantics of the logic **FDEB** is first explored in D.V. Zaitsev's doctoral dissertation [21]. Notice that $A \to_b B \equiv_{def} {\sim} A \vee B$.

It is noteworthy that in the paper [7] by M. De and H. Omori a logic **BD+** with connectives $\neg$, $\sim$, $\vee$, $\wedge$ and $\to_b$ is analyzed.

It is easy to see that for all i ($i \in \{a, b, c, d, e\}$) $A, A \to_i B \models B$, $\models A \to_i (B \to_i A)$, $\models (A \to_i (B \to_i C)) \to_i ((A \to_i B) \to_i (A \to_i C))$, and $\models ((A \to_i B) \to_i A) \to_i A$. Thus, implications $\to_a$, $\to_b$, $\to_c$, $\to_d$ and $\to_e$ are classical.

6.2. Rules of inference

Using the proposition 2 and the theorem 3, it is not difficult to find necessary rules of inference for $\to_i$ ($i \in \{a, b, c, d, e\}$). Nonetheless, it makes sense to reduce the number of the rules. As a result, natural deduction systems will become more convenient for work in them. It is possible to prove that the rules for $\mapsto$ can be reformulated as follows[6]:

$$(\mapsto I_1)\ \frac{\neg A,\ B}{A \mapsto B} \qquad (\mapsto I_2)\ \frac{\neg A}{A \vee (A \mapsto B)} \qquad (\mapsto I_3)\ \frac{}{A \vee \neg B \vee (A \mapsto B)}$$

$$(\mapsto I_4)\ \frac{B}{\neg B \vee (A \mapsto B)} \qquad (MP)\ \frac{A,\ A \mapsto B}{B} \qquad (MT)\ \frac{A \mapsto B,\ \neg B}{\neg A}$$

$$(\neg \mapsto I)\ \frac{A,\ \neg B}{\neg(A \mapsto B)} \qquad (\neg \mapsto E)\ \frac{\neg(A \mapsto B)}{A \wedge \neg B}$$

Logics **Par**, **FDEA**, **FDEB**, **FDEC** and **FDED** contain the following rules in common:

$$(\to I_1)\ \frac{B}{A \to B} \qquad (\to I_2)\ \frac{}{A \vee (A \to B)} \qquad (MP)\ \frac{A,\ A \to B}{B}$$

The axiomatization of **Par** contains also the following rules:

---

of classical negation and properties of paraconsistency and paracompleteness of logical systems.

[5]Logics **FDEA** and **FDEC** have two relatives: **BD1** with the connectives $\neg$, $\neg_a$, $\to_a$, $\vee$ and $\wedge$; and **BD2** with the connectives $\neg$, $\neg_c$, $\to_c$, $\vee$ and $\wedge$ [7].

[6]There are two ways of proving this statement: (1) by proving the deductive equivalence of modified rules and rules based on the proposition 2; or (2) by completeness proof for implications just as it was done for the other connectives in the section 5.

$$(\neg \to_e I)\ \frac{A,\ \neg B}{\neg(A \to_e B)} \qquad (\neg \to_e E)\ \frac{\neg(A \to_e B)}{A \wedge \neg B}$$

The axiomatization of **FDEA** contains also the following rules:

$$(\neg \to_a I)\ \frac{A,\ \neg B}{\neg A \vee \neg(A \to_a B)} \qquad (\neg \to_a E_1)\ \frac{\neg(A \to_a B)}{A \wedge \neg B}$$

$$(\neg \to_a E_2)\ \frac{\neg(A \to_a B),\ \neg A}{C}$$

The axiomatization of **FDEB** contains also the following rules:

$$(\neg \to_b I)\ \frac{\neg B}{\neg A \vee \neg(A \to_b B)} \qquad (\neg \to_b E_1)\ \frac{\neg(A \to_b B)}{\neg B}$$

$$(\neg \to_b E_2)\ \frac{\neg(A \to_b B),\ \neg A}{C}$$

The axiomatization of **FDEC** contains also the following rules:

$$(\neg \to_c I_1)\ \frac{A,\ \neg B}{\neg(A \to_c B)} \qquad (\neg \to_c I_2)\ \frac{\neg B}{\neg A \vee \neg(A \to_c B)}$$

$$(\neg \to_c E_1)\ \frac{\neg(A \to_c B)}{\neg B} \qquad (\neg \to_c E_2)\ \frac{\neg(A \to_c B),\ \neg A}{A}$$

The axiomatization of **FDED** contains also the following rules:

$$(\neg \to_d I_1)\ \frac{A,\ \neg B}{\neg(A \to_d B)} \qquad (\neg \to_d I_2)\ \frac{\neg B}{\neg A \vee \neg(A \to_d B)}$$

$$(\neg \to_d I_3)\ \frac{\neg A,\ \neg B}{A \vee \neg(A \to_d B)} \qquad (\neg \to_d E)\ \frac{\neg(A \to_d B)}{\neg B}$$

7. Conclusion

In summary, the result obtained in this paper allows to get immediately adequate natural deduction systems for all possible truth-table expansions of **FDE**+. Consequently, a problem for future research arises: to formulate propositions 1 and 2 without the use of Boolean negation, in other words, to apply the technique of correspondence analysis to **FDE** directly, without recourse to **FDE**+. In future prospect one more direction of research opens: to apply the technique of correspondence analysis to other four-valued logics or even to arbitrary k-valued logics with l designated values, where $k \geqslant 3$ and $l \in \{1, ..., k-1\}$.

Acknowledgements. I would like to express my sincere gratitude and appreciation to *Dmitry Zaitsev* for scientific guidance and assistance in the work on this paper, to *Vladimir Shalack* for fruitful discussions during the preparation of this paper, to *Allard Tamminga* for the deliberation of the previous version of this paper, and to *the referee of this journal* for advice on the improvement of this paper.

References

[1] Anderson, A.R., Belnap, N.D. "Tautological entailments", *Philosophical Studies*, 1962, vol. 13(1-2), pp. 9-24.

[2] Avron, A. "Natural 3-valued logics — characterization and proof theory", *The Journal of Symbolic Logic*, 1991, vol. 56(1), pp. 276-294.

[3] Belnap, N.D. "A useful four-valued logic", *Modern Uses of Multiple-Valued Logic*, ed. by J.M. Dunn, G. Epstein. Boston: Reidel Publishing Company, 1977, pp. 7-37.

[4] Belnap, N.D. "How a computer should think", *Contemporary Aspects of Philosophy*, ed. by G. Rule. Stocksfield: Oriel Press, 1977, pp. 30-56.

[5] Belnap, N.D. "Tautological entailments", *The Journal of Symbolic Logic*, 1959, vol. 24(4), p. 316.

[6] Brady, R.T. "Completeness proofs for the systems RM3 and BN4", *Logique et Analyse*, 1982, vol. 25(97), pp. 51-61.

[7] De, M., Omori, H. "Classical Negation and Expansions of Belnap-Dunn Logic", *Studia Logica*, 2015, vol. 103(4), pp. 825-851.

[8] Dunn, J.M. "Intuitive semantics for first-degree entailment and coupled trees", *Philosophical Studies*, 1976, vol. 29(3), pp. 149-168.

[9] Font, J.M. "Belnap's Four-Valued Logic and De Morgan Lattices", *Logic Journal of the IGPL*, 1997, vol. 5(3), pp. 1-29.

[10] Karpenko, A.S. *Razvitie mnogoznachnoi logiki* [The development of many-valued logic]. Moscow: LKI Publ., 2010 (3d edition). 448 p. (In Russian)

[11] Kleene, S.C. *Introduction to metamathematics.* Amsterdam: Wolters-Noordhoff Publishing and North-Holland Publishing Company, 1971 (6th reprint). 560 pp.

[12] Kleene, S.C. "On a notation for ordinal numbers", *The Journal of Symbolic Logic*, 1938, vol. 3(1), pp. 150-155.

[13] Kooi, B., Tamminga, A. "Completeness via correspondence for extensions of the logic of paradox", *The Review of Symbolic Logic*, 2012, vol. 5(4), pp. 720-730.

[14] Popov, V.M. "Sekventsial'nye formulirovki paraneprotivorechivykh logicheskikh sistem" [Sequent formulations of paraconsistent logical systems], *Semanticheskie i sintaksicheskie issledovaniya neekstensional'nykh*

logik [Semantic and syntactic investigations of non-extensional logics], ed. by V.A. Smirnov. Moscow: Nauka Publ., 1989, pp. 285-289. (In Russian)

[15] Priest, G. "Paraconsistent logic", *Handbook of philosophical logic. 2nd edition. Vol.6*, ed. by M. Gabbay, F. Guenthner. Dordrecht: Kluwer, 2002, pp. 287-393.

[16] Priest, G. "The logic of paradox", *Journal of Philosophical Logic*, 1979, vol. 8(1), pp. 219-241.

[17] Pynko, A.P. "Functional completeness and axiomatizability within Belnap's four-valued logic and and its expansion", *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 1999, vol. 9(1), pp. 61-105.

[18] Shramko, Y., Wansing, H. "Entailment relations and/as truth values", *Bulletin of the Section of Logic*, 2007, vol. 36(3-4), pp. 131-143.

[19] Slaney, J.K. "The implications of paraconsistency", *Proceedings of the 12th IJCAI, vol. 2*, ed. by J. Mylopoulos and R. Reiter. Sydney: Morgan Kaufmann Publ., 1991, pp. 1052-1057.

[20] Tamminga, A. "Correspondence analysis for strong three-valued logic", *Logical Investigations*, 2014, vol. 20, pp. 255-268.

[21] Zaitsev, D.V. *Obobshchennaya relevantnaya logika i modeli rassuzhdenii* [Generalized relevant logic and models of reasoning]. Moscow State Lomonosov University, doctoral (Doctor of Science) dissertation, 2012. 284 pp. (In Russian).

[22] Zaitsev, D.V., Shramko, Ya.V. "Logicheskoe sledovanie i vydelennye znacheniya" [Logical entailment and designated values], *Logicheskie issledovaniya* [Logical investigations], 2004, vol. 11, pp. 126-137. (In Russian)

Логические исследования
2016. Т. 22. № 1. С. 125–135
УДК 164.07+510.635

Logical Investigations
2016, vol. 22, no 1, pp. 125–135

Символическая логика
Symbolic Logic

V.I. Shalack

On First-order Theories Which Can Be Represented by Definitions

Shalack Vladimir Ivanovich
Department of Logic, Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences.
12/1 Goncharnaya St., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: shalack@gmail.com

In the paper we consider the classical logicism program restricted to first-order logic. The main result of this paper is the proof of the theorem, which contains the necessary and sufficient conditions for a mathematical theory to be reducible to logic. Those and only those theories, which don't impose restrictions on the size of their models, can be reduced to pure logic.

Among such theories we can mention the elementary theory of groups, the theory of combinators (combinatory logic), the elementary theory of topoi and many others.

It is interesting to note that the initial formulation of the problem of reduction of mathematics to logic is principally insoluble. As we know all theorems of logic are true in the models with any number of elements. At the same time, many mathematical theories impose restrictions on size of their models. For example, all models of arithmetic have an infinite number of elements. If arithmetic was reducible to logic, it would had finite models, including an one-element model. But this is impossible in view of the axiom $0 \neq x'$.

Keywords: definition, definability, predicate calculus, theory, logicism

1. Logicism

As we know the main idea of logicism was that mathematics was an extension of logic and was reducible to logic by appropriate definitions.

One of the explications of logicism might look like if you are given a theory T with the set of postulates Ax. It is required to find such a set of logical definitions DF of mathematical notions of the theory T that for every formula $B \in L_T$ holds:

$$Ax \vdash B \Leftrightarrow DF \vdash B.$$

As we know the attempt to implement the program of classical logicism has failed. It needs the higher-order logic, and far from intuitively obvious axioms: reducibility, multiplicativity (choice) and infinity, which can hardly be called logical. This was a major rebuke to the logicism.

It is interesting to find an answer to the more specific question:

To what limits classical logicism program can be implemented in the first-order predicate logic?

2. Defining new predicate symbols

We assume that the language of first-order predicate calculus is defined in the standard way as the set of terms and formulas over the signature Σ, which consists of nonlogical relational and functional symbols. We write $L(\Sigma)$ for the first-order language over signature Σ. Models are pairs $M = \langle D, I\rangle$, where D is a non-empty set of individuals, and I is an interpretation of the function and predicate symbols in the domain D. The relations *"formula A is true in the model M for value assignment to individual variables g"* and *"formula A is true in the model M"* are defined as usual and are written as $M, g \vDash A$ and $M \vDash A$.

A first-order theory in the language $L(\Sigma)$ is a set of logical axioms and non-logical postulates closed by derivability. Predicate calculus is the first-order theory with the empty set of non-logical postulates. We consider equality axioms as non-logical postulates.

We can extend the language of a theory by definitions of new predicate symbols, which have the following form:

$$\forall x_1 \ldots x_n (P(x_1, \ldots, x_n) \equiv A).$$

The definition must satisfy the conditions:

1. $P \notin \Sigma$.
2. $A \in L(\Sigma)$.
3. The variables $x_1, \ldots, x_n$ are pairwise distinct.
4. The set of free variables of A is included in $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

The newly defined predicate symbol P must be added to the signature Σ. As the result, there is a transition from the language $L(\Sigma)$ to the language $L(\Sigma \cup \{P\})$.

In the language of the first order predicate calculus, we can define the universal n-ary predicate U^n by the following definition:

$$(DU) \qquad \forall x_1 \ldots x_n (U^n x_1, \ldots, x_n \equiv Px_1 \vee \neg Px_1).$$

The definition allows us to prove $DU \vdash \forall x_1 \ldots x_n U x_1, \ldots, x_n$.

This example is interesting because in the right part of the definition we use an arbitrary predicate symbol of the signature of the first order predicate calculus, but with the help of it, we define the specific predicate symbol with the specific properties.

As another example, we can give a definition of a symmetric relation. Let B be an arbitrary predicate symbol of the signature. We accept the following definition:

$$(DS_1) \qquad \forall xy(S_1xy \equiv \forall uv(Buv \supset Bvu) \supset Bxy)$$

Let us show that $DS_1 \vdash \forall xy(S_1xy \supset S_1yx)$.

1. S_1xy - hyp
2. $\forall uv(Buv \supset Bvu) \supset Bxy$ - from 1, DS_1 by replacement
3. $\forall uv(Buv \supset Bvu)$ - hyp
4. Bxy - from 2, 3 by *m.p.*
5. $Bxy \supset Byx$ - from 3 by $\forall_{el}$
6. Byx - from 4, 5 by *m.p.*
7. $\forall uv(Buv \supset Bvu) \supset Byx$ - from 3-6 by $\supset_{in}$
8. S_1yx - from 7, DS_1 by replacement
9. $S_1xy \supset S_1yx$ - from 1-8 by $\supset_{in}$

There is another way to define a symmetric relation:

$$(DS_2) \qquad S_2xy \equiv \forall uv(Buv \supset Bvu) \& Bxy.$$

Let us show that $DS_2 \vdash \forall xy(S_2xy \supset S_2yx)$.

1. S_2xy - hyp
2. $\forall uv(Buv \supset Bvu)\&Bxy$ - from 1, DS_2 by replacement
3. $\forall uv(Buv \supset Bvu)$ - from 2 by $\&_{el}$
4. Bxy - from 2 by $\&_{el}$
5. $Bxy \supset Byx$ - from 3 by $\forall_{el}$
6. Byx - from 4, 5 by *m.p.*
7. $\forall uv(Buv \supset Bvu)\&Byx$ - from 3, 6 by $\&_{in}$
8. S_2yx - from 7, DS_2 by replacement
9. $S_2xy \supset S_2yx$ - from 1-8 by $\supset_{in}$

These examples motivate us to find the general criterion of definability of the specific predicates with the help of predicate logic.

Definition 1. The first-order theory T in a language $L(\Sigma)$ with finite set of non-logical axioms Ax is *definitionally embeddable* into predicate calculus if and only if there are a signature Σ' and a set of definitions DT of symbols $\Sigma \setminus \Sigma'$ by formulas of $L(\Sigma')$ which met the following condition:

$$\text{If } B \in L(\Sigma), \text{ then } Ax \vdash B \Leftrightarrow DT \vdash B.$$

This definition is some variant of the notion of definitional embeddability of theories, which was proposed by V.A. Smirnov in [2], [3, p. 65].

3. Auxiliary lemmas

To formulate the main theorem, we need to define function π, which translates formulas of first-order theories into formulas of the propositional logic. This function simply "erases" all terms and quantifiers in formulas.

Definition 2.

1. $\pi(P(t_1, \ldots, t_n)) = P$.
2. $\pi(\neg A) = \neg\pi(A)$.
3. $\pi(A \bigtriangledown B) = \pi(A) \bigtriangledown \pi(B)$, where $\bigtriangledown \in \{\&, \vee, \supset, \equiv\}$.
4. $\pi(\Sigma x A) = \pi(A)$, where $\Sigma \in \{\forall, \exists\}$.

Lemma 1. Let v be some truth-value assignment to propositional variables that is in the standard way extended to all formulas of propositional logic, then the next statements are true:

(A) If for each atomic subformula $P_i(\vec{t})$ of formula A holds $\dot{\forall} g[M, g \vDash P_i(\vec{t}) \Leftrightarrow v(\pi(P_i)) = True]$, then it holds $\dot{\forall} g[M, g \vDash A \Leftrightarrow v(\pi(A)) = True]$.

(B) If for each atomic subformula $P_i(\vec{t})$ of formula A holds $\dot{\forall} g[M, g \vDash P_i(\vec{t}) \Leftrightarrow v(\pi(P_i)) = True]$, then it holds $[M \vDash A \Leftrightarrow v(\pi(A)) = True]$.

PROOF.

(A) We prove the statement by structural induction. The basis of induction is the condition of the lemma $\dot{\forall} g[M, g \vDash P_i(\vec{t}) \Leftrightarrow v(\pi(P_i)) = True]$. So we have to prove the induction step.

Case 1. $A = \neg B$

1. $M, g \vDash \neg B$ - hyp
2. $\dot{\forall} h[M, h \vDash B \Leftrightarrow v(\pi(B)) = True]$ - inductive hyp
3. $M, g \nvDash B$ - from 1 by definition
4. $M, g \vDash B \Leftrightarrow v(\pi(B)) = True$ - from 2
5. $v(\pi(B)) = False$ - from 3, 4 and definition v
6. $v(\neg\pi(B)) = True$ - from 5 by definition v
7. $v(\pi(\neg B)) = True$ - from 6 by definition π

1. $v(\pi(\neg B)) = True$ - hyp
2. $\dot{\forall} h[M, h \vDash B \Leftrightarrow v(\pi(B)) = True]$ - inductive hyp
3. $v(\neg\pi(B)) = True$ - from 1 by definition π
4. $v(\pi(B)) = False$ - from 3 by definition v
5. $M, g \vDash B \Leftrightarrow v(\pi(B)) = True$ - from 2
6. $M, g \nvDash B$ - from 4, 5
7. $M, g \vDash \neg B$ - from 6 by definition

Case 2. $A = B \& C$

1. $M, g \vDash B \& C$ - hyp
2. $\dot{\forall} h[M, h \vDash B \Leftrightarrow v(\pi(B)) = True]$ - inductive hyp
3. $\dot{\forall} h[M, h \vDash C \Leftrightarrow v(\pi(C)) = True]$ - inductive hyp
4. $M, g \vDash B$ - from 1 by definition
5. $M, g \vDash C$ - from 1 by definition
6. $M, g \vDash B \Leftrightarrow v(\pi(B)) = True$ - from 2
7. $M, g \vDash C \Leftrightarrow v(\pi(C)) = True$ - from 3
8. $v(\pi(B)) = True$ - from 4, 6
9. $v(\pi(C)) = True$ - from 5, 7
10. $v(\pi(B) \& \pi(C)) = True$ - from 8, 9 by definition v
11. $v(\pi(B \& C)) = True$ - from 10 by definition π

1. $v(\pi(B \& C)) = True$ - hyp
2. $\dot{\forall} h[M, h \vDash B \Leftrightarrow v(\pi(B)) = True]$ - inductive hyp
3. $\dot{\forall} h[M, h \vDash C \Leftrightarrow v(\pi(C)) = True]$ - inductive hyp

4. $v(\pi(B)\&\pi(C)) = True$	- from 1 by definition π
5. $v(\pi(B)) = True$	- from 4 by definition v
6. $v(\pi(C)) = True$	- from 4 by definition v
7. $M, g \models B \Leftrightarrow v(\pi(B)) = True$	- from 2
8. $M, g \models C \Leftrightarrow v(\pi(C)) = True$	- from 3
9. $M, g \models B$	- from 5, 7
10. $M, g \models C$	- from 6, 8
11. $M, g \models B\&C$	- from 9, 10 by definition

Case 3. $A = \forall x B$

1. $M, g \models \forall x B$	- hyp
2. $\dot{\forall} h[M, h \models B \Leftrightarrow v(\pi(B)) = True]$	- inductive hyp
3. $M, g' \models B$	- from 1 for arbitrary $g' \approx_x g$
4. $M, g' \models B \Leftrightarrow v(\pi(B)) = True$	- from 2
5. $v(\pi(B)) = True$	- from 3, 4
6. $v(\pi(\forall x B)) = True$	- from 5 by definition π

1. $v(\pi(\forall x B)) = True$	- hyp
2. $\dot{\forall} h[M, h \models B \Leftrightarrow v(\pi(B)) = True]$	- inductive hyp
3. $v(\pi(B)) = True$	- from 1 by definition π
4. $M, g \not\models \forall x B$	- hyp
5. $M, g' \not\models B$	- from 4 for some $g' \approx_x g$
6. $M, g' \models B \Leftrightarrow v(\pi(B)) = True$	- from 2
7. $M, g' \models B$	- from 3, 6
8. противоречие	- 5, 7
9. $M, g \models \forall x B$	- from 4, 8

Since all logical connectives and the existential quantifier are definable through $\{\neg, \&, \forall\}$, the part **(A)** of the lemma is proved.

(B) The metalanguage statement $\dot{\forall} g[M, g \models A \Leftrightarrow v(\pi(A)) = True]$ implies the statement $[\dot{\forall} g(M, g \models A) \Leftrightarrow v(\pi(A)) = True]$, but $\dot{\forall} g(M, g \models A)$, it means the same as $M \models A$. So part **(B)** of the lemma follows trivially from the part **(A)**.

□

If Ax is the set of formulas then $\pi(Ax)$ will denote the set of formulas $\{\pi(A) | A \in Ax\}$.

LEMMA 2. If T is a theory with a set of axioms Ax then the set of formulas $\pi(Ax)$ is consistent if and only if for every set D there exists such a function of interpretation I, that $M = \langle D, I\rangle$ and for each $A \in Ax$ holds $M \models A$.

PROOF.

($\Rightarrow$) Suppose, $\pi(Ax)$ is consistent. It follows that there is the truth-value assignment v to propositional variables, at which all the formulas $\pi(Ax)$ are true.

Suppose that D is a non-empty set of individuals. We define the function of interpretation I of nonlogical language symbols in the set D. Let us choose an element e of the set D.

(1) If c — individual constant then $I(c) = e$.

(2) If f is n-ary function symbol then $I(f) : D \times \ldots^n \times D \to \{e\}$.

(3) For any n-ary predicate symbol P_i, if $v(\pi(P_i)) = True$ then $I(P_i) = D \times \ldots^n \times D$, else $I(P_i) = \emptyset$.

Let us show that in the model $M = \langle D, I \rangle$ holds $M \vDash Ax$.

According to the constructed model, $\dot{\forall} g[M, g \vDash P_i(t) \Leftrightarrow v(\pi(P_i))]$. From the Lemma 1 we obtain $M \vDash A \Leftrightarrow v(\pi(A))$. Because for all $A \in Ax$ holds $v(\pi(A)) = True$, so we have $M \vDash A$.

($\Leftarrow$) The proof is trivial, since the consistency of $\pi(Ax)$ follows from the existence of a one-element model $M = \langle \{a\}, I \rangle$. □

4. The main theorem

The following theorem is a stronger form of the theorem proved in [1].

THEOREM 1. *Let T be a first-order theory in a language $L(\Sigma)$ with a finite set of closed non-logical postulates $Ax = \{A_1, \ldots, A_k\}$.*

(A) *T is definitionally embeddable into the first-order predicate calculus if and only if the set of formulas $\{\pi(A_1), \ldots, \pi(A_k)\}$ is logically consistent.*

(B) *T is definitionally embeddable into the first-order predicate calculus if and only if it does not impose any restrictions on the power of models.*

PROOF.

(A) ($\Leftarrow$) We must prove that if the set of formulas $\{\pi(A_1), \ldots, \pi(A_k)\}$ is logically consistent then the theory T is definitionally embeddable into the first order predicate calculus.

Let $\{P_1, \ldots, P_m\}$ be the set of all predicate symbols of signature Σ, which occur in nonlogical postulates $\{A_1, \ldots, A_k\}$.

The logical consistency of $\{\pi(A_1), \ldots, \pi(A_k)\}$ means that there exists at least one truth-value assignment v to propositional letters $\pi(P_1), \ldots, \pi(P_m)$ with property $v(\pi(P_1)) = True, \ldots, v(\pi(P_m)) = True$. Let us fix some such assignment v.

Take the signature Σ' which satisfes the two conditions:

- $\Sigma \setminus \Sigma' = \{P_1, \ldots, P_m\}$.
- For each predicate symbol $P_i \in \{P_1, \ldots, P_m\}$ there exists such a predicate symbol R_i of the corresponding arity, that $R_i \in \Sigma'$.

We use $\widehat{Ax}$ to denote the conjunction $A_1 \& \ldots \& A_k$ of all postulates $A_1, \ldots, A_k$ and $\widehat{Ax}\,[R/P]$ to denote the result of renaming all occurrences of symbols $P_1, \ldots, P_m$ into $R_1, \ldots, R_m$.

We associate the definition with each predicate symbol $P_i \in \{P_1, \ldots, P_m\}$ by the following rule:

1) If $v(\pi(P_i)) = True$, then

$$\forall \vec{x}(P_i(\vec{x}) \equiv \widehat{Ax}\,[R/P] \supset R_i(\vec{x}))$$

2) If $v(\pi(P_i)) = False$, then

$$\forall \vec{x}(P_i(\vec{x}) \equiv \widehat{Ax}\,[R/P]\,\& R_i(\vec{x}))$$

Let $DT = \{D_1, \ldots, D_m\}$ be the set of all definitions.

(A.1) We must show that if $B \in L(\Sigma)$ and $Ax \vdash B$, then $DT \vdash B$. By the properties of the deducibility relation it suffices to show $DT \vdash \widehat{Ax}$. By the completeness theorem of the first-order predicate calculus it is equivalent to $DT \vDash \widehat{Ax}$.

Let $M = \langle D, I \rangle$ be a model in which all formulas of DT are true.

Since the formula $\widehat{Ax}\,[R/P]$ is closed we have either $M \vDash \widehat{Ax}\,[R/P]$ or $M \vDash \neg\widehat{Ax}\,[R/P]$.

Case 1. $M \vDash \widehat{Ax}\,[R/P]$. For each P_i we have one of the following two subcases:

Subcase 1.1. $v(\pi(P_i)) = True$

$M, g \vDash P_i(\vec{t}) \Leftrightarrow$
$M, g \vDash \widehat{Ax}\,[R/P] \supset R_i(\vec{t}) \Leftrightarrow$

$M, g \vDash R_i(\vec{t})$

Subcase 1.2. $v(\pi(P_i)) = False$

$M, g \vDash P_i(\vec{t}) \Leftrightarrow$
$M, g \vDash \widehat{Ax}\,[R/P]\,\& R_i(\vec{t}) \Leftrightarrow$
$M, g \vDash R_i(\vec{t})$

In each case P_i is interpreted as R_i and therefore $M \vDash \widehat{Ax}$.

Case 2. $M \vDash \neg\widehat{Ax}\,[R/P]$. For each P_i we have one of the following two subcases:

Subcase 2.1. $v(\pi(Pi)) = True$

$M, g \vDash P_i(\vec{t}) \Leftrightarrow$
$M, g \vDash \widehat{Ax}\,[R/P]\,\& R_i(\vec{t}) \Leftrightarrow$
$M, g \vDash \widehat{Ax}\,[R/P]\,\& R_i(\vec{t}) \vee \neg\widehat{Ax}\,[R/P]\,\&(R_i(\vec{t}) \vee \neg R_i(\vec{t})) \Leftrightarrow$
$M, g \vDash \neg\widehat{Ax}\,[R/P]\,\&(R_i(\vec{t}) \vee \neg R_i(\vec{t})) \Leftrightarrow$
$M, g \vDash R_i(\vec{t}) \vee \neg R_i(\vec{t}) \Leftrightarrow$
$v(\pi(Pi))$

Subcase 2.2. $v(\pi(Pi)) = False$

$M, g \vDash P_i(\vec{t}) \Leftrightarrow$
$M, g \vDash \widehat{Ax}\,[R/P]\,\& R_i(\vec{t}) \Leftrightarrow$
$M, g \vDash \widehat{Ax}\,[R/P]\,\& R_i(\vec{t}) \vee \neg\widehat{Ax}\,[R/P]\,\&(R_i(\vec{t})\&\neg R_i(\vec{t})) \Leftrightarrow$
$M, g \vDash \neg\widehat{Ax}\,[R/P]\,\&(R_i(\vec{t})\&\neg R_i(\vec{t})) \Leftrightarrow$
$M, g \vDash R_i(\vec{t})\&\neg R_i(\vec{t}) \Leftrightarrow$
$v(\pi(Pi))$

For all atomic formulas $P_i(\vec{t})$ and all assignments g to individual variables we have $M, g \vDash P_i(\vec{t}) \Leftrightarrow v(\pi(P_i))$. The value of the atomic formula $P_i(\vec{t})$ doesn't depend on the particular assignments of values to individual variables. As a result, according to Lemma 1, we obtain $M \vDash \widehat{Ax} \Leftrightarrow v(\pi(\widehat{Ax}))$. But according to the properties of the function v it holds $v(\pi(A_1)) = True, \ldots, v(\pi(A_k)) = True$, and $\widehat{Ax}$ is the conjunction of $A_1, \ldots, A_k$. Hence $v(\pi(\widehat{Ax})) = True$ and $M \vDash \widehat{Ax}$.

With the help of the completeness theorem of the first-order predicate calculus, we obtain $DT \vdash \widehat{Ax}$.

(A.2) We must show that if $B \in L(\Sigma)$ and $DT \vdash B$, then $Ax \vdash B$. By the completeness theorem of the first-order predicate calculus it is equivalent to show that if $DT \vDash B$, then $Ax \vDash B$.

Let us assume that $B \in L(\Sigma)$ and $DT \vDash B$ but $Ax \nvDash B$. Then there exists such a model $M = \langle D, I \rangle$ of the theory T that $M \vDash \widehat{Ax}$ and $M \nvDash B$.

We can extend the model $M = \langle D, I \rangle$ to the model $M' = \langle D, I' \rangle$ in which all the formulas of DT will be true. It is sufficient to expand the domain of the function I so that the new function of interpretation I' ascribed value $I'(R_i) = I(P_i)$ to a predicate symbol R_i, and for all other functional and predicate symbols retained the same values as I.

Since $M \vDash \widehat{Ax}$, then in the model $M' = \langle D, I' \rangle$ by definition of I' we will have $M' \vDash \widehat{Ax}\,[R/P]$, and hence, $M' \vDash P_i(\vec{x}) \equiv \widehat{Ax}\,[R/P]\,\&R_i((\vec{x}))$ for each R_i. It follows that all the formulas DT are true in the model M'. Therefore by our assumption $DT \vDash B$ it must be $M' \vDash B$. However, the formula B doesn't contain symbols $R_1, \dots, R_m$, while all the other descriptive symbols are interpreted in the same way as in the model M, and by assumption it must be $M', g \nvDash B$. We have obtained a contradiction. Therefore, the assumption that $Ax \vDash B$ does not hold is false.

(A) ($\Rightarrow$) We must prove that if a theory T is definitionally embeddable into first-order predicate calculus, then the set of formulas $\{\pi(A_1), \dots, \pi(A_k)\}$ is consistent.

Let us assume that $Ax \vdash B \Leftrightarrow DT \vdash B$.

Take an arbitrary one-element model $M = \langle \{a\}, I \rangle$ for signature Σ'. For each predicate symbol $P_i \in \Sigma \setminus \Sigma'$, if it was introduced by definition $P_i(x_1, \dots, x_n) \equiv D$, we expand the domain of the interpretation function I as follows:

$$I'(P_i) = \{\langle g(x_1), \dots, g(x_n) \rangle : M, g \vDash D\}.$$

Note that since the domain of individuals consists of only one element, the function assigning values to individual variables, too, is the only one, and, consequently, predicate symbol P_i will be interpreted as either empty set $\emptyset$, or singleton $\{\langle a, \dots, a \rangle\}$.

Performing this operation with all the new predicate symbols, we obtain the model $M' = \langle \{a\}, I' \rangle$, in which all the definitions of the set DT will be true.

Since we assumed that $Ax \vdash B \Leftrightarrow DT \vdash B$, then every axiom $A_i \in \{A_1, \dots, A_k\}$ is derivable from DT. With the help of the completeness theorem of first-order predicate calculus, we obtain $DT \vDash A_i$. It means that there is at least one one-element model of the theory T, and hence, the set $\{\pi(A_1), \dots, \pi(A_k)\}$ is logically consistent.

(B) The second part of the theorem follows from the part **(A)** and Lemma 2. $\square$

5. Conclusion

The main theorem of this article can be considered as a solution of the classical logicism program for first-order theories. Those and only those theories which don't impose any restrictions on the power of their models can be reduced to pure logic.

Among of such theories we can mention the elementary theory of groups, the theory of combinators (combinatory logic), the elementary theory of topoi and many others.

References

[1] Shalack, V.I. "On Some Applied First-Order Theories which Can be Represented by Definitions", *Bulletin of the Section of Logic*, 44(1-2) (2015). pp. 19–24.

[2] Smirnov, V.A. "Logical Relations between Theories", *Synthese*, 1986, 66(1), pp. 71–87.

[3] Smirnov, V.A. *Logicheskiye metody analiza nauchnogo znaniya* [The logical methods of analysis of scientific knowledge], Moscow: Nauka, 1987. 256 pp. (In Russian)

Логические исследования
2016. Т. 22. № 1. С. 136–144
УДК 130.121

Logical Investigations
2016, vol. 22, no 1, pp. 136–144

Y.G. Sedov

Remarks Conserning the Phenomenalogical Foundations of Mathematics

Sedov Yuri Grigor'evich
Department of State and Municipal Management,
State Institute of Economics, Finances, Law and Technologies.
5 Roshchinskaya St., Gatchina, 188300, Russian Federation.
E-mail: yuriy-sedov@mail.ru

In this paper I investigate the phenomenological approach to foundations of mathematics. Phenomenological reflection plays the certain role in extension of mathematical knowledge by clarification of meanings. The phenomenological technique pays our attention to our own acts in the use of the abstract concepts. Mathematical constructions must not be considered as passive objects, but as categories are given in theoretical acts, in categorical experiences and in our senses. Phenomenology moves like a category theory from formal components of knowledge to the dynamics of constitutive process.

Keywords: Phenomenology of mathematics, infinite structures, category theory, abstract objects, movement, visibility

1.

The first division of this article represents some reflections about the essential connection of transcendental phenomenology with formal proof theory. The main Edmund Husserl's scientific interests were philosophical questions of logic, mathematical problems and phenomenological foundations of mathematics.

Let us consider notion of definite multitude (definiten Mannigfaltigkeit). Multitude is an idea of form of infinite objective region, which manifests itself in the unity of nomological science. Such idea of a deductive science is equivalent to axiomatic definite system. The general feature of formalistic system is *completeness* (vollstandiges) because notion of multitude includes principal definable for all elements of this multiplicity. In given point Husserl draws together with David Hilbert's logical constructions, directed on realization of the program of the foundation of mathematics. Modern investigators discuss developments in mathematics emphasizing finitist methods, for example, proof mining. However "naturlich knupfen sich hieran hochst bedeutsame Probleme... wie kann man wissen, wie beweisen, ein Axiomensystem ein definites ist, ein 'vollstandiges'?" [4, p. 84] [Of course this problem is bound up with other important questions... how one can know and how to prove that an axiomatic system is definable and "complete"] (See also [5]). In other words, axiom of completeness paves the way for mathematical cognition in the same direction with logician thought, connected by the notion of *Definitheit*. And so first conclusion of this paper is dependence of husserlian phenomenology on the formalistic conceptions. Phenomenological description of eidetic variations is impossible to separate from formalistic constructions. The combination of intentional and formal structures is the basic condition for real possibility of sciences itself and philosophy as rigorous science.

On the other hand phenomenological analysis leaves definite traces on understanding of formal proofs. It is evident that any logical or mathematical proof differs from ordinary empirical notification. The logical sense of proof intends to an obvious perceiving of consequences, when we conclude from existence of a certain state of affair to other. Husserl insists on correspondence of subjective acts of proving to objective conclusions and proofs. In his works Husserl has not given enough attention for proof theory and the systematical accounts of this topic are absent. But he is clearly conscious of the need of formalistic proving treatment for program of reconstruction of philosophy as rigorous science. Generally, without application of formalistic procedures is impossible any science.

Proof theory as a part of formal logic may be considered in the two-sidedness direction: in the subjective and objective main themes. In *FTL* Husserl analyses mind's work from the point of view of objective achievements (geleisteten Ergebnisse) and of the same time from the point of view of subjective activity (leistenden Tatigkeiten und Habitualitaten). Objective logic includes all forms of judgments and hardened cognitive structures which represent practical results. On the basis of these results we may also build new structures, judgments or proofs. All these cognitive products have not only transient being, but also have objective validity of the sound value.

Unlike formal logic the transcendental logic investigates subjective forms of theoretic mind. Here we must solve the problem of living activity (in lebendigem Vollzug) of human mind. All proofs have origin in proving mind. Theoretical constructions and proofs are categorical objects in categorical experience which make sure the possibility of pure formalization. Proofs are not reduced to mental acts of proving (Beweisen). Some investigators follow the traces of eidetic method in mathematical intuition not only in material mathematics like in geometry, but also in formal mathematics. Eidetic variation serves as the source of intuitivity in proofs. Thus phenomenology provides us detailed description of what we are doing in proofs.

2.

And in fact, phenomenological influence on mathematics is considerably wider and in general some philosophical reflection plays the certain role in mathematical success. This conclusion belongs, as far as I know, to Kurt Gödel who in his unpublished lecture reflecting on the modern development of the foundations of mathematics, turns away from the formalism to the phenomenological procedures. In the lecture he had intended to describe the contemporary state of mathematics in terms of philosophical notions, directing attention mostly at the foundational program of Hilbert which represents mathematical theories by means of finitary reasoning. The serious theoretical mistake of this program is the refusal from philosophical reflection on the foundations of mathematics. It means that formalistic conception excludes the epistemological analysis from mathematics.

Meanwhile, the attempt to introduce a new discipline, metamathematics, as it turned out, was a manifestation of some inclination to empirical reflection, viz. reflection on the combinatorial properties of any concrete symbols. Furthermore the method of arithmetisation of metamathematics is also the peculiar modification of empirical point of view.

However Gödel says about the need to reflect on meanings of mathematical concepts. "Obviously, this means that the certainty of mathematics is to be secured not by. . . the manipulation of physical symbols — but rather by cultivating (deepening) knowledge of the abstract concepts" [2, p. 383]. The question is to search out the possibility of extension of mathematical knowledge by a clarification of meanings which consist in focusing on our own acts in the use of mathematical concepts. The phenomenological technique should make in us a new state of consciousness. In any case phenomenological position is sufficiently potent because it takes into consideration both philosophical meditations and mathematical results. Thus, phenomenological clarification of the meaning (or meanings) of primitive concepts should not be exclude from mathematical region.

The formalistic idea is to reduce our mathematical knowledge to concrete sign configurations and combinatorial operations on such symbols, but it is only part of mathematical work and it does not give us the exhaustive explanation of mathematical knowledge. Opposite, Gödel's incompleteness theorem in addition show that "in the transition from evidence to pure formalism something is lost... many mathematical statements express noemata that are not captured in purely syntactical terms" [10, p. 152]. According to Gödel a systematic method for clarification of meaning in giving definitions was produced in the phenomenology founded by Husserl. The phenomenological procedure pays our attention to our own acts in the use of the abstract concepts, giving us the distinctive foundation to mathematics by means of reflexive analysis of these mental acts. Phenomenological reflection of the constitution of mathematical objects on that ground must be realized in two directions: first one is the theory of meaning and second one is the theory of objects. One of them uses only categories of meaning — *Bedeutungskategorien*, and other puts into practice formal objective categories — *gegenstandliche Kategorien* (*FTL* §§ 27, 33, 34, 37, 42 etc).

3.

Then some mathematical theories involve the *infinite* structures. Despite of intuitionist efforts to banish the infinite from mathematics or reduce such considerations to a game of symbols, we cannot eliminate mathematical concepts which base themselves upon the reality of the infinite.

In this connection appeared the appropriate question: how can the infinite structures possibly be grasping by human mind? "What are actually present in consciousness are finite structures. How can they give us access to mathematical structures or forms that are in representative cases infinite? Cannot Husserl's own manifolds be infinite?" [3, p. 99]. The problem does not seem to me so complicated after all, but very important for mathematical progress. In this question the phenomenological description accentuate on subjective (intentional) topics of a pure analytic. The basic form 'and so on' or iterative infinity has the subjective correlate which is represented as 'may be added anew'. Such expression is none other than a mathematical idealization; however it plays the sense putting role. Iterative form buildings, for example $a + 1$, are not a game with empty thoughts, on the contrary the similar constructions are fitted for cognition of things.

Mathematics is realm of infinite constructions, a kingdom of ideal existences which are considered not only in finite sense, but also as the constructive infinites (konstruktiven Unendlichkeiten). In this point Husserl had run once more into problem of subjective constitution which must be a new method of infinite constructions, "der Methode, in der das 'und so weiter' verschiedenen Sinnes und die Unendlichkeiten als neuartige kategoriale Gebilde... evident warden" [4, p. 167] [The method which makes obvious senses of 'and so on' and infinities as novel categorical structures.]. In practice, mathematicians applying to objective forms of categories, namely to diagrams, manifolds, quadratic forms etc., forget as a rule that any categories proceed in the categorical acts of human mind by drawing a line (an arrow), by putting in order and also in acts of combining and calculation. The varieties of mental acts in mathematics make up the *real "dark"* side of its ideal objects.

In some contemporary philosophical investigations authors try to arouse interest for correlation phenomenology and mathematics, whereas this question may be formulated otherwise: what mathematical issues outline the phenomenological fields of knowledge, what kinds of mathematical search are favors the development of phenomenology? Thus the aim of next divisions is to attach importance of phenomenological reflections in mathematical investigations, in particular for the higher category theory, quadratic forms, number theory, integration of measures, theory of scale [8, p. 392].

4.

Phenomenology is able to make simultaneously a careful close study of classical and constructive mathematics in substantial correlation. The initial problem as before very actual can be formulated in the next thesis: reflective profound study of intentional origins of fundamental mathematical concepts, such as objects, morphisms, manifolds, categories and so on is the common aim both for philosophers and for mathematicians. It is a matter of common concern. Mathematical constructions must be considered, according to phenomenology, not as passive objects, but rather as categories given in theoretical acts [kategoriale Erfahrung].

The task of justifying phenomenologically the symbolic character of mathematics, in particular the universal language of higher category theory, I will denominate as phenomenological foundations of mathematics — PhFOM. Any solution in present case necessarily will demand carrying out of a subjective-guided investigation.

When we admiringly prove mathematical theorems, we always neglect origin and lineage of all these perfections. Fortunately, not every mathematicians forget the primary source of their imaginary constructions, I mean first and foremost Descartes, Leibniz, Bolzano, Frege, Poincare, Hadamard, Bourbaki, Gödel and others. Mathematician, who makes up his mind to grasp the foundations of mathematics, is a philosopher, because he transcend limits of his science. The working mathematician is obliged to take into account the intellectual changeableness. The purpose of these phenomenological investigation is to describe the objects of mathematics in their correlation with intellectual activity of our mind. Phenomenological descriptions are suited to the concepts and methods of geometry, topology, algebra, but most of all to the modern theory of categories.

5.

For adaptation of category-theoretic ideas mathematicians introduce the more suitable formalism of ∞-categories (J. Lurie) or quasi-categories (A. Joyal). They establish a vocabulary which contains categorical analogues of the concepts from ordinary category theory. A category C consists of the following components:

(i) objects of $C(X, Y, Z)$

(ii) morphisms from X to Y $(f : X \to Y)$

(iii) an identity morphism Hom C (X, X)

(iv) composition map for every triple of objects

(v) composition functors which are required to satisfy associative law.

This terminology may be applied to ∞-categories (topological or simplicial categories). It makes sense to speak of finitely presented ∞-category. Such mathematical structures like ordinary categories can be described by generators and relations. For example, higher category generated by a single morphism $g : Y \to Y$ is a finitely presented. But higher category theory gives raise the technical difficulties inherent in working with too large objects. Considering presentable and accessible ∞-categories, Lurie introduce the notion of a "locally small" ∞-category, which has small morphism spaces for any fixed pair of objects. "The theory of accessible ∞-categories is a tool which allows us to manipulate large ∞-categories as if they were small without fear of encountering any set-theoretic paradoxes" [6, p. 415]. He begins with the most intuitive approach to the formalism of ∞-categories using topological categories up to a weak homotopy equivalence of topological spaces.

Further, in contemporary mathematical investigations have arisen discussions about the question: what advantages has categorical philosophy of mathematics over set-theoretic foundations? One of the most advantages of category theory is a good universal language with a sufficient level of generality. This language is closer to the mathematical content and categorical structures are not lost in translation. Moreover, set-theoretic foundations concern the binary relation of membership, while theory of categories axiomatizes the ternary relation of composition and applies quadruple diagrams. The difference is that Zermelo-Fraenkel axioms (ZFC) take membership while Elementary Theory of the Category of Set (ETCS) takes composition of functions. “So ETCS is closer to the working methods of mainstream mathematics than ZFC is, and like those methods it rests ontologically on form and structure rather than membership and substance” [7, p. 151].

Some investigators try to bring phenomenology in correspondence with category theory, for there are many points of contiguity between categorical foundations and phenomenological descriptions. The goals of category theory are not completely mathematical, but also they outline epistemological perspectives providing ample opportunities to apply phenomenological approach in mathematics.

6.

The phenomenological epistemology of mathematical experience in category theory is permissible by following considerations. No object could be conceivable without a sense horizon. Of course mathematical objects are included in conscious horizon of mathematician. “En d’autres termes, c’est dans la correlaton cogito-cogitatum que prend racine la pensée mathematique. . . , la structure interne des categories reflete en partie la dichotomie noeme/noese” [9, p. 416] [In other words, the question is that cogito-cogitatum correlation had taken root in mathematical reflection. . . , inner structure of categories has a partial effect on dichotomy noema/noesis]. Any objectifying act consists of some particular intentions, for example when I am proving a theorem or when I am trying to present properties of mathematical constructions by means of arrows and diagrams. Such act lasts during the certain period of time and all particular intentions are combined in synthesis of this lengthy act.

But on the other hand, the modern category theory naturally leads to renewal of phenomenology of mathematics. I hold that category theory favor the development of phenomenology and it can to create a new approach to classical phenomenological notions and distinctions. Category theory has introduced in formal undertaking one decisive correction offering to consider mathematical structures in movement as opposed to habitual practice. Thus, one may establish a fact of theoretical transformation, namely when categorist overstep the limits of structuralistic intuition.

The question is not merely operate on static objects, quite the contrary, mathematical structures become dynamical objects provided with arrows. The chief phenomenological interest has moved like category theory from formal components of knowledge to the dynamics of constitutive process.

7.

In the category theory mathematicians look for representation their abstract entities appealing to our senses, in this case to visibility of movement. However these remarks are essential not only to category theory, but also to other mathematical fields of knowledge. John Conway raises quite rightful question: can we see the "values" of quadratic forms? In his lectures devoted to the sensual quadratic forms he presents a visual method to display the values by changing viewpoint. As a result "theorems that once had to be proved algebraically or arithmetically can now become so obvious that they no longer require proof" [1, p. 25]. Further he considers concept of audibility of a lattice: audible properties of a lattice are determined by θ-function. In addition he recovers the structure of rational forms according to the primary fragrances and gives us the opportunity to have a sensation of a taste of number theory.

It has become apparent upon phenomenological analysis that it is wrong when we remove subjective (or egological) structures from mathematical investigations, for actually abstract mathematical notions, for example, the space of geometric points is not indifferent to the agent of demonstration. This analysis may be also represented in terms of genetic method for some mathematical theories. And finally, necessity of subjective-orientated investigations is conditioned by scientific tasks of measuring. As a matter of fact measuring is not a mechanical applying standard measure to outer appearances, but outstripping modeling of reality.

References

[1] Conway, J.H. *The sensual (quadratic) form.* Washington: Mathematical association of America, 1997. 228 pp.

[2] Gödel, K. *Collected Works, Vol. 3: Unpublished Essays and Lectures*, ed. by S. Feferman. New York: Oxford University Press, 1995. 560 pp.

[3] Hintikka, J. "How can phenomenologist have a philosophy of mathematics?", in: *Phenomenology and Mathematics.* Phenomenologica 195, ed. by M. Hartimo. Springer, 2010, pp. 91–105.

[4] Husserl, E. *Formale und transzendentale Logik. Versuch einer Kritik der logischen Vernunft.* 2, Auflage, Tubingen: Max Niemeyer Verlag, 1981. § 31, § 74.

[5] Husserl, E. *Ideen zu einer reinen Phaenomenologie und phaenomenologischen Philosophie.* Erster Buch: Allgemeine Einführung in die reine Phanomenologie. Husserliana. Bd. III. Den Haag: Nijhoff, 1976. § 72.

[6] Lurie, J. *Higher topos theory.* Princeton: Princeton University Press, 2009. 944 pp.

[7] McLarty, C. "Recent debate over categorical foundations", in: *Foundational theories of classical and constructive mathematics.* Dordrecht: Springer, 2011, pp. 145–154.

[8] Novikov, N.Y. *Teoriya shkal. Printsipy postroeniya etalonnykh protsedur izmereniya, kodirovaniya i upravleniya* [The theory of scale. Principles of building etalon procedures of measuring, coding and control]. Moscow: FIZMATLIT, 2012. 536 pp. (In Russian)

[9] Patras, F. "Phenomenologie et theorie des categories", in: *Geometries of nature, living systems and human cognition*, ed. by L. Boi. World Scientific, 2005, pp. 401–419.

[10] Tieszen, R. *After Gödel. Platonism and rationalism in mathematics and logic.* New York: Oxford University Press, 2011. 245 pp.

Логические исследования
2016. Т. 22. № 1. С. 145–170
УДК 16

Logical Investigations
2016, vol. 22, no 1, pp. 145–170

История логики
History of Logic

С.Н. Корсаков

Из истории возрождения логики в СССР в 1941–1946 гг. Часть II[1]

Корсаков Сергей Николаевич
Сектор гуманитарных экспертиз и биоэтики, Институт философии РАН.
109240, Российская Федерация, Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.
E-mail: snkorsakov@yandex.ru

В статье на основе архивных документов рассказывается о начальном этапе возрождения преподавания и изучения логики в СССР в первой половине 1940-х гг. Рассматриваются: беседа Сталина с директором Института философии АН СССР П.Ф. Юдиным о создании учебника логики в 1941 г., ход и итоги обсуждения учебников логики В.Ф. Асмуса и Э.Я. Кольмана в Институте философии АН СССР в 1943 г., обсуждение вопроса о переиздании учебника логики Г.И. Челпанова в Институте философии АН СССР в 1943 г., работа Курсов для подготовки преподавателей логики в вузах и школах Минвуза СССР в 1946 г.

Ключевые слова: логика, советская философия, Институт философии, сталинизм

1. Начало международного сотрудничества в области логики

Первое международное сотрудничество в области логики началось с дружественной Болгарией. В «Вопросах философии» отметили выход в 1945 г. в Болгарии нового учебника логики [23].

12 июля 1945 г. президент Болгарской АН Д.Г. Михалчев на совместном заседании Института философии АН СССР и философской секции Всесоюзного общества культурных связей с заграницей выступил с докладом «Традиционная логика в новом освещении» [8].

Вначале Михалчев дал обзор трактовок предмета логики, выделив нормативистские и индуктивистские подходы к пониманию законов мышления. Далее он выдвинул тезис, что согласно традиционной логике мы сознаем не сам предмет, а его действие на нас. Как возможно

[1]При поддержке РГНФ. Проект № 15-03-00244 «Институт философии РАН в период сталинизма».

воздействие на нас внешнего предмета? Впечатление, представление о предмете вовсе не обязательно должны относиться к психологическим явлениям. Толстой, который рисует муки роженицы, не переживает их. Содержанием впечатления выступает не переживание предмета, а сам предмет. Как и следовало ожидать, Михалчев подверг критике теорию отражения, разумеется, не называя имен ни Ленина, ни Т.Д. Павлова, который еще несколько лет назад работал на Волхонке, 14 и выпустил здесь первое издание своей «Теории отражения». Михалчев считал, что теория отражения не способна объяснить формирование психического образа.

Сформулировав свои исходные гносеологические посылки, Михалчев перешел к подробному разбору трех известных форм и четырех законов мышления в свете этих посылок. Он давал сначала традиционную трактовку, затем подвергал ее критике и выдвигал собственную. В частности, он заявил, что закон непротиворечивости относится только к сфере выражения, но относить его к сфере мышления бессмысленно, так как само мышление по сути своей не может быть противоречивым. Логические законы относятся не к сфере мышления, а к сфере выражения. Мы же, подчиняясь стереотипам, смешиваем логику с грамматикой. Нетрадиционная логика должна изучать само мышление, не смешивая мышление и речь.

Михалчев подчеркивал мысль, что логика, логическое мышление возникает и существует в деятельности, в действиях человека по отношению к действительности. Единственное средство установить существование действительности — это действие, в результате которого реализуется причинное отношение между вещами. Эти причинные отношения должны лежать в основе логического мышления. После выступили советские коллеги. С.Л. Рубинштейн особо остановился на трактовке Михалчевым связи мышления и языка, сказав, что искусственно разграничить эти сферы невозможно. М.А. Дынник отметил, что как раз марксистское понимание теории отражения подчеркивает активный характер деятельности людей и роль ее в познании. М.П. Баскин сказал, что нельзя отрывать сам предмет от его действия на нас, поскольку действует на нас именно предмет.

Доклад академика Д.Г. Михалчева стал первым в Институте философии АН СССР крупным научным мероприятием по логике, имевшим международный характер.

2. Вопросы логики в советской периодике середины 1940-х годов

Как сказано, к 1944 г. вопрос об изучении и последующем преподавании логики встал в практическую плоскость. Преподаватели философии по всей стране с жадностью ожидали литературы для самостоятельной работы и ведения занятий. Но кроме брошюр Строговича «на правах рукописи» никаких учебников не было издано вообще. В собранном виде учебник Строговича вышел в 1946 г. — тоже раньше учебников В.Ф. Асмуса, С.Н. Виноградова, Э.Я. Кольмана, К.С. Бакрадзе, Н.И. Кондакова, Д.П. Горского, П.В. Таванца.

Период с 1944 по 1946 г. оказался самым «голодным» на литературу по логике: спрос максимальный, а наличие — тем более в провинции — минимальное. Ситуация осложнялась тем, что в 1944 г. в результате борьбы групп Митина и Александрова был закрыт единственный философский журнал «Под знаменем марксизма». В его последнем вышедшем номере за апрель–май 1944 г. была напечатана глава «Логические законы мышления» из подготовлявшегося В.Ф. Асмусом учебника логики [19].

Теперь философам ничего не оставалось, как использовать для публикаций страницы пропагандистских журналов. С другой стороны, сверху от Агитпропа ЦК шла установка на всемерную популяризацию логики, разъяснение ее значения массам. Поэтому историк логики не может пройти мимо самых разнообразных пропагандистских журналов 1944–1946 гг. Они дают представление о том, как для широкой аудитории аргументировалась необходимость изучения логики.

В 1944 г. В.Ф. Асмус напечатал статью «Для чего нужно изучать логику» в журнале Политуправления ВМФ «Агитатор». Статья подавалась как «ответ на вопрос лейтенанта С. Рыжева». Асмус писал о том, что знание логики способствует успешности устного выступления. Правила логического мышления — одни и те же для всех: требования определенности, последовательности и доказательности. Автор статьи призывал к постоянному самоконтролю за тем, чтобы речь каждого была логически обоснована и оформлена [17].

В газетных статьях и популярных брошюрах пропагандировал значение логики П.С. Попов [54, 56, 57].

Много сделал для популяризации логики П.Е Вышинский. Он печатал статьи, пропагандирующие логику, в целом ряде журналов [30, 31], включая такой «установочный» журнал, как «Партийная жизнь». Он призывал изучать логику для успешного ведения пропагандистской работы, отмечая при этом, что читателю учебников логики следует быть осторожным и учитывать, что всякий автор — представитель того или иного направления в логике [29]. П.Е. Вышинский старался доступно объяснить далекому от логики читателю, как можно применять те или иные логические приемы [33]. Весьма интересна его научно-популярная статья в журнале «Октябрь», где он дал хорошо написанный очерк истории логики, очень полезный для впервые знакомящегося с логикой человека. Знание логики необходимо каждому культурному человеку, подчеркивал автор статьи [30].

Поскольку постановление правительства о преподавании логики 1946 г. вводило ее как обязательный предмет в средней школе [48], вопросы логики оказались насущными для педагогических журналов и газет. «Советская педагогика», например, неоднократно предоставляла авторам, пишущим по логике, свои страницы [35]. «В порядке обсуждения» выступил С.Н. Виноградов. Он со знанием дела рассказал об истории преподавания логики в российских гимназиях до революции. Чтобы вновь начать преподавать предмет, надо ясно осознавать его значение, писал Виноградов. Со ссылками на Гегеля и Ленина он обосновал правомерность преподавания формальной логики в средней школе, отметил важность соблюдения правил логического мышления для любой научной работы, остановился на воспитательном значении логики, которая учит обстоятельности и беспристрастности в суждениях [25]. В дальнейшем на страницах «Советской педагогики» несколько лет велась дискуссия о логических проблемах обучения [64, 38, 50, 44, 82, 69]. Своеобразным завершением дискуссии стала статья А.А. Чудова [84]. Статья содержала советы педагогам как строить учебный курс логики: суть дела не в запоминании правил, а в том, чтобы сформировать у учащихся вполне грамотное мышление. Существенным и принципиальным для понимания места и значения логики в то время был следующий вывод А.А. Чудова:

> «Всякая попытка свести логику к прикладной дисциплине, все равно, будет ли это сведение в духе английского эмпиризма или американского прагматизма, должна встретить у нас решительное противодействие. Логика есть и должна остаться философской дисциплиной, изучающей формы и законы правильного мышления [84, с. 103]».

Отсутствие общесоюзных философских изданий привело к тому, что серьезные статьи по логике авторы печатали в специализированных малотиражных провинциальных изданиях типа «Известий» и «Ученых записок». Посвященные различным логическим учениям статьи

В.Ф. Асмуса, В.К. Чалояна появились в «Известиях» АН Армянской ССР [18, 83]. В «Докладах» и «Известиях» АН Азербайджанской ССР печатал статьи по логике А.О. Маковельский [46, 45], в «Сообщениях» АН Грузинской ССР и «Трудах» Института философии АН Грузинской ССР — Л.П. Гокиели. Статьи по логике начали появляться в «Ученых записках» провинциальных университетов и пединститутов. Здесь можно назвать работы П.В. Копнина (Томск), Г.А. Курсанова (Свердловск), А.О. Стернина (Воронеж), В.П. Тугаринова (Калинин).

Надо сказать, что во второй половине 1940-х гг. было два периодических продолжающихся издания, которые печатали философские статьи. Но сегодня об этих изданиях никто не помнит, а потому оказались позабытыми и статьи, там печатавшиеся. Во-первых, это орган Отделения истории и философии АН СССР журнал «Известия АН СССР. Серия истории и философии». Несколько меньше половины его публикаций приходилось на философские работы. Во-вторых, продолжающееся издание Института философии АН СССР «Философские записки». Оно играло роль «Ученых записок» Института. Выходили они нерегулярно, примерно один том в год. Конечно, широкий читатель зачастую не подозревал о существовании этих изданий. В «Известиях» были опубликованы статья П.С. Попова о логике Аристотеля [55], статья А.А. Чудова об умозаключении замещения [85] и цикл статей П.В. Таванца о его теории суждения [73, 75–78, 80, 81].

В I и III выпусках «Философских записок» были напечатаны статьи П.В. Таванца и В.Ф. Глаголева по теории умозаключений [74, 36], а VI выпуск был весь посвящен вопросам логики. Здесь наряду со статьями идеологического характера, в которых призывали развивать диалектическую логику, были помещены и несколько профессиональных статей: П.В. Таванца, П.С. Попова, В.Ф. Глаголева, Е.К. Войшвилло [72, 61, 37, 26].

«Вопросы философии» с первых номеров стали уделять внимание вопросам логики. Отдел логики в журнале вел П.В. Таванец [79].

3. Группа логики Института философии АН СССР

29 января 1946 г. Дирекция Института обратилась к начальнику Управления пропаганды и агитации Г.Ф. Александрову с просьбой принять ее в полном составе, чтобы обсудить необходимые решения по вопросам дальнейшей разработки и изучения логики [10, л. 13].

В феврале 1946 г. в Институте философии АН СССР была сформирована группа логики. Ее возглавил П.С. Попов, продолжавший заведовать кафедрой логики на философском факультете МГУ [3, 5]. Решение Дирекции Института о создании группы и назначении Попова состоялось 26 февраля 1946 г. [9, л. 2]. П.С. Попов был приглашен в Институт в июне 1945 г. для подготовки учебника логики. К маю 1946 г. он написал три главы учебника элементарной логики. Главы обсуждались несколько раз. Рукопись была признана удачной, но требующей доработки. Попов продолжал перерабатывать свой текст [10, л. 69–71; 14, л. 6]. Для участия в работе группы логики была привлечена С.А. Яновская, которая стала вести теоретический коллоквиум по символической логике [11, л. 10]. В апреле 1946 г. на должность старшего научного сотрудника был зачислен Асмус [12, л. 12]. С сентября 1946 г. младшим научным сотрудником группы стал А.А. Чудов [12, л. 9].

Группа занималась подготовкой и изданием книг по логике и подготовкой кадров логиков. В группе логики обсуждались тексты учебников Строговича, Асмуса [11, л. 10]. В 1946 г. под грифом Института был издан учебник Г.И. Челпанова. В 1947 г. вышли учебники В.Ф. Асмуса и С.Н. Виноградова. Редактировал все эти книги А.А. Чудов. В январе–феврале 1946 г. в ЦК ВКП(б) были внесены предложения об издании на русском языке книги А. Тарского «Введение в логику и методологию дедуктивных наук» и «Логика, или искусство мыслить» А. Арно и П. Николя [10, л. 10, 23]. В феврале 1946 г. в ЦК были направлены варианты программ курсов логики для вуза и для школы, составленные Асмусом и Поповым [13, л. 1–28].

Начались первые защиты кандидатских диссертаций по логике. 16 апреля 1946 г. А.А. Ерофеев защитил диссертацию «О символике в математике и логике» [40]. Оппонентами выступили М.Э. Омельяновский, С.А. Яновская, В.Н. Молодший. Вопросам логики была посвящена четвертая глава диссертации. Диссертант утверждал, что математическая логика в отличие от математики не является самостоятельной наукой и может быть использована не только математикой, но и другими науками, главным образом теми, в которых применяется аксиоматический метод. Он показал преимущества, которые дает применение логической символики в математике.

С.А. Яновская отметила нечеткость в определении диссертантом понятия «символ» в применении к математике и логике: в какой мере символ замещает, и в какой — выражает некое содержание. А.А. Чудов и С.Л. Рубинштейн порекомендовали диссертанту глубже ознакомиться не только с логико-математической (Фреге), но и с собственно философской литературой (Моррис, Карнап) по этому вопросу [14, л. 97–114–об.].

9 июля 1946 г. А.А. Чудов защитил диссертацию «Учение о понятии в логике» [86]. Оппонентами выступили С.А. Яновская и М.А. Леонов [15, л. 1].

В 1946 г. в группе были сделаны следующие доклады: С.А. Яновская «Закон исключенного третьего», В.Ф. Асмус «О течениях в современной логике Франции», П.В. Таванец «О суждении в атрибутивной логике и логике отношений». На заседании ученого совета Института были сделаны доклады: П.Е. Вышинский «Вопросы логики в ранних работах товарища Сталина» [11, л. 25–26], С.А. Яновская «Лейбниц как основоположник математической логики» [15, л. 63–68–об.].

3 декабря 1946 г. Дирекция Института философии АН СССР рассмотрела итоги работы группы логики. К успехам было отнесено завершение подготовки к изданию учебников Асмуса и Виноградова. До сотрудников довели решение ЦК об увеличении числа аспирантов по логике в Институте до 20 человек. В свете новых постановлений, расширявших масштабы работы, возникла необходимость в структурной перестройке. Дирекция приняла следующее решение:

> «Необходимо создать сектор логики, в котором сконцентрировать всех советских логиков. Вопросы логики должны разрабатываться в Институте философии. Выявлять среди философов желающих переключиться на логику, поддерживать инициативу отдельных товарищей, желающих писать учебник по логике» [12, л. 77–77–об.].

Мы не будем рассматривать дальнейшую историю группы логики, а затем сектора логики. 23 декабря 1947 г. Президиум АН СССР утвердил новую структуру Института философии АН СССР, куда вошел сектор логики, который возглавил А.А. Чудов [6, 4, 67]. Эта задача требовала бы уже профессионального логического разбора [16]. Приведем только воспоминания Б.В. Бирюкова о том, каким был сектор логики в 1948 г.:

> «Недолгое пребывание в аспирантуре академического института было столь наполнено событиями, что заслуживает специального освещения. Остановлюсь только на событиях, имеющих отношение к логике. Я познакомился с ранее неизвестным мне представлением силлогистики на основе “принципа замещения” — с подходом, который в своих докладах и публикациях развивал А.А. Чудов. Оценить подход Чудова было для

меня тогда затруднительно, так как я не был знаком ни с алгеброй логики (особенно в интерпретации Джевонса, где главным правилом вывода служил как раз упомянутый принцип), ни с трудами М.И. Каринского, который строил ‘логику отношений’ как теорию умозаключений, тоже основанную на этом принципе.

Запомнились также доклады Петра Васильевича Таванца, которые он делал на заседаниях Ученого совета Института; докладчик рассказывал о разработанной им теории суждений и умозаключений. Таванец средств математической логики не привлекал. Максимум, на что распространялись его логические новации, была логика отношений, дискуссии вокруг которой только начинались. Рассматривая альтернативу “атрибутивная логика — логика отношений”, Таванец высказывался в пользу первой, т.е. логики, признающей универсальной формой суждений их субъектно-предикатную структуру, противоположный же взгляд осуждал как “идеалистический”» [20, с. 41].

4. Курсы для подготовки преподавателей логики в вузах и школах в 1946 г.

В июле 1946 г. Министерство высшего образования СССР организовало в г. Химки Курсы для подготовки преподавателей логики в вузах и школах. Среди лекторов Курсов были В.Ф. Асмус, П.С. Попов, С.Н. Виноградов [1].

На курсы прибыли 100 профессоров, доцентов и преподавателей из университетов и институтов страны. Курсы были рассчитаны на шесть недель. Читались лекции, проводились семинарские занятия. В семинаре по методике преподавания логики проводилось обсуждение новых программ по логике для высших и средних учебных заведений.

В учебном плане курсов наряду с общими лекциями по логике были предусмотрены спецкурсы по диалектическому материализму, по критике современных направлений в логике. Читать спецкурс по истории логики Минвуз СССР пригласил из Баку А.О. Маковельского. По окончании Курсов Минвуз СССР предложил ему написать учебник по истории логики. «История логики» А.О. Маковельского вышла в 1967 г.

16 июля на открытии курсов с большой речью выступил академик Г.Ф. Александров [7]. Это была типичная установочная речь идеологического руководителя того времени, опубликованный текст которой отличался от самой речи тем, что из него изымались рассказы о посещении выступавшим Сталина и о том, что Сталин сказал по поводу обсуждаемых здесь вопросов. Именно так, в устной форме, тогда доводились до общественности установки, которые потом внедрялись в жизнь

Александров начал свое выступление с обоснования роли логики в науке, образовании и жизни. Логика занимает важное место в философском образовании каждого культурного человека. Она дисциплинирует мысль, приучает к последовательности рассуждений, предохраняет от ошибок. Значение изучения логики состоит в сознательном пользовании всей системой правил мышления. Надо сказать, что Александров имел право говорить о логике, потому что еще в МИФЛИ хорошо изучил Органон Аристотеля и затронул вопросы логики в своей книге об Аристотеле.

Находясь на пике острой борьбы с группой Митина — Юдина за главенство в советской философии, Александров воспользовался случаем, чтобы бросить камешек в этот «огород». Изучение и преподавание логики, сказал он, раньше было поставлено плохо. Логика как наука оказалась вне поля зрения философских работников. Это идет от старых ошибок товарищей, работающих в области философии, продолжал Александров, когда не в меру ретивые товарищи часто вообще считали всю прежнюю культуру несовременной и устаревшей. Среди философских работников были довольно широко распространены взгляды, согласно которым формальная логика не имеет какой бы то ни было ценности и какого-либо значения. Надо покончить с точкой зрения, которая не признает какой-либо ценности за формальной логикой, подчеркнул Александров.

Далее Александров перешел к изложению высказываний Сталина, полученных в ходе личной беседы. Товарищ Сталин, говорил Александров, неоднократно обращал внимание на необходимость знания законов и правил логики нашими кадрами.

> «В связи с этим, — продолжил Александров, — я хочу передать один разговор, который имел место недавно с товарищем Сталиным по поводу изучения логики. Работники Управления пропаганды и агитации были у товарища Сталина в связи с вопросами теоретической и идеологической работы. В конце беседы мы решили спросить у товарища Сталина — может быть нам в области изучения логики начать с того, чтобы опубликовать несколько статей о логике в журнале "Большевик"? Товарищ Сталин заинтересовался и начал расспрашивать о том, какие вообще имеют место суждения среди философов по вопросам логики. Я рассказал о спорах по вопросам логики, сказал, что некоторые вовсе отвергают необходимость изучения этой науки, считают ее тряпичным старьем, к которому стыдно обращаться, другие считают, что это — элемент диалектической логики, третьи — что логика — это вообще самостоятельная наука. Оказалось, что сам товарищ Сталин все читал, что написано по вопросам логики,

> и начал критиковать. Товарищ Сталин критиковал взгляд, согласно которому некоторые желают как-то дополнить формальную логику диалектической или наоборот. Товарищ Сталин сказал, что из всех статей и выступлений по этому вопросу не поймешь, какую же логику изучают. Например, говорят о законе тождества. Люди пишут, что закон этот нужно изучать, но вслед за этим говорят, что закон этот недействительный, что его нельзя применять, что он не имеет значения, что он снят и опровергнут логикой диалектической. Спрашивается: зачем же нужно изучать закон, снятый и опровергнутый — закон тождества. Товарищ Сталин сказал, что нужно изучать формальную логику и еще раз повторил эту свою мысль. Что касается диалектики, то товарищ Сталин сказал: “Какая может быть диалектика до тех пор, пока не знают формальной логики?”. Указания товарища Сталина совершенно очевидные и ясные — нужно изучать формальную логику» [7, л. 10–11].

Затем Александров рассказал еще об одном высказывании Сталина, которое ярко характеризует уровень его мышления. Сталин сказал, что много есть еще людей, которые рассуждают по «крестьянской логике». Вот, например, в ночь на 22 июня 1941 г. была красная луна, и по «крестьянской логике» она принесла с собой войну. Так, своими словами и «терминами» знаток литературы по формальной логике излагал логическую ошибку «после этого, значит по причине этого». А знаток Органона сидел и записывал эти благоглупости в качестве высших истин, которые надо будет потом донести дословно до советской общественности.

В сентябре 1946 г. итоги работы курсов были подведены на совещании в Институте философии АН СССР [12, л. 46].

5. Первые кафедры логики в высших учебных заведениях

Б.В. Бирюков пишет, что кафедра логики на философском факультете МГУ была создана в августе 1943 г., и приводит соответствующий приказ об образовании кафедры и назначении и.о. заведующего П.С. Попова, ссылаясь на Архив МГУ [22, с. 12]. Опираясь на воспоминания современников, Б.В. Бирюков пишет, что логику в МГУ в это время преподавали А.Ф. Лосев, З.Я. Белецкий, П.С. Попов [22, с. 153–154]. Но из личного дела П.С. Попова, хранящегося в том же самом Архиве МГУ, следует, что он стал и.о. заведующего кафедрой логики в феврале 1945 г. [3]. Вопрос о времени и формах возникновения кафедры логики МГУ, видимо, нуждается в дополнительном изучении. Возможно, здесь следует различать стадию решения об образовании той или иной структуры и стадию реального осуществления этого решения.

П.С. Попов читал курс логики еще в бытность свою преподавателем Нижегородского университета в 1919–1921 гг. В 1926 г. в сборнике «Пути реализма» им были опубликованы статьи по логике [59, 60]. В должности заведующего кафедрой логики философского факультета МГУ П.С. Попов был официально утвержден в октябре 1947 г. В 1947 г. он опубликовал в журнале «Вопросы философии» работу М.И. Каринского, ставшую к тому времени библиографической редкостью [58]. Профессором кафедры логики стал В.Ф. Асмус. А.И. Уемов вспоминал, как еще до создания кафедры, в 1945 г. Асмус читал в МГУ публичную лекцию «Предмет и значение логики», где убедительно показывал необходимость логики для правильного мышления [28, с. 87].

В 1946–1947 учебном году кафедра развернула преподавание курса логики на гуманитарных факультетах в объеме 54 акад. часов, и в значительно большем объеме для студентов философского факультета. Пользовались на занятиях пока что учебником Челпанова. Правда, осваивать решение логических задач многим студентам было трудно. Читать спецкурс по математической логике была приглашена С.А. Яновская [65].

На кафедре кроме П.С. Попова и В.Ф. Асмуса работал в должности доцента С.Н. Виноградов. В 1946 г. он защитил здесь кандидатскую диссертацию «Основные проблемы формальной логики». Работа отличалась ясностью изложения. К ней были приложены упражнения и задачи, примеры для которых автор брал из русской классической литературы [71]. Б.В. Бирюков писал в воспоминаниях о том, как сдавал С.Н. Виноградову экзамен по логике. Виноградов принимал экзамен вдумчиво и взыскательно [21, с. 154].

В 1947 г. на кафедре прошла защита кандидатской диссертации П.С. Козьякова «О соотношении формальной и диалектической логики». Диссертант отметил ценность формальной логики не только для научного познания, но и для диалектического мышления [70].

В сентябре 1946 г. в Академии общественных наук при ЦК ВКП(б) была образована кафедра логики и психологии. Заведующим кафедрой был назначен психолог Б.М. Теплов. Заместителем заведующего по вопросам логики был назначен П.Е. Вышинский, который читал здесь курс логики с января 1946 г. [66]. П.Е. Вышинский был из тех партийных философов, кого партия «бросила» закрыть брешь в преподавании логики. Эти философы мало понимали в логике, но принесли пользу пропагандой значимости логики среди советской общественности. В октябре 1946 г. П.Е. Вышинский выступил в Доме писателей с докладом «Значение изучения логики советскими писателями». По поручению кафедры П.Е. Вышинский подготовил в 1947 г. брошюру «О законах мышления», а в 1948 г. рекомендательную Программу по логике.

В своих статьях он активно выступал за «партийность» в разработке вопросов логики [32]. Особенно он настаивал на «идейности» в подборе иллюстративного материала, чтобы учить советских людей логическому мышлению на идеологически выверенных примерах. Досталось от него учебнику Асмуса — именно за перенасыщенность примерами из материала математики и естественных наук, которые сами по себе сложны и потому только затрудняют усвоение собственно логического материала. В другой статье П.Е. Вышинский писал, что логическая правильность не может не зависеть от содержания и должна обеспечивать истинность выводов [34].

В ноябре 1946 г. на кафедру логики и психологии АОН после многих лет пребывания вне философских структур был приглашен на должность старшего научного сотрудника А.С. Ахманов [2]. В апреле 1947 г. он перешел старшим преподавателем на кафедру логики философского факультета МГУ, откуда был уволен в августе 1952 г. С сентября 1949 г. А.С. Ахманов работал в Московском областном пединституте. 11 января 1951 г. он защитил здесь кандидатскую диссертацию «Логические учения Древней Греции классического периода».

Б.В. Бирюков приводит факты о том, что в ЛГУ логика стала преподаваться с сентября 1943 г. [21, с. 138]. В сентябре 1947 г. на философском факультете Ленинградского университета была сформирована кафедра логики. И.о. заведующего кафедрой стал старший преподаватель М.И. Кинкулькин. В августе 1949 г. после защиты кандидатской диссертации в АОН при ЦК ВКП(б) заведовать этой кафедрой был направлен И.Я. Чупахин [68]. На кафедре работали А.Т. Дмитриев, П.Н. Пипуныров, С.И. Поварнин, Н.П. Попов. Ленинградские логики использовали для публикации своих работ материалы Научных сессий ЛГУ по философской секции, философские выпуски «Ученых записок» ЛГУ и журнал «Вестник Ленинградского университета» [43, 51, 52]. На кафедре прошли первые защиты. В 1952 г. Н.П. Попов защитил кандидатскую диссертацию «Об определении понятий» [53].

6. Новое «закручивание гаек» в отношении логики

В 1947–1948 гг. в процессе возрождения логики количество перешло в качество. Началась регулярная защита диссертаций по логике [41, 39]. В 1947–1948 гг. стараниями С.А. Яновской и В.Ф. Асмуса были выпущены переводы зарубежных учебников по современной логике.

Не выходя существенно за хронологические рамки нашей статьи, обозначим пунктиром основные тенденции развития логики в СССР в последующие годы, имея в виду социально-политические аспекты этого развития.

Не успела логика восстановиться, как ее снова принялись обвинять в формализме, а вскоре дело дошло до споров о том, какая логика лучше — формальная или диалектическая.

Становление кафедры логики в МГУ было прервано приказом министра высшего образования СССР С.В. Кафтанова от 23 марта 1948 г. Приказ вышел по итогам министерской проверки работы кафедры логики МГУ. В приказе кафедра и персонально Попов, Асмус и Виноградов были обвинены в формализме. Б.В. Бирюков приводит документы о том, что аналогичной проверке 24 апреля 1948 г. подверглась кафедра логики ЛГУ. В принятом по результатам проверки документе говорилось, что «в работе кафедры логики были крупные недостатки, в основном совпадающие с недостатками, вскрытыми Министерством высшего образования в работе кафедры логики Московского государственного университета», т.е. «игнорировали имена представителей советской науки», «допускались идеалистические, формалистические ошибки» [22, с. 82].

В целях борьбы с формализмом в логике Министерством высшего образования СССР было решено созвать Всесоюзное совещание по логике. Совещание прошло 21–26 июня 1948 г. С тематическими докладами на совещании выступили Б.М. Кедров, П.Е. Вышинский, А.А. Чудов, П.В. Таванец.

В докладе начальника отдела преподавания общественных наук Минвуза СССР Н.С. Шевцова было сказано, что руководство кафедрой логики МГУ поставлено совершенно неудовлетворительно. Чиновник от философии обвинил Попова и Асмуса в объективистской подаче материала в курсе логики [87]. Зам. министра высшего образования СССР В.И. Светлов призвал участников совещания «всесторонне» обсудить учебник Асмуса. В родившемся совсем недавно в муках учебнике нашли аполитичность и безыдейность. Делегаты совещания обвинили Асмуса в том, что по учебнику Асмуса совершенно невозможно установить позицию автора, или хотя бы его точку зрения на какой-либо отдельный вопрос логики, что он нигде не выступил с критикой своего учебника, а также в том, что он пытался помешать обсуждению его формалистических ошибок на данном совещании, утверждая, что уже на 60 процентов обновил книгу и продолжает ее дорабатывать [63].

В.Ф. Асмус хоть и бывал часто «бит» идеологами, но так и не привык к ритуалам массовых обсуждений-осуждений сталинского времени. Поэтому повел себя на совещании «неправильно», провоцируя своей позицией новые проработки. Он не только не отказался от своих «ошибочных» установок, но даже пытался их отстаивать. Видимо, скрывая иронию, он заявил, что «мы еще очень далеки от понимания сущности формализма» [49]. Мол, вы сначала строго логически определите, что такое формализм, а потом уже делайте громогласные обвинения. Досталось на совещании и П.С. Попову. Его программа по логике была признана непригодной. Попов так и не смог ответить, что он делает для устранения «вредного отрыва» преподавания логики от задач социалистического строительства.

В 1949 г. на V Всесоюзном совещании заведующих кафедрами марксизма-ленинизма и философии высших учебных заведений вновь принялись прорабатывать В.Ф. Асмуса и С.Н. Виноградова за их учебники логики. В своем докладе министр высшего образования СССР С.В. Кафтанов заявил, что преподавание на кафедре логики Московского университета строится на материалах далекого прошлого, что в своих печатных работах члены кафедры профессор Асмус и доцент Виноградов избегают изучения живого мышления советских людей, не помогают учащимся овладевать законами правильного мышления на примерах из советской действительности [42]. На совещании было решено издать новую типовую программу по логике для вузов [47].

Участники совещания, и среди них М.С. Строгович, принялись дружно критиковать В.Ф. Асмуса за аполитичность и формализм. В.Ф. Асмус понимал теперь, что если он вовремя не «признает» допущенные «ошибки», то последствия могут быть плохими не только для него, но и для кафедры логики. Ему пришлось выступить и признать критику «справедливой». Он сказал, что занимается переработкой учебного курса логики с учетом высказанной критики. О своем учебнике Асмус сказал: «В книге не была раскрыта противоположность между материалистическим и идеалистическим пониманием предмета логики, не развернута острая, боевая критика реакционных идеалистических и формалистических учений, распространяемых современными логиками капиталистических стран» [27, с. 368].

Но «соль» выступления была не в этих дежурных ритуальных фразах. Асмус закончил выступление, сказав, что в его учебнике мало примеров, показывающих, как классики марксизма-ленинизма выступают мастерами и корифеями в применении логики. Ведь не только для материалистической диалектики, но также и для логики, сказал Асмус, труды классиков марксизма-ленинизма «представляют неоценимый и притом единственно непререкаемо авторитетный для нас источник» [24, с. 49]. Если перевести эти слова с ритуально-бюрократического языка на общепонятный, автор учебника признал, что вместо примеров «из современной науки», как делал это он, положения учебника логики надо было иллюстрировать примерами из речей Сталина.

В результате на кафедре логики философского факультета МГУ было сменено руководство. Началась бесплодная борьба сторонников формальной и диалектической логики. На протяжении 1950 и 1951 гг. «Вопросы философии» вместо позитивной разработки логики из номера в номер печатали статьи о все той же проблеме соотношения формальной и диалектической логики.

7. Заключение

В статье рассмотрен начальный этап процесса возрождения логики: 1941–1946 гг. Последующее развитие логики в нашей стране не входит в задачи статьи. Оно нуждается в более широком и фундаментальном исследовании.

Мы рассказали о некоторых событиях из истории возрождения логики в нашей стране, опираясь на документы фонда Института философии АН СССР, Архива РАН за 1941–1946 гг. Это — только начало такой работы. У историков логики в этом отношении большие перспективы. Прежде всего, мы совершенно не касались специальных вопросов логики. Поэтому специалистам по логике было бы необходимо просмотреть те же самые архивные дела под соответствующим углом зрения. Далее открываются широкие перспективы поиска: в том же фонде за другие годы, начиная с 1947 г., в других фондах Архива РАН, например, в фонде Отделения истории и философии АН СССР, в фондах Управления пропаганды и агитации и Идеологического отдела ЦК ВКП(б) в Российском государственном архиве социально-политической истории, в Архиве МГУ. В Государственном архиве Российской Федерации должны храниться документы, связанные с реализаций постановления ЦК о преподавании логики в средней школе. Незаменимым пособием в работе будет библиографический указатель А.П. Примаковского [62].

Желаем историкам логики успехов!

Литература

[1] *Александров Г.Ф.* Об изучении логики // Учительская газета. 1946. 31 июля.

[2] Архив МГУ. Ф. 1. Оп. 34л. Д. 458.

[3] Архив МГУ. Ф. 1. Оп. 35л. Д. 2717.

[4] Архив МГУ. Ф. 1. Оп. 35л. Д. 3810.

[5] Архив РАН. Ф. 411. Оп. 37. Д. 1273.

[6] Архив РАН. Ф. 411. Оп. 39. Д. 1930.

[7] Архив РАН. Ф. 684. Оп. 2. Д. 96.

[8] Архив РАН. Ф. 1922. Оп. 1. Д. 171.

[9] Архив РАН. Ф. 1922. Оп. 1. Д. 188.

[10] Архив РАН. Ф. 1922. Оп. 1. Д. 189.

[11] Архив РАН. Ф. 1922. Оп. 1. Д. 195.

[12] Архив РАН. Ф. 1922. Оп. 1. Д. 196.

[13] Архив РАН. Ф. 1922. Оп. 1. Д. 204

[14] Архив РАН. Ф. 1922. Оп. 1. Д. 205.

[15] Архив РАН. Ф. 1922. Оп. 1. Д. 207.

[16] Архив РАН. Ф. 1922. Оп. 1. Д. 313.

[17] *Асмус В.Ф.* Для чего нужно изучать логику // Агитатор. 1944. № 17–18. С. 37–42.

[18] *Асмус В.Ф.* Логика отношений в работах Шарля Серрюса // Известия АН Армянской ССР. Серия: Общественные науки. 1947. № 8. С. 13–31

[19] *Асмус В.Ф.* Логические законы мышления // Под знаменем марксизма. 1944. № 4–5. С. 70–81.

[20] *Бирюков Б.В.* Борьба вокруг логики в Московском государственном университете в первое послесталинское десятилетие (1954–1965) // Логика и В.Е.К. М., 2003. С. 46–48.

[21] *Бирюков Б.В.* Трудные времена философии. М.: URSS, 2006. 248 с.

[22] *Бирюков Б.В.* Трудные времена философии. Ч. 1. М.: URSS, 2008. 248 с.

[23] *Бонков А.И.* Учебник логики для средней школы в Болгарии // Вопросы философии. 1947. № 2. С. 334–336.

[24] Краткий обзор прений на Всесоюзном совещании заведующих кафедрами марксизма-ленинизма и философии // Вестник высшей школы. 1949. № 8. С. 44–63

[25] *Виноградов С.Н.* Об изучении логики // Советская педагогика. 1943. № 8–9. С. 13–17.

[26] *Войшвилло Е.К.* Критика логики отношений как релятивистского направления в логике // Философские записки. Т. VI. М., 1953. С. 133–187.

[27] *Осьмаков И.И.* Всесоюзное совещание заведующих кафедрами марксизма-ленинизма и философии высших учебных заведений // Вопросы философии. 1949. № 1. С. 366–379.

[28] Вспоминая В.Ф. Асмуса... М.: Прогресс-Традиция, 2001. 296 с.

[29] *Вышинский П.Е.* К изучению логики // Партийная жизнь. 1946. № 2. С. 74–82.

[30] *Вышинский П.Е.* Как возникла и для чего необходима логика // Октябрь. 1948. № 1. С. 146–161.

[31] *Вышинский П.Е.* Об изучении логики // Советское студенчество. 1946. № 6–7. С. 7–8.

[32] *Вышинский П.Е.* Об одном из недостатков в преподавании логики // Вопросы философии. 1947. № 2. С. 369–372.

[33] *Вышинский П.Е.* Об умении анализировать и обобщать // Партийная жизнь. 1947. № 8. С. 37–45.

[34] *Вышинский П.Е.* Против формализма и аполитичности в преподавании логики // Вопросы философии. 1948. № 1. С. 344–348.

[35] *Георгиев Ф.И.* О преподавании элементов логики в старших классах средней школы // Советская педагогика. 1941. № 9. С. 34–41.

[36] *Глаголев В.Ф.* О видах индуктивных умозаключений // Философские записки. Т. III. М.-Л., 1950. С. 180–207.

[37] *Глаголев В.Ф.* Простейшие логические приемы установления причинной зависимости явлений // Философские записки. Т. VI. М., 1953. С. 94–132.

[38] *Груздев П.Н.* Понятия закона, принципа и правила в педагогике // Советская педагогика. 1946. № 4–5. С. 3–32.

[39] Диссертации, защищенные в Институте философии АН СССР (1939–1980 гг.). М., 1983. 120 с.

[40] *Ерофеев А.А.* О символике в математике и логике. Дисс... канд. филос. наук. М., 1946. 165 с.

[41] Кандидатские диссертации, защищенные в Академии общественных наук при ЦК КПСС: за 1947–1950 гг. М., 1951; за 1951–1955 гг. М., 1955; за 1955–1958 гг. М., 1959; за 1959–1965 гг. М., 1966.

[42] *Кафтанов С.В.* За дальнейшее улучшение преподавания марксистско-ленинской теории в высшей школе // Вестник высшей школы. 1949. № 8. С. 4–25.

[43] *Кинкулькин М.И.* Энгельс о формальной логике // Научная сессия ЛГУ 1945 г. Тезисы докладов по секции философских наук. Л., 1945. С. 16–20.

[44] *Комаровский Б.Б.* Об эволюции понятий закона, принципа и правила и их взаимосвязи в педагогике // Советская педагогика. 1947. № 6. С. 30–45.

[45] *Маковельский А.О.* Логика и наука // Известия АН Азербайджанской ССР. 1949. № 4. С. 167–170.

[46] *Маковельский А.О.* Модусы первой и третьей фигур категорического силлогизма // Доклады АН Азербайджанской ССР. 1946. Т. II. № 6. С. 268–270.

[47] Новая программа по логике // Вестник высшей школы. 1949. № 9. С. 45–46.

[48] О преподавании логики и психологии в средней школе // Культура и жизнь. 1946. 30 ноября.

[49] *Осьмаков И.И.* Всесоюзное совещание по логике // Вопросы философии. 1948. № 2. С. 376–377.

[50] *Петров Н.А.* Логические категории: закон, принцип и правило в педагогике // Советская педагогика. 1946. № 7. С. 32–49.

[51] *Поварнин С.И.* О законах мысли формальной логики и практике мышления // Научная сессия ЛГУ 1945 г. Тезисы докладов по секции философских наук. Л., 1945. С. 13–15.

[52] *Поварнин С.И.* О формальных законах мысли // Ученые записки ЛГУ. № 100. Серия философских наук. Вып. 1. Л., 1947. С. 237–241.

[53] *Попов Н.П.* Об определении понятий. Автореферат. Дисс... канд. филос. наук. Л., 1952. 17 с.

[54] *Попов П.С.* Законы мышления // Черноморская коммуна. 1946. № 39.

[55] *Попов П.С.* Логика Аристотеля и логика формальная // Известия АН СССР. Серия истории и философии. 1945. № 5. С. 301–318.

[56] *Попов П.С.* Логика и ее значение. Одесса, 1947.

[57] *Попов П.С.* Логика и ее значение // Черноморская коммуна. 1946. № 38.

[58] *Попов П.С.* О курсе логики М.И. Каринского // Вопросы философии. 1947. № 2. С. 386–396.

[59] *Попов П.С.* О реальности категорий // Пути реализма. М., 1926. С. 99–132.

[60] *Попов П.С.* О функции суждения в познании // Пути реализма. М., 1926. С. 133–156.

[61] *Попов П.С.* Суждение и его строение // Философские записки. Т. VI. М., 1953. С. 71–93.

[62] *Примаковский А.П.* Библиография по логике. М., 1955. 96 с.

[63] Против формалистического направления в логике: Всесоюзное совещание по логике // Вестник высшей школы. 1948. № 8. С. 14–17.

[64] *Рождественский Н.С.* Элементы логики на уроках русского языка // Советская педагогика. 1943. № 11–12. С. 8–14.

[65] *Рожин В.П.* Опыт преподавания логики в Московском университете // Вестник высшей школы. 1947. № 9. С. 45–46.

[66] Российский государственный архив социально-политической истории. Ф. 17. Оп. 100. Д. 10131; регистрационный бланк члена ВКП(б) 0013635 (1936).

[67] Российский государственный архив социально-политической истории. Ф. 17. Оп. 100. Д. 145449; учетная карточка члена КПСС № 10468190 (1973).

[68] Российский государственный архив социально-политической истории. Ф. 17. Оп. 100. Д. 222805; учетная карточка члена КПСС № 00237766 (1973).

[69] *Скаткин М.Н.* К вопросу о законах, принципах и правилах в педагогике // Советская педагогика. 1947. № 8. С. 15–27.

[70] *Скворцов А.П.* О диссертации П.С. Козьякова на тему «О соотношении формальной и диалектической логики» // Вестник Московского университета. 1947. № 5. С. 137–140.

[71] *Скворцов А.П.* О диссертации С.Н. Виноградова на тему «Основные проблемы формальной логики» // Вестник Московского университета. 1946. № 3–4. С. 143–144.

[72] *Таванец П.В.* К вопросу о классификации суждений в истории логики // Философские записки. Т. VI. М., 1953. С. 38–70.

[73] *Таванец П.В.* К вопросу о различном понимании предмета логики // Известия АН СССР. Серия истории и философии. 1944. № 6. С. 276–286.

[74] *Таванец П.В.* Классификация умозаключений // Философские записки. Т. I. М.–Л., 1946. С. 84–117.

[75] *Таванец П.В.* Критика истолкования природы суждений логикой отношений // Известия АН СССР. Серия истории и философии. 1950. № 4. С. 360–372.

[76] *Таванец П.В.* О видах суждения // Известия АН СССР. Серия истории и философии. 1950. № 1. С. 69–84.

[77] *Таванец П.В.* О структуре суждения в атрибутивной логике и в логике отношений // Известия АН СССР. Серия истории и философии. 1946. № 6. С. 497–506.

[78] *Таванец П.В.* Об идеалистической критике аристотелевской теории суждения // Известия АН СССР. Серия истории и философии. 1947. № 4. С. 324–330.

[79] *Таванец П.В.* Против идеалистического истолкования природы суждения // Вопросы философии. 1948. № 1. С. 150–171.

[80] *Таванец П.В.* Суждение и предложение // Известия АН СССР. Серия истории и философии. 1951. № 2. С. 155–164.

[81] *Таванец П.В.* Условное суждение // Известия АН СССР. Серия истории и философии. 1952. № 2. С. 165–176.

[82] *Тугаринов В.П.* Беглые замечания по поводу важного вопроса // Советская педагогика. 1947. № 6. С. 45–47.

[83] *Чалоян В.К.* Древнеармянская интерпретация логики Аристотеля // Известия АН Армянской ССР. Серия: Общественные науки. 1946. № 4. С. 43–61.

[84] *Чудов А.А.* К вопросу о преподавании логики в средней школе // Советская педагогика. 1947. № 10. С. 100–104.

[85] *Чудов А.А.* Умозаключение замещения // Известия АН СССР. Серия истории и философии. 1948. № 3. С. 270–280.

[86] *Чудов А.А.* Учение о понятии в логике. Дисс... канд. филос. наук. М., 1946. 245 с.

[87] *Шевцов Н.С.* Задачи преподавания логики в вузах // Вестник высшей школы. 1948. № 8. С. 8–14.

S.N. Korsakov

From the History of the Renaissance of Logic in the USSR in 1941–1946. Part II

Korsakov Sergey Nikolaevich
Department of Humanitarian Expertise and Bioethics,
Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences.
12/1 Goncharnaya St., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: snkorsakov@yandex.ru

In the article on the basis of archival documents describes the initial stage of the Renaissance of teaching and learning logic in the USSR in the first half of the 1940s. Considered: a conversation of Director of the Institute of Philosophy P.F. Yudin with Stalin about creating logic tutorial in 1941, the course and outcome of the discussion of logic textbooks by V.F. Asmus and E.J. Colman at the Institute of Philosophy of the Russian Academy of Sciences in 1943, the discussion on the re-release of logic tutorial by G.I. Chelpanov in the Institute of Philosophy of the Russian Academy of Sciences in 1943, job training Courses for teachers of logic in the universities and schools of higher education of the USSR in 1946.

Keywords: logic, Soviet philosophy, Institute of Philosophy, Stalinism

References

[1] Aleksandrov, G.F. "Ob izuchenii logiki" [On the study of logic], *Uchitelskaya gazeta*, 1946, 31 iunya. (In Russian)
[2] Arhiv MGU [Archive of MGU]. F. 1. Op. 34л. D. 458. (In Russian)
[3] Arhiv MGU [Archive of MGU]. F. 1. Op. 35л. D. 2717. (In Russian)
[4] Arhiv MGU [Archive of MGU]. F. 1. Op. 35л. D. 3810. (In Russian)
[5] Arhiv RAN [Archiev of RAS]. F. 411. Op. 37. D. 1273. (In Russian)
[6] Arhiv RAN [Archiev of RAS]. F. 411. Op. 39. D. 1930. (In Russian)
[7] Arhiv RAN [Archiev of RAS]. F. 684. Op. 2. D. 96. (In Russian)
[8] Arhiv RAN [Archiev of RAS]. F. 1922. Op. 1. D. 171. (In Russian)
[9] Arhiv RAN [Archiev of RAS]. F. 1922. Op. 1. D. 188. (In Russian)
[10] Arhiv RAN [Archiev of RAS]. F. 1922. Op. 1. D. 189. (In Russian)
[11] Arhiv RAN [Archiev of RAS]. F. 1922. Op. 1. D. 195. (In Russian)
[12] Arhiv RAN [Archiev of RAS]. F. 1922. Op. 1. D. 196. (In Russian)
[13] Arhiv RAN [Archiev of RAS]. F. 1922. Op. 1. D. 204 (In Russian)
[14] Arhiv RAN [Archiev of RAS]. F. 1922. Op. 1. D. 205. (In Russian)
[15] Arhiv RAN [Archiev of RAS]. F. 1922. Op. 1. D. 207. (In Russian)

[16] Arhiv RAN [Archiev of RAS]. F. 1922. Op. 1. D. 313. (In Russian)

[17] Asmys, V.F. "Dlya chego nuzno izuchat logiku" [Why do I need to study logic], *Agitator*, 1944, no 17–18. pp. 37–42. (In Russian)

[18] Asmus, V.F. "Logika otnoshenij vrabotah Sharla Serrusa" [Logic relationship in the works of Charles Sarryusa], *Isvestija AN Armyanskoj SSR. Serija: Obschestvennye nauki*, 1947, no 8. pp. 13–31 (In Russian)

[19] Asmus, V.F. "Logicheskie zakony myshlenia" [The logical laws of thinking], *Pod znamenem marksisma*, 1944, no 4–5. pp. 70–81. (In Russian)

[20] Birukov, B.V. "Borba vokrug logiki v Moskovskom gosudarstvennom universitete v pervoe poslestalinskoe desyatiletie (1954 - 1965)" [The fight over the logic of the Moscow State University on the first post-Stalin decade (1954 - 1965)], *Logika i V.E.K. M.*, 2003. (In Russian)

[21] Birukov, B.V. *Trudnye vremena filosofii* [Tough philosophy times]. Moscow, URSS Publ., 2006. 248 pp. (In Russian)

[22] Birukov, B.V. *Trudnye vremena filosofii. Chast' 1* [Tough philosophy times. Part 1]. Moscow, URSS Publ., 2008. 248 pp. (In Russian)

[23] Bonkov, A.I. "Uchebnik logiki dlya srednej shkoly v Bolgarii" [Textbook logic high school in Bulgaria], *Voprosy filosofii*, 1947, no 2, pp. 334–336. (In Russian)

[24] "Kratkii obzor prenii na Vsesoyuznom soveshchanii zaveduyushchikh kafedrami marksizma-leninizma i filosofii" [Overview of the debate on the All-Union meeting of heads of departments of Marxism-Leninism and philosophy], *Vestnik vysshej shkoly.* 1949, no 8. pp. 44–63. (In Russian)

[25] Vinigradov, S.N. "Ob izuchenii logiki" [On the study of logic], *Sovetskaya pedagogika*, 1943, no 8–9, pp. 13–17. (In Russian)

[26] Vojshvillo, E.K. "Kritika logiki отnoshenij кaк relyativistskogo napravleniya v logike" [Criticism of the relativistic logic relations both directions in logic], *Fillosofskie zapiski*, T. VI. M., 1953, pp. 133–187. (In Russian)

[27] Os'makov, I.I. "Vsesoyuznoe soveshchanie zaveduyushchikh kafedrami marksizma-leninizma i filosofii vysshikh uchebnykh zavedenii" [All-Union meeting of heads of departments of Marxism-Leninism and philosophy of higher education institutions], *Voprosy filosofii.* 1949. no 1. pp. 366–379. (In Russian)

[28] *Vspominaya V.F. Asmusa...* [Remembering V.F. Asmus]. Moscow: Progress-Tradition Publ., 2001. 296 pp. (In Russian)

[29] Vyshinskij, P.E. "K izucheniju logiki" [To the study of logic], *Partijnaya jizn*, 1946, no 2, pp. 74–82. (In Russian)

[30] Vyshinskij, P.E. "Кaк voznikla i dlya chego neobhodima logika" [How did you come and why should logic], *Окmyabr*, 1948, no 1, pp. 146–161. (In Russian)

[31] Vyshinskij, P.E. "Ob izucheniji logiki" [On the study of logic], *Sovetskoe studenchestvo*, 1946, no 6–7, pp. 7–8. (In Russian)

[32] Vyshinskij, P.E. "Ob odnom iz nedostatkov v prepodavanii logiki" [On one of the shortcomings in the teaching of logic], *Voprosy filosofii*, 1947, no 2, pp. 369–372. (In Russian)

[33] Vyshinskij, P.E. "Ob umenii analizirovat i obobschat" [On the ability to analyze and summarize], *Partijnaya jizn*, 1947, no 8, pp. 37–45. (In Russian)

[34] Vyshinskij, P.E. "Protiv formalizma i apolitichnosti v prepodavanii logiki" [Against Formalism and apolitical in teaching logic], *Voprosy filosofii*, 1948, no 1, pp. 344–348. (In Russian)

[35] Georgiev, F.I. "O prepodavanii elementov logoki v starshih klassah srednej shkoly" [On the teaching of logic elements in high school], *Sovetskaya pedagogika*, 1941, no 9, pp. 34–41. (In Russian)

[36] Glagolev, V.F. "O vidah induktivnyh umozakluchenij" [On the forms of inductive inference], *Fillosofskie zapiski*, T. III. M. – L., 1950, pp. 180–207. (In Russian)

[37] Glagolev, V.F. "Prosteishie logicheskie priemy ustanovleniya prichinnoj zavisimosti yavlenij" [Simple logical methods to establish causality of phenomena], *Fillosofskie zapiski*, T. VI. M., 1953. pp. 94–132. (In Russian)

[38] Gruzdev, P.N. "Ponyatiya zakona, prinzipa i pravila v pedagogike" [The concepts of law, principles and rules in pedagogy], *Sovetskaya pedagogika*, 1946, no 4–5, pp. 3–32. (In Russian)

[39] Dissertazii, zaschischennye v Institute filosofii AN SSSR (1939-1980 гг.) [Theses protected by the Institute of Philosophy of the USSR Academy of Sciences]. M., 1983. 120 pp. (In Russian)

[40] Erofeev, A.A. *O simvolike v matematike i logike* [On the symbolism in mathematics and logic]. Diss...кand. filos. nauk. M., 1946. 165 pp. (In Russian)

[41] Kandidatskie dissertazii, zaschichennye v Aкademii obschestvennyh nauk pri ZK KPSS [PhD thesis, defended in the Academy of Social Sciences under the CPSU Central Committee]: za 1947–1950 гг. M., 1951; za 1951–1955 гг. M., 1955; za 1955–1958 гг. M., 1959; za 1959–1965 гг. M., 1966; (In Russian)

[42] Kaftanov, S.V. "Za dalnejshee uluchshenie prepodavanija marksistsko-leninskoj teorii v vysshej shkole" [For further improvement of the teaching of Marxist-Leninist theory in higher education], *Vestnik vysshej shkoly*, 1949, no 8. pp. 4–25. (In Russian)

[43] Kinkulkin, M.I. "Engels o formalnoj logike" [Engels on formal logic], *Nauchnaya sessia LSU 1945 г. Tezisu dokladov po sekzii filosofskih nauk.* L., 1945. pp. 16–20. (In Russian)

[44] Koмarovskij, B.B. "Ob evoluzii ponyatiy zakona, prinzipa i pravila i ih vzaimosvij v pedagogike" [On the evolution of the concepts of law, principles and rules, and their relationship in pedagogy], *Sovetskaya pedagogika*, 1947, no 6, pp. 30–45.(In Russian)

[45] Maкovelskij, A.O. "Logika i nauka" [Logic and science], *Иzvestiya AN Azerbajdjanskoj SSR*. 1949, no 4, pp. 167–170. (In Russian)

[46] Maкovelskij, A.O. "Modusy pervoj I tretjej figur kategoricheskogo sillogizma" [MODUS first and third figures categorical syllogism], *Doklady AN Azerbajdjanskoj SSR*. 1946, T. II, no 6. pp. 268–270. (In Russian)

[47] "Novaya programma po logike" [The new program of logic], *Vestnik vysshej shkoly*, 1949, no 9, pp. 45–46. (In Russian)

[48] "O prepodavanii logiki i psihologii v srednei shkole" [On the teaching of logic and psychology in high school], *Kultura i zizn*, 1946. 30 noyabrya. (In Russian)

[49] Osmakov, I.I. "Vsesouznoe soveschanie po logike" [Union Conference on logic], *Voprosy filosofii*. 1948, no 2, pp. 376–377. (In Russian)

[50] Petrov, N.A. "Logicheskie kategorii: zakon, prinzip i pravilo v pedagogike" [Logical categories: the law, the principle and rule in pedagogy], *Sovetskaya pedagogika*, 1946, no 7, pp. 32–49. (In Russian)

[51] Povarnin, S.I. "O zakonah mysli formalnoi logiki i praktike myshlenia" [On the laws of formal logic thought and practice thinking], *Nauchnaya sessia LSU 1945 г. Tezisu dokladov po sekzii filosofskih nauk*. L., 1945. pp. 13–15. (In Russian)

[52] Povarnin, S.I. "O formal'nykh zakonakh mysli" [On the formal laws of thought], *Uchenye zapiski LGU. no 100. Seriya filosofskikh nauk*. Vol. 1. L., 1947, pp. 237–241. (In Russian)

[53] Popov, N.P. *Ob opredelenii ponyatii* [On the definition of concepts]. Avtoreferat... diss. kand. filos. nauk. L., 1952. 17 pp. (In Russian)

[54] Popov, P.S. "Zakony myshlenija" [Laws thinking], *Chernomorskaja kommuna*. 1946, no 39. (In Russian)

[55] Popov, P.S. "Logika Aristotelya i logika formalnaya" [Aristotle's logic and the logic of the formal], *Izvestia AN SSSR. Seria istorii i filosofii*, 1945, no 5. pp. 301–318. (In Russian)

[56] Popov, P.S. *Logika i ee znachenie* [Logic and its value]. Odessa, 1947. (In Russian)

[57] Popov, P.S. "Logika i ee znachenie" [Logic and its value], *Chernomorskaja kommuna*, 1946, no 38. (In Russian)

[58] Popov, P.S. "O кurse logiki M.I. Karinskogo" [About the course of logic M.I. Karinskogo], *Voprosy filosofii*, 1947, no 2, pp. 386–396. (In Russian)

[59] Popov, P.S. "O realnosti kategorij" [The reality of the categories], *Puti realisma*, M., 1926, pp. 99–132. (In Russian)

[60] Popov, P.S. "O funkzii suzdeniya v poznanii" [About the judgments in the knowledge], *Puti realisma*, M., 1926, pp. 133–156. (In Russian)

[61] Popov, P.S. "Suzdenie i ego stroenie" [The judgment and its structure], *Fillosofskie zapiski*, T. VI. M., 1953, pp. 71–93. (In Russian)

[62] Primakovskij, A.P. *Bibliografiya po logike* [Bibliography on logic]. M., 1955. 96 pp. (In Russian)

[63] "Protiv formalisticheskogo napravleniya v logike: Vsesouznoe soveschanie po logike" [Against the formalistic trend in logic: All-Union Conference on logic], *Vestnik vysshej shkoly*, 1948, no 8, pp. 14–17. (In Russian)

[64] Pozdestvenskij, N.S. "Elementy logiki ns urokah russkogo yazyka" [Elements of logic at Russian lessons], *Sovetskaya pedagogika*, 1943, no 11–12, pp. 8–14 (In Russian)

[65] Rozin, V.P. "Opyt prepodavaniya logiki v Moskovskom universitete" [Experience of teaching logic at Moscow University], *Vestnik vysshej shkoly*, 1947, no 9, pp. 45–46. (In Russian)

[66] Rossijskij gosudarstvennyj arhiv sozialno-politicheskoj istorii [The Russian State Archive of Socio-Political History]. F. 17. Op. 100. D. 10131; registrazionnyj blank chlena VKP(b) 0013635 (1936). (In Russian)

[67] Rossijskij gosudarstvennyj arhiv sozialno-politicheskoj istorii [The Russian State Archive of Socio-Political History]. F. 17. Op. 100. D. 145449; uchetnaya kartochka chlena KPSS № 10468190 (1973). (In Russian)

[68] Rossijskij gosudarstvennyj arhiv sozialno-politicheskoj istorii [The Russian State Archive of Socio-Political History]. F. 17. Op. 100. D. 222805; uchetnaya kartochka chlena KPSS № 00237766 (1973). (In Russian)

[69] Skatkin, M.H. "K voprosu o zakonah, prinzipah i pravilah v pedagogike" [On the question of law, principles and rules of pedagogy], *Sovetskaya pedagogika*, 1947, no 8, pp. 15–27. (In Russian)

[70] Skvorzov, A.P. "O dissertazii P.S. Kozyakova na temu "O sootnoshenii formalnoj i dialekticheskoj logiki"" [About P.S. Kozyakova dissertation on the topic "On the relation between formal and dialectical logic"], *Vestnik Moskovskogo universiteta*, 1947, no 5, pp. 137–140. (In Russian)

[71] Skvorzov, A.P. "O dissertazii S.N. Vinogradova на теми "Osnovnye problemy formalnoj logiki"" [About of S.N. Vinogradova dissertation on the topic "Main problems of formal logic"], *Vestnik Moskovskogo universiteta*, 1946, no 3–4, pp. 143–144. (In Russian)

[72] Tavanez, P.V. "K voprosu o кlassifikazii suzdenij v istorii logiki" [On the classification of judgments in the history of philosophical logic], *Fillosofskie zapiski*, T. VI. M., 1953, pp. 38–70. (In Russian)

[73] Tavanez, P.V. "K voprosu o razlichnom ponimanii predmeta logiki" [To a question on a different understanding of the subject matter of logic], *Izvestia AN SSSR. Seria istorii i filosofii*, 1944, no 6, pp. 276–286. (In Russian)

[74] Tavanez, P.V. "Klassifikaziya umozakluchenij" [Classification inference], *Fillosofskie zapiski.* T. I. M. – L., 1946. pp. 84–117. (In Russian)

[75] Tavanez, P.V. "Kritika istolkovaniya prirody suzdenij logikoj otnoshenij" [Criticism of the nature of judgments interpreting the logic of relations],

Izvestia AN SSSR. Seria istorii i filosofii, 1950, no 4, pp. 360–372. (In Russian)

[76] Tavanez, P.V. “O vidah suzdenij” [On the types of judgments], *Izvestia AN SSSR. Seria istorii i filosofii*, 1950, no 1, pp. 69–84. (In Russian)

[77] Tavanez, P.V. “O strukture suzdeniya v atributivnoj logike I v logike otnoshenij” [On the structure of the attribute of judgment in logic and the logic of relations], *Izvestia AN SSSR. Seria istorii i filosofii*, 1946, no 6, pp. 497–506. (In Russian)

[78] Tavanez, P.V. “Ob idealisticheskoj kritike aristotelevskoj teorii suzdeniya” [About idealistic criticized the Aristotelian theory of judgment], *Izvestia AN SSSR. Seria istorii i filosofii*, 1947, no 4, pp. 324–330. (In Russian)

[79] Tavanez, P.V. “Protiv idealisticheskogo istolkovaniya prirody suzdeniya” [Against idealist interpretation of the nature of judgments], *Voprosy filosofii*, 1948, no 1, pp. 150–171. (In Russian)

[80] Tavanez, P.V. “Suzdenie i predlojenie” [The judgment and sentenc], *Izvestia AN SSSR. Seria istorii i filosofii*, 1951, no 2, pp. 155–164. (In Russian)

[81] Tavanez, P.V. “Uslovnoe suzdenie” [Conditional proposition], *Izvestia AN SSSR. Seria istorii i filosofii*, 1952, no 2, pp. 165–176. (In Russian)

[82] Tugariniv, V.P. “Beglye zamechaniya po povodu vaznogo voprosa” [Runaway comments on the important issue], *Sovetskaya pedagogika*, 1947, no 6, pp. 45–47. (In Russian)

[83] Chaloyan, V.K. “Drevnearmyanskaya interpretaziya logiki Aristotelya” [Interpretation of ancient Aristotelian logic], *Иzvestiya AN Armyanskoj SSR. Seria: Обstchestvennye nauki*, 1946, no 4, pp. 43–61. (In Russian)

[84] Chydov, A.A. “K voprosy o prepodavanii logiki v srednej shkole” [On the question of the logic of teaching in high school], *Sovetskaya pedagogika*, 1947, no 10, pp. 100–104. (In Russian)

[85] Chydov, A.A. “Umozakluchenie zamescheniya” [Inference replacement], *Izvestia AN SSSR. Seria istorii i filosofii*, 1948, no 3, pp. 270–280 (In Russian)

[86] Chydov, A.A. *Uchenie o ponyatii v logike* [The doctrine of the concept of logic]. Diss... кand. filos. nauk. M., 1946. 245 p. (In Russian)

[87] Shevzov, N.S. “Zadachi prepodavaniya logiki v vuzah” [The objectives of teaching in universities logic], *Vestnik vysshej shkoly*, 1948, no 8, pp. 8–14. (In Russian)

Логические исследования
2016. Т. 22. № 1. С. 171–176
УДК 16

Logical Investigations
2016, vol. 22, no 1, pp. 171–176

Переводы
Translations

Л.Э.Я. Брауэр

Недостоверность принципов логики[1]

1. Наука рассматривает повторяемость во времени явлений, качественно различных, но взаимно согласованных. Это выделение наблюдаемой и повторяемой идеи возникает из внерелигиозного разделения[2] субъекта и не достигнутой достижимости, которая утверждается как *нечто иное*. Разум пытается постичь эту достижимость через немедленно достижимые сущности с помощью математической системы понятий, порожденной абстракцией повторяемости.

Любая сущность, представимая как недостигнутая достижимость, может быть рассмотрена в системе понимаемых умственно образов — в том числе и религия. Но наука о религии сама внерелигиозна: она может послужить чьему-то утешению, или быть просто игрой ума, или служить некоторым целям.

И наука, как и все внерелигиозное, не обоснована ни верой, ни сама собой. Так, математическая система понятий не может быть надежным помощником нашего восприятия, если ее неограниченно распространить вне области исходных ее восприятий.

Поэтому логические рассуждения, проведенные в отрыве от наблюдений, могут привести к неприемлемым следствиям из научно обоснованных посылок.

На основе опыта геометрии, где из допущенных посылок с помощью логики были выведены лишь бесспорные следствия, классические воззрения объявили логическое рассуждение единственным методом построения науки, а логические принципы — человеческими орудиями построения науки.

Но геометрическое рассуждение истинно лишь внутри математической системы, построенной чистым разумом независимо от опыта, и

[1]Впервые опубликовано в 1908 г. в журнале «Tijdschrift voor Wijsbegeerte». Предложенный вариант перевода соответствует опубликованному в сборнике «Wiskunde, Waarheid, Werkelijkheid» в 1919 г. под редакцией П. Noordhoff'а в Гронингене.

[2]Способность, возникшая из первородного греха страха и желания, но затем проявляющаяся уже без возникновения страха или желания.

факт, что общепринятый геометрический опыт так устойчиво подтверждает выводы в этой математической системе, не должен рассматриваться как бесспорный, как и любой естественнонаучный факт.

Понимание недостоверности логического рассуждения в естественной науке влечет неубедительность рассуждений Аристотеля о строении природы без их проверки на практике; что истины, открытые Спинозой, воспринимаются в отрыве от его логической системы; что нас больше не смущают антиномии Канта или отсутствие в физике гипотез, которые выполнялись бы вместе со *всеми* своими следствиями.

Более того, в отношении наблюдаемых реалий, уложенных на прокрустово ложе математической системы, логические принципы — средство не направляющее, а описывающее закономерности, уже ранее замеченные в языке рассуждений. И если пользоваться ими в речи в отрыве от математических систем, всегда можно впасть в парадоксы, подобные парадоксу Эпименида[3].

2. Религиозная истина, т.е. *мудрость*, не различает субъект и нечто иное; в ней нет математического познания, поскольку нет изначального понятия времени, так что логика в ней тем более недостоверна. Напротив, язык интроспективной мудрости выглядит беспорядочным, алогичным, поскольку он не навязан жизненными установками, а способствует их разрушению, тем самым, возможно, помогая выявить мудрость, повлекшую его.

3. Остается вопрос, неоспоримы ли логические принципы хотя бы в математических системах, свободных от живого содержания, т.е. в системах, порожденных постулированной абстракцией повторяемости и повторения, абстрактной интуицией времени и первичной математической интуицией. Во все времена логика уверенно применялась в математике; никто не сомневался, выполняются ли следствия, логически выведенные из постулатов, если сами постулаты выполняются. Теперь, когда построены парадоксы, кажется, чисто математической природы[4], вызывающие недоверие к неограниченному применению логики

[3] *Прим. перев.* Парадоксу лжеца.

[4] G. Burali-Forti, Rend. Circ. Mat. Palermo 11 (1897), стр. 154–164. E. Zermelo, Math. Annalen 59 (1904), s. 514–516. J. Koenig, Math. Annalen 61 (1905), s. 156–160. J. Richard, Rev. Gen. Sci. 16 (1905), p. 551 [Acta math. 30 (1906), p. 295–296]]. B. Russell, The Principles of Mathematics, Part I, Chapter 10. Попытки разрешить эти парадоксы см., кроме того, в следующих работах: H. Poincare, Rev, Metaphys. Morale 1905, 1906. J. Mollerup, Math. Annalen 64 (1907), p. 231–238. A. Schoenflies, Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, 2. Teil (Jahresber. Deutsch. Math. Ver., Ergänzungsband 2), Leipzig 1908, Kap. 1, P. 7.

в математике, некоторые математики отказались от идеи, что логика имманентна математике, и пытаются строить совместно математику и логику[5], в русле школы *логицизма*, основанной Пеано. Но можно показать, что эти парадоксы возникают из той же ошибки, что и парадокс Эпименида, а именно что правила языка, описывающего математику, применяются в языке, состоящем из математических слов, но не описывающем математику; далее, что логицизм привязан как раз к языку математики, а не к самой математике, следовательно, не может внести в математику ясность. Наконец, все парадоксы исчезают, если ограничиться рассуждением о системах, которые могут быть явно построены первичной математической интуицией, иными словами, когда не логика имманентна математике, а математика — логике.

Остается более узкий вопрос: работая с чисто математическими сущностями и преобразованиями, можно ли временно пренебречь обращением к построениям математической системы и работать внутри сопровождающего их языка, следуя законам силлогизма, противоречия и исключенного третьего, будучи уверенными, что, возвращаясь в область математических построений, мы всегда сможем подтвердить ими такие рассуждения?

Будет показано, что есть прочные основания для такой уверенности в первых двух законах, но не в третьем.

Начнем с силлогизма. Он выводит из построения[6] системы **B** в системе **C**, совместно с построением системы **A** в системе **B**, прямое построение системы **A** в системе **C**, а это не более, чем тавтология.

Принцип противоречия также бесспорен: завершение построения системы **A** в системе **B** и столкновение с невозможностью такого построения исключают друг друга.

Теперь о законе исключенного третьего: он требует, чтобы каждое предположение было либо истинно, либо ложно. В математике это значит, что заданное построение системы в иной системе некоторым определенным образом всегда либо успешно завершается, либо прерывается построением противоречия. Таким образом, вопрос о выполнимости закона исключенного третьего равносилен вопросу *о существовании неразрешимых математических задач.* Хотя высказывалось убежде-

---

[5]В частности, Гильберт (Verh. 3. intern. Math. Kongress Heidelberg 1904, s. 174 [[Grundlagen der Geometrie, Anhang VII, s. 246]].

[6]*Прим. перев.* Здесь в оригинале «de inpassing», что в L. E. J. Brouwer, collected works, Volume 1, Philosophy and foundations of mathematics, edited by Heyting A., переведено как «imbedding», а у M. van Atten и G.Sundholm — как «fitting».

ние, что неразрешимых математических задач не существует[7], нет никаких признаков его подтверждения.

Когда рассматриваются только конечные дискретные системы, исследование возможности или невозможности построения всегда приводит к результату и выдает ответ, так что закон исключенного третьего в таких случаях — надежный способ рассуждения[8].

Свойства бесконечных систем также могут быть установлены с помощью конечных средств. Это достигается исследованием счетно бесконечной последовательности посредством *полной индукции*[9], а именно наблюдением свойств, т.е. построений, выполняющихся *для произвольного натурального числа*, а также противоречий, т.е. невозможностей построения, возникающих для произвольного натурального числа.

Однако то, что из существующего языка задачи можно построить язык, в котором полная индукция будет действенна для инварианта счетно бесконечной последовательности, и таким образом разрешить саму задачу, можно обнаружить лишь постфактум, когда такой язык уже построен.

Ведь множество систем, которые могут быть построены для описания задачи, счетно незавершенное[10], следовательно, оно не может быть механически исследовано на существование или не-существование системы, которая решает задачу. Не исключено также, что посредством счастливого озарения, которое чаще всего ведет к решению, удастся увидеть в счетно незавершенном множестве возможных систем описания задачи нечто такое, что докажет ее неразрешимость.

Так что для бесконечных систем закон исключенного третьего пока нельзя считать надежным. Но тем не менее, при неоправданном приме-

---

[7]См. D. Hilbert, Mathematische Probleme, Gottinger Nachr. 1900, s. 253–297 [[Ges. Math. Abh. Ill, s. 290–329]]. J. Schoenflies (и пр.) также безусловно принимает способ косвенного доказательства, который он ошибочно считает зависящим лишь от закона противоречия.

[8]В частных случаях такое исследование может даже быть проведено машиной или дрессированным животным, оно не требует основной интуиции математики человека. Но в случае вопросов о бесконечных множествах основная математическая интуиция необходима; пренебрегая этим фактом, Пеано и Рассел, Кантор и Бернштейн допустили ошибки.

[9]Кажется, лишь Пуанкаре признал математическую индукцию 'le raisonnement mathematique par excellence'. См. La Science et PHypothese, Paris 1902, Chap. 1.

[10]*Прим. перев.* «Под счетно незавершенным множеством мы имеем в виду то, в котором можно явно выделить лишь счетную группу, но потом, согласно некоторому заранее описанному процессу, выводить из элементов этой группы новые элементы данного множества». (L.E.J. Brouwer. PhD thesis, Universiteit van Amsterdam, 1907, s. 148)

нении он никогда не может столкнуться с противоречием и *посредством него* обнаружить несостоятельность рассуждений с его использованием. Ведь тогда невозможность построения выполнится одновременно с невозможностью невозможности построения, что запрещено законом противоречия[11].

Наглядным примером является следующее недоказанное, но в общем воспринимаемое как верное и часто применяемое в теории бесконечных чисел утверждение, следующее из принципа исключенного третьего, что каждое число либо конечно, либо бесконечно. Иными словами, что для каждого числа γ можно построить:

либо отображение γ в последовательность натуральных чисел такое, что некоторое число α в этой последовательности — *последнее* (т. е. числа $\alpha+1$, $\alpha+2$, $\alpha+3$, ... в нее не входят).

либо отображение γ или его части на всю последовательность натуральных чисел[12].

Пока это утверждение не подтверждено построением, не следует быть уверенным, что разрешимы вопросы вроде:

Существует ли в десятичном разложении числа π цифра, встречающаяся заведомо чаще, чем все остальные?

Существует ли в десятичном разложении π бесконечно много пар одинаковых цифр, стоящих рядом?[13] [14]

И также остается неясным, имеет ли решение более общий математический вопрос:

---

[11] *Прим. ред.* Позже сам Брауэр установил, что здесь он был слишком оптимистичен и неявно воспользовался принципом снятия двойного отрицания. Наиболее ярким опровергающим примером стали его беззаконные и творческие последовательности (А. Гейтинг, Интуиционизм. Введение, п. 8.1).

[12] Если эта теорема ложна, ее ложность не удастся показать построением противоречия, поскольку невозможно, чтобы одновременно построение $\alpha+1$, $\alpha+2$, $\alpha+3$... натолкнулось на противоречие и это противоречие оказалось противоречивым.

[13] Таким образом, теоремы, обычно рассматриваемые в математике как доказанные, должны быть разделены на те, которые выполнены, и те, противоречивость которых нельзя доказать. Равенства в алгебре и анализе относятся к первым; так же, как и теоремы геометрии об инцидентности и теорема, что мощность множества точек не может быть иной, чем конечная, счетно бесконечная, счетно незавершенная и континуум (L.E.J. Brouwer. PhD thesis, Universiteit van Amsterdam, 1907, s. 149). Ко вторым относятся теорема, что множество точек имеет в точности одну из этих мощностей, а также, что замкнутое множество может быть разделено на совершенное и счетное множества.

[14] *Прим. ред.* В примечании 2 Брауэр вновь оказался слишком оптимистичным. Гипотеза континуума просто неразрешима, и утверждать что-то завершенное о мощности произвольных множеств точек нельзя.

Действителен ли в математике безусловный закон исключенного третьего?

Резюмируя:

В мудрости нет логики.

В естественных науках логика часто используется, но не обязательно выдерживает неограниченное применение.

В математике неясно, вся ли логика допустима, и неясно, можно ли разрешить вопрос о том, вся ли она допустима.

Перевод с датского А.Н. Непейводы
Редактор перевода — Н.Н. Непейвода

Исправления

Erratum

Исправления в журнале «Логические исследования. 2015. Том 21. № 1»:

Стр.	Местоположение	Напечатано	Должно быть
С. 138	сноска №1	... project № 13-06-00147a.	... project № 14-03-00341a.

Исправления в журнале «Логические исследования. 2015. Том 21. № 2»:

Стр.	Местоположение	Напечатано	Должно быть
С. 61	сноска №1	... project № 13-06-00147a.	... project № 14-03-00341a.

Information for authors

• *Logical Investigations* accepts for submission papers containing original results in all areas of logic. The papers should not have been published or simultaneously submitted to another publication. (Sections of the journal: `http://eng.iph.ras.ru/log_inv.htm`)

• The Editor in Chief makes the decision which of the submitted articles should be published, with due account for opinions of the Editorial Board and the reviewers. The decision is made within two months since the date of submission of the manuscript.

• Authors are not charged for the publication.

• Papers should be submitted electronically in the $\LaTeX\,2_\varepsilon$ format (special permission of the editorial board is needed for submissions to be made in the MS Word format). While typesetting a paper, the style file li.sty and the master file li.tex should be used; both files, along with a sample paper file, can be accessed at `http://eng.iph.ras.ru/page49940199.htm`

• Papers should not exceed 24 pages in the above mentioned format (including the notes, the bibliography, the abstract).

• Footnotes should appear at the bottom of the page and should be numbered sequentially throughout the paper.

• In addition to the prinicipal text, the manuscript should include the following mandatory elements:

1) Information about the author(s):
   - first and last names of the author;
   - affiliation;
   - full address of the place of work (including the postal code, country and city);
   - author's e-mail address.
2) abstract (100 to 200 words);
3) keywords (5-7 words/word combinations);
4) the list of works cited.

• The bibliographical references should be placed at the end of the paper as the general list ordered alphabetically, and formatted in strict accordance with the guidelines of the international bibliographical databases (Scopus and others). Please see the guidelines here: `http://eng.iph.ras.ru/page49940199.htm`

Submissions should be e-mailed to the following address:
logicalinvestigations@gmail.com

К сведению авторов

• Журнал «*Логические исследования*» принимает к публикации рукописи, содержащие изложение оригинальных результатов из различных областей современной логики, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. (Рубрики журнала см. `http://iph.ras.ru/login.htm`)

• Решение о публикации текста принимается главным редактором с учетом мнения редколлегии и оценки рецензентов. Решение о публикации принимается в течение двух месяцев с момента предоставления рукописи.

• Плата за опубликование рукописей не взимается.

• Рукопись должна быть представлена в электронном виде и оформлена в формате LaTeX 2_ε (по согласованию с редколлегией — в MS Word с обязательным предоставлением pdf-файла). При подготовке рукописи в LaTeX 2_ε необходимо использовать стиль li.sty. Стилевой файл размещен в правилах предоставления рукописей: `http://iph.ras.ru/login_rec.htm`

• Объем рукописи не должен превышать 24 стр. (60 тыс. знаков), включая ссылки, примечания, список литературы, аннотацию.

• Примечания, сноски к тексту статьи делаются постранично с использованием сквозной нумерации.

• Помимо основного текста, рукопись должна включать в себя следующие обязательные элементы на **русском** и **английском языках**:

1) сведения об авторе(ах):
   - фамилия, имя и отчество автора;
   - место работы;
   - полный адрес места работы (включая индекс, страну, город);
   - адрес электронной почты автора.
2) название статьи;
3) аннотация (от 100 до 200 слов);
4) ключевые слова (5-7 слов/словосочетаний);
5) список литературы.

• Цитированная литература помещается в конце статьи общим списком в алфавитном порядке и оформляется строго в соответствии с правилами. Рукописи на русском языке обязательно должны содержать *два варианта представления списка литературы*:

1) список, озаглавленный «Литература» и выполненный в соответствии с требованиями ГОСТа.

2) список, озаглавленный «References» и выполненный в соответствии с требованиями международных библиографических баз данных (Scopus и др.).
(Правила оформления литературы см. `http://iph.ras.ru/login_rec.htm`)

Статьи следует направлять по адресу
logicalinvestigations@gmail.com

Научно-теоретический журнал

Логические исследования / Logical Investigations
Том 22 № 1

Учредитель и издатель:
Институт философии РАН

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС77-61228 от 03.04.2015 г.

Художник *Н.Н. Попов*

Редактор *Е.А. Жукова*

Технические редакторы: *Ю.А. Аношина, Ю.В. Хорькова*

Подписано в печать с оригинал-макета 03.03.16.
Формат 70x100 1/16. Печать офсетная. Гарнитура Computer Modern.
Усл. печ. л. 11,25. Уч.-изд. л. 9,4. Тираж 1 000 экз. Заказ № 04.

Оригинал-макет изготовлен в Институте философии РАН

Компьютерная верстка: *Н.Е. Томова*

Отпечатано в ЦОП Института философии РАН
109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1

Информацию о наших изданиях см. на сайте Института философии:
`http://iph.ras.ru/login.htm`