Russian Academy of Sciences
Institute of Philosophy

PROCEEDINGS OF THE RESEARCH LOGICAL SEMINAR OF INSTITUTE OF PHILOSOPHY RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

Volume XVI

Moscow
2002

Российская Академия Наук
Институт философии

ТРУДЫ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО СЕМИНАРА ЛОГИЧЕСКОГО ЦЕНТРА ИНСТИТУТА ФИЛОСОФИИ РАН

Выпуск XVI

Москва
2002

УДК 160
ББК 87.4
Т-78

Т-78 **Труды** научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XVI. – М., 2002. – 127 с.

Статьи сборника подготовлены на основе докладов, сделанных на семинаре в 2001-2002 годах. В этот выпуск вошли результаты и достижения последних исследований в различных областях неклассических логик

Сборник представляет интерес для специалистов в области логики и ее приложений.

The papers in this collected volume are prepared on the basis of reports presented at the Seminar in 2001-2002 years. There are the results of recent investigations in different fields of nonclassical logic.

The book may be interesting for experts in logic and its applications.

ISBN 5-201-02149-2

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Неопределенности в классической логике[1]

Uncertainty involved in argument naturally leads to non-classical logic. A paradox hereby conceived consists in that the logic of uncertainty may be presented as a fragment of classical logic, which is demonstrated in what follows.

Традиционные истинностные значения 1 (истина) или 0 (ложь) высказывания А выражаются в языке посредством утверждения либо А, либо $\neg$А. Соответственно, в языке должна иметься возможность выражать неопределенность, которую обозначим знаком 1/0. Введем для этого новую унарную логическую связку «н»: нА будем читать как «неопределенно А», «А не определено» и т.п. Теперь в случае $|A| = 1$ утверждаем А, в случае $|A| = 0$ утверждаем $\neg$А, и в случае $|A| = 1/0$ утверждаем нА (здесь $|...|$ – функция истинностной оценки высказываний).

Будем считать, что закон исключенного третьего по-прежнему действует и формула $A \vee \neg A$ истинна при любом А, но теперь из $A \vee \neg A$ уже не следует, что либо $|A| = 1$, либо $|\neg A| = 1$ (или что либо $|A| = 0$, либо $|\neg A| = 0$), поскольку не исключено, что $|A| = 1/0$ и $|\neg A| = 1/0$. С интуитивной точки зрения, неопределенность высказывания А влечет неопределенность его отрицания $\neg$А, и наоборот. Поэтому примем также, что нА $\leftrightarrow$ н$\neg$А, т. е. А не определено тогда и только тогда, когда $\neg$А не определено. Если же высказывание А определенно, то по-прежнему из двух противоречащих высказываний А и $\neg$А одно является истинным, а другое ложным. Например, суждение «Клеопатра – женщина» определенно истинно, и, значит, его отрицание ложно, тогда как суждение «Клеопатра – красавица» может вызвать споры, во избежание которых этому суждению припишем неопределенное истинностное значение, откуда его отрицание также неопределенно.

В работах [1] и [2] нами была предложена и исследована формальная семантика для языка логики предикатов первого порядка, пополненного оператором неопределенности «н». В построенной семантической теории неопределенности, которая

---

[1] Работа поддержана РГНФ, грант № 01-03-00300.

была названа *н-семантикой*, неопределенность задается набором возможных миров вида $<U,\{F_i\}\ i\in J>$ (где U – единый для всех миров непустой универсум, F_i – функция интерпретации, а J – множество индексов числом не менее двух), попарно отличающихся интерпретацией хотя бы одного предикатного символа. То есть при $i \neq j$ найдется такой предикат P, что $F_i(P) \neq F_j(P)$. При этом для любой индивидной константы c принимается $F_i(c) = F_j(c)$. Иными словами, имена индивидов считаются *твердыми десигнаторами* (имеющими одинаковый денотат во всех возможных мирах), а ответственность за неопределенность возлагается на *мягкие десигнаторы* – предикаты (которые могут иметь разные денотаты в разных мирах). Отношение достижимости на мирах отсутствует. Под неопределенностью высказывания в самом общем плане понимается ситуация, в которой высказывание истинно в одних мирах и ложно в других. Эта простая семантическая идея привела к неожиданным следствиям. Множество общезначимых формул н-семантики оказалось рекурсивно перечислимым, однако было доказано, что понятие естественным образом заданного логического следования в ней не формализуемо, а теорема компактности не верна.

Два последних свойства (а также некоторые другие особенности н-семантики) нежелательны. Они излишне усложняют формальные семантические характеристики неопределенности, тогда как с содержательных позиций все относительно просто: есть *определенные* высказывания, истинные во всех мирах или ложные во всех мирах, и есть *неопределенные* высказывания, истинные в одних мирах и ложные в других. Законы классической логики истинны во всех возможных мирах, а противоречия ложны во всех мирах. Поэтому, в частности, $A \vee \neg A$ – определенное высказывание (и при том истинное), и $\neg(A \vee \neg A)$ – также определенное высказывание (но ложное).

Стало быть, высказывания $A \vee \neg A$ и $\neg(A \vee \neg A)$ остаются определенными независимо от того, является ли исходное высказывание A определенным или неопределенным. Эта, восходящая к Аристотелю, позиция для нас принципиальна. Но именно она заставляет говорить о простоте семантической идеи неопределенности в относительном смысле. Ведь при таком подходе истинностное значение сложного выражения не является, в общем случае, функцией от истинностных значений его частей. И тут ничего не поделаешь. Что приписать дизъюнкции $A \vee B$, если $|A| = 1/0$ и $|B| = 1/0$? Максимум? – Тогда $|A \vee B| = 1/0$. Но если B есть $\neg A$? – Тогда $|A \vee B| = 1$. Аналогичные трудности возникают в отношении конъюнкции, импликации и эквивалентности – для них тоже не существует адекватных трехзначных таблиц. Например, рассмотрим высказывание $A \leftrightarrow B$. Пусть $|A| = 1/0$ и $|B| = 1/0$. Но не спешите приписывать $|A \leftrightarrow B| = 1$. Если B есть $\neg A$, то $|A \leftrightarrow \neg A| = 0$, поскольку $A \leftrightarrow \neg A$ противоречиво и, значит, $A \leftrightarrow \neg A$ ложно во всех мирах. Если же истинностное значение A совпадает с истинностным значением B в мире α, но не совпадает в мире β, то $A \leftrightarrow B$ истинно в α и ложно в β. Отсюда $|A \leftrightarrow B| = 1/0$. И т.п. Однако это так только для бинарных логических связок. Унарные логические связки «$\neg$» и «н» составляют исключение, поскольку определяются следующей таблицей.

A	$\neg$A	нA
1	0	0
1/0	1/0	1
0	1	0

Действительно, если высказывание A истинно (ложно) во всех мирах, то его отрицание будет ложным (истинным) также во всех мирах. В любом случае A и $\neg$A определенны, поэтому приписывание им неопределенности ложно. Если же A истинно в мире α и ложно в мире β, т.е. если $|A| = 1/0$, то, конечно, высказывание «A неопределенно», т.е. высказывание нA, будет истинным. После того как высказывание нA получило истинностную оценку, оказывается, что оно стало либо ложным, либо истинным, т.е. превратилось в определенное высказывание. Поэтому, в соответствии с таблицей, любое высказывание вида ннA окажется ложным, так что формула $\neg$ннA является первым примером специфического логического закона $\models \neg$ннA, связанного с оператором неопределенности «н».

В целом можно сказать, что вместо принципа бивалентности нами принимается семантический *принцип тривалентности*, согласно которому любое высказывание либо истинно, либо ложно, либо неопределенно. Четвертого не дано. Однако принцип тривалентности здесь не ведет к отбрасыванию закона исключенного третьего ($A \vee \neg A$) и принятию вместо него закона исключенного четвертого в форме ($A \vee \neg A \vee$ нA). Разумеется, последняя формула является законом, т.е. $\models$ ($A \vee \neg A \vee$ нA), но, тем не менее, законом остается и первая формула, т.е. $\models (A \vee \neg A)$. Зато формулы ($A \vee$ нA) и ($\neg A \vee$ нA) законами не являются. Тут отсутствует какая-либо непоследовательность в рассуждениях. *Все дело в том, как добываются истинностные значения. А* они получаются в зависимости от положения дел в возможных мирах. При нашем подходе возможные миры существуют не наряду с действительным миром, а в совокупности его составляют. Действительный мир распадается на возможные миры потому, что ему объективно присуща неопределенность. Точнее говоря, возможные миры в нашем смысле совпадают друг с другом в определенной части реального мира, и различаются лишь в отношении его неопределенной части. Она потому и неопределенна, что в реальности ее нельзя свести к чему-то одному. Законы классической логики описывают определенную часть реальности, поэтому они сохраняются в любом возможном мире. Что же касается неопределенностей, то у них свои законы, которые должны ужиться с законами классики.

Иными словами, логика неопределенности должна быть консервативным расширением логики классической. Лишь в этом случае есть надежда, что она будет не просто еще одним добавлением к многочисленному семейству абстрактных неклассических логик, представляющих только теоретический интерес, но на самом деле будет логикой, т.е. основой для реальных рассуждений. Ведь, как известно, чаще всего даже авторы неклассических систем в действительности не рассуждают в соответствии с построенными ими же исчислениями и семантиками. Бывает забавно наблюдать, как поборник какой-нибудь неклассической логики, основанной на отбрасывании некоторых законов классики, и таким образом, не являющейся ее расширением, доказывает метатеоремы для своей «логики», пользуясь исключительно логикой классической.

Приведенные рассуждения подводят к очень важному для дальнейшего заключению. Во всех ситуациях определенность имела место тогда и только тогда, когда какое-то положение дел A было одинаковым во всех возможных мирах. Для возникновения неопределенности в отношении A требовалось наличие *двух* миров α и β таких, что A имело место в α и не имело места в β или наоборот. Что делается в других мирах, отличных от α и β, – уже не существенно в том смысле, что ситуация в них никак не способна повлиять на неопределенность A. Это наблюдение приводит к выводу, что *с логической точки зрения для описания свойств неопределенности достаточно двух возможных миров.* Третий, четвертый и последующие миры могут нести дополнительную информацию фактического характера, но ничего не добавят к логическим характеристикам определенности или неопределенности, подобно тому, как в классической логике любые дескриптивные особенности высказываний элиминируются стягиванием их всех к двум полюсам – истина и ложь. В отличие от классики, теперь в целом перед нами не два, а *три* варианта: A выполнено во всех мирах, A не выполнено во всех мирах, и A выполнено в одном мире и не выполнено в другом. Но в последнем случае достаточно опять-таки двух вариантов или двух миров для возникновения неопределенности в отношении A. Это позволяет свести рассуждения о неопределенности к двум возможным мирам, что, как можно надеяться, значительно упростит логическую теорию неопределенности без потери каких бы то ни было существенных характеристик исследуемого феномена.

Как уже говорилось, идея неопределенности была нами развита на основе неклассической логики. Тривиально ясно, что логика, содержащая третье истинностное значение и новый логический оператор «н», не может быть классической. Однако нельзя ли как-нибудь приблизить неклассическую логику неопределенности к классике таким образом, чтобы избавить ее хотя бы от части нежелательных свойств, о которых упоминалось выше? Мы предлагаем весьма радикальный вариант решения поставленной проблемы. Его суть состоит в предложении развивать логику неопределенности как бы *внутри* классической логики.

Основная идея следующая. Каждый согласится, что бывает так, что $P(c)$, но $\neg Q(c)$, т.е. индивид c обладает свойством P, но не обладает свойством Q. При этом все полностью определенно. Для возникновения неопределенности в отношении P и c, надо, чтобы в некотором мире α было $P(c)$, а в мире β – $\neg P(c)$. Тогда можно утверждать, что н$P(c)$. Однако введение этих миров сделает семантику неклассической. А что, если в качестве $\neg P(c)$ использовать $\neg Q(c)$? Обоснованно возразят, что P и Q являются *разными* предикатами. Как же можно в этих условиях утверждать н$P(c)$? Но что означает различие в предикатах – только ли различие в написании? Нет, не только. Главным является как раз не это, а то, как *определяются* предикаты. При аксиоматическом подходе, например, мы можем принять некоторые утверждения про P и Q в качестве аксиом, приняв, допустим, что $\forall x P(x)$ и $\neg\forall x Q(x)$. Тут различие между P и Q действительно очевидно и речь в самом деле идет о разных свойствах. Однако предположим, что P и Q *определяются одинаково*, т.е. всякая аксиома для P превращается в аксиому для Q посредством замены P на Q и, наоборот, всякая аксиома для Q превращается в аксиому для P посредством замены Q на P. Какие теперь есть основания утверждать, что P и Q различны? Основания эти вытекают из того, что одни и те же аксиомы можно иногда интерпретировать по-разному. Если принимаются высказывания $\forall xP(x)$ и $\forall xQ(x)$, то предикаты P и Q в рамках классики совпадут в любом универсуме при любой интерпретации. Но если в качестве аксиом принимаются формулы $\exists xP(x)$ и $\exists xQ(x)$, то интерпретации данных предикатов могут быть различны. Однако додумаем высказанную мысль до конца. *При совпадении аксиом для P и Q мы имеем право в любом случае вести речь если и не о совпадении, то, по крайней мере, о* ***сходстве*** *P и Q*. Здесь больше оснований говорить о сходстве, чем в той ситуации, когда интерпретации одного и того же предиката P в мирах α и β никак не связаны. И именно опираясь на это сходство, мы получаем полное право при наличии $P(c)$ и $\neg Q(c)$ не только утверждать, что $нP(c)$, но и (поскольку отношение сходства симметрично) утверждать $нQ(c)$.

Обсуждаемое сходство можно подкрепить психологически, сделав похожими начертания сходных предикатов. Удобнее вместо Q использовать, допустим, P*. Важно подчеркнуть, что суть идеи сходства не в этом. Мы называем n-*местные атомарные предикаты* $P(x_1, ..., x_n)$ *и* $Q(x_1, ..., x_n)$ ***сходными*** *в теории* T, *если любая аксиома* T, *содержащая эти предикаты или один из них, остается аксиомой данной теории* T *после одновременной замены каждого вхождения* $P(x_1, ..., x_n)$ *на* $Q(x_1, ..., x_n)$ *и каждого вхождения* $Q(x_1, ..., x_n)$ *на* $P(x_1, ..., x_n)$. Аналогичным образом определяется сходство в теории T функциональных символов.

Перейдем к более детальным построениям. Пусть T – аксиоматическая теория в языке L классического исчисления предикатов первого порядка. Сопоставим каждому n-местному атомарному предикатному символу $P(x_1, ..., x_n)$ языка L n-местный атомарный предикатный символ $P^*(x_1, ..., x_n)$, а каждому n-местному функциональному символу $t(x_1, ..., x_n)$ – n-местный функциональный символ $t^*(x_1, ..., x_n)$. Индивидные константы (если они вообще имеются) оставим без изменений. Получим язык L*. Теперь заменим в аксиомах теории T каждое вхождение предикатных и функциональных символов на соответствующие символы со звездочкой. Результат описанной замены для аксиомы A обозначим через A*. В итоге получим теорию T* в языке L*, содержащую в качестве аксиом только формулы вида A*.

Объединим полученные теории в одну. Получим теорию $T \cup T^*$ в языке $L \cup L^*$. Теория $T \cup T^*$ вряд ли может кого-то заинтересовать. Просто она содержит два параллельных ряда аксиом, отличающихся лишь наличием или отсутствием звездочек в их формулировках. Однако понятие формулы претерпело существенное изменение. Формулами теории $T \cup T^*$ отныне являются не только формулы языка L и формулы языка L^* по отдельности, но и *смешанные* формулы, содержащие как символы без звездочек, так и символы со звездочками. Пусть A – какая-либо формула языка $L \cup L^*$. *Через* A^* *обозначим результат одновременной замены в* A *каждого предикатного или функционального символа без звездочки на соответствующий символ со звездочкой, а каждого предикатного или функционального символа со звездочкой на соответствующий символ без звездочки.*

Так определенная операция * на формулах обладает следующим очевидным свойством.

Предложение 1. Любая формула A графически совпадает с A^{**}, но ни одна формула A не совпадает с A^*.

По аналогии с атомарными формулами, произвольные формулы A и A^* также будем называть ***сходными*** в теории $T \cup T^*$.

Положим $Lн = L \cup L^* \cup \{н\}$, где «н» – символ новой унарной логической связки.

Добавим к $T \cup T^*$ важное определение. Точнее, схему определений. Для *любой* формулы A языка Lн аксиомой является следующая формула:

$$нA \leftrightarrow ((A \,\&\, \neg A^*) \vee (\neg A \,\&\, A^*)).$$

Содержательный смысл данного определения должен быть ясен из вышесказанного. В частности, если A – формула языка $L \cup L^*$ (это означает, что в A нет вхождений оператора «н»), то A неопределенна тогда и только тогда, когда она выполнена в модели теории $T \cup T^*$, а сходная с ней формула A^* не выполнена в той же модели, или, наоборот, A не выполнена, но A^* выполнена.

Теорию $T \cup T^*$ с присоединенной схемой определений $нA \leftrightarrow ((A \,\&\, \neg A^*) \vee (\neg A \,\&\, A^*))$ в качестве новой аксиомной схемы назовем *минимальной теорией с неопределенностью* Тн в языке Lн. Короче, минимальная $Тн = T \cup T^* \cup \{нA \leftrightarrow ((A \,\&\, \neg A^*) \vee (\neg A \,\&\, A^*))\}$.

Интересно обсудить вопрос: относится ли предложенная конструкция к чистой логике, или она является частью прикладных построений? Уточним постановку вопроса. Пусть исходная теория T – это просто одна из аксиоматических формулировок чистого исчисления предикатов первого порядка без равенства. Нет никаких причин сомневаться, что T^* тогда тоже относится к чистой логике. Но как быть в этом случае с минимальной Тн? Является ли Тн прикладной теорией (вроде арифметики или теории множеств), или ее все еще можно считать принадлежащей к чистой логике? Представляется убедительным следующий аргумент. Аксиомы прикладных теорий истинны не во всех универсумах, тогда как логические аксиомы верны при любых интерпретациях во всех непустых универсумах. Аксиомную схему нA $\leftrightarrow$ ((A & ¬A*) $\vee$ (¬A & A*)) невозможно провалить по той же самой причине, по какой нельзя опровергнуть, например, сокращение (A & B) $\leftrightarrow$ ¬(A $\rightarrow$ ¬B), добавленное к исчислению, сформулированному в языке $\{\neg, \rightarrow\}$. Так и в рассматриваемом случае. Формула нA $\leftrightarrow$ ((A & ¬A*) $\vee$ (¬A & A*)) по сути является сокращением, позволяющем в более компактном виде представлять некоторые формулы. Можно, конечно, принять закон ¬((A & B) $\leftrightarrow$ ¬(A $\rightarrow$ ¬B)), но это будет какая-то другая, неклассическая логика. Также можно придать унарной логической связке «н» какой-то другой смысл. Но это тоже будет уже другая логика.

Придадим сказанному формальный смысл. Пусть <U, F> – структура для языка L $\cup$ L*. Поскольку язык L $\cup$ L* является языком исчисления предикатов первого порядка, функция интерпретации F предикатных, функциональных и индивидных констант из L $\cup$ L* на непустом универсуме U стандартна. Все, что требуется для того, чтобы сделать <U, F> структурой для языка Lн, – это определить условие выполнимости для формул вида нA. Это условие очевидно: *формула* нA ***выполнена*** *в структуре* <U, F> *при оценке v тогда и только тогда, когда в* <U, F> *при оценке v выполнена формула* ((A & ¬A*) $\vee$ (¬A & A*)). Тогда верно следующее утверждение (в котором знак логического закона « $\models$ » имеет обычное классическое значение).

Предложение 2. $\models$ (нA $\leftrightarrow$ ((A & ¬A*) $\vee$ (¬A & A*))).

Однако чисто логическая теория Tн моментально превратится в прикладную, как только мы примем аксиому о том, что *конкретная выполнимая* формула A является неопределенной. Аксиома нA для такой формулы может выполняться в одних интерпретациях и не выполняться в других, как и положено аксиомам прикладных теорий. Но в этом случае теория Tн перестанет быть минимальной.

Предложение 3. Для любой теории T теория T $\cup$ T* является ее консервативным расширением, а минимальная теория Tн является консервативным расширением T $\cup$ T* (и, значит, также T).

Как и всякую теорию, минимальную теорию Tн можно расширять, причем не обязательно формулами, содержащими оператор «н». В качестве новой аксиомы к Tн разрешается добавлять любую формулу языка Lн. Разумеется, в результате расширение уже не обязано быть консервативным. Тем не менее, каковы бы ни были теории с неопределенностью Тн, для них верны все стандартные метатеоремы о первопорядковых теориях классической логики. Иными словами, выполняется своего рода *принцип переноса*. Данный факт имеет место потому, что по сути дела теории Тн не выводят нас за рамки классической логики. В частности, каждую формулу теории Тн, содержащую оператор «н», можно заменить эквивалентной ей формулой без этого оператора, элиминировав, таким образом, оператор неопределенности «н».

Зато введение этого оператора позволяет в компактном виде сформулировать ряд неклассических идей, связанных с неопределенностью. Начнем с семантики. Будем использовать понятие выполнимости в обычном смысле с учетом расширения его на формулы вида нА, как было определено выше. Пусть А – формула языка Lн и <U, F> – структура для языка Lн. А *определенно выполнена* в структуре <U, F> при оценке v, если как А, так и А* выполнена в структуре <U, F> при оценке v. А *определенно не выполнена* в структуре <U, F> при оценке v, если как А, так и А* не выполнена в структуре <U, F> при оценке v. Если в классическом случае любая формула либо выполнена, либо не выполнена, то здесь появляется третья возможность. Формула А *неопределенно выполнена* в структуре <U, F> при оценке v, если либо А выполнена в структуре <U, F> при оценке v, но А* не выполнена в структуре <U, F> при оценке v, либо А не выполнена в структуре <U, F> при оценке v, но А* выполнена в структуре <U, F> при оценке v.

Предложение 4. Формула нА определенно выполнена в структуре <U, F> при оценке v тогда и только тогда, когда А неопределенно выполнена в структуре <U, F> при оценке v.

Докажем это утверждение. Пусть нА определенно выполнена в структуре <U, F> при оценке v. Значит, как нА, так и нА* выполнена в структуре <U, F> при оценке v. Согласно определению выполнимости для формул вида нА, получаем, что в структуре <U, F> при оценке v выполнена формула ((A & ¬A*) ∨ (¬A & A*)). Дизъюнкция C ∨ D выполнена, если выполнена формула C или выполнена формула D. Допустим, (A & ¬A*) выполнена в структуре <U, F> при оценке v. Тогда и A, и ¬A* выполнена в структуре <U, F> при оценке v. Раз ¬A* выполнена, то A* не выполнена в структуре <U, F> при оценке v, т.е. A неопределенно выполнена в структуре <U, F> при оценке v, что и требовалось. Случай (¬A & A*) рассматривается аналогично.

Пусть теперь A неопределенно выполнена в структуре <U, F> при оценке v. Тогда либо A выполнена в структуре <U, F> при оценке v, но A* не выполнена в структуре <U, F> при оценке v, либо A не выполнена в структуре <U, F> при оценке v, но A* выполнена в структуре <U, F> при оценке v. Рассмотрим первую возможность. Так как A* не выполнена в структуре <U, F> при оценке v, ¬A* выполнена в структуре <U, F> при оценке v. Значит, в структуре <U, F> при оценке v выполнена конъюнкция (A & ¬A*) и, следовательно, дизъюнкция ((A & ¬A*) ∨ (¬A & A*)), что и требовалось. Вторая возможность рассматривается аналогичным образом.

Формула A принимает значение 1 (*определенно истинно*) в структуре <U, F>, если A определенно выполнена структуре <U, F> при всех оценках v. Формула A принимает значение 0 (*определенно ложно*) в структуре <U, F>, если A определенно не выполнена структуре <U, F> при всех оценках v. Формула A принимает истинностное значение 1/0 (*неопределенность*), если A неопределенно выполнена структуре <U, F> при всех оценках v.

Разумеется (как и в классическом случае, когда незамкнутая формула может быть ни истинной, ни ложной), незамкнутая формула может быть ни истинной, ни ложной, ни неопределенной. Зато каждая замкнутая формула в семантике неопределенности получит какое-то из трех истинностных значений.

Предложение 5. Если A – замкнутая формула языка Lн, то в любой структуре <U, F> для языка Lн A получит одно и только одно из трех истинностных значений: либо $|A| = 1$, либо $|A| = 0$, либо $|A| = 1/0$.

Еще одним очевидным следствием принятых определений является следующее утверждение.

Предложение 6. Унарные связки «¬» и «н» подчиняются вышеприведенной таблице истинности, тогда как бинарные связки не могут быть заданы конечной таблицей истинности.

Предложение 7. Пусть A – замкнутая формула. Тогда $|нA| = |нA^*| = |н\neg A| = |н\neg A^*|$. При этом либо $|нA| = 1$, либо $|нA| = 0$.

Для доказательства данного утверждения достаточно обратить внимание, что условия выполнимости для нA и нA* эквивалентны ввиду того, что A неопределенно выполнена тогда и только тогда, когда A* неопределенно выполнена. Аналогичным образом, если формула A неопределенно выполнена, то и ¬A также неопределенно выполнена, и наоборот. Поэтому можно было бы сказать, что если A неопределенно не выполнена, то и $\neg$A также неопределенно не выполнена. То есть в условиях неопределенности выполнимость и невыполнимость совпадают. В случае неопределенности A формула нA будет определенно истинной, а в случае определенной истинности или определенной ложности A формула нA окажется определенно ложной. Случай $|$нA$|$ = 1/0 поэтому исключается. С философской точки зрения это означает, что утверждение неопределенности или, равным образом, отрицание неопределенности, само вполне определенно. Но так и должно быть. Либо неопределенность есть, либо ее нет. Словосочетание «неопределенная неопределенность», на наш взгляд, лишено смысла.

Стандартное понятие общезначимой формулы распространяется на построенную трехзначную семантику естественным образом: вместо *истинно* надо сказать *определенно истинно*. Точнее, формула A языка Lн является н-*общезначимой*, если A определенно истинна в любой структуре для языка Lн. Для обычной общезначимости пишем $\models$ A, а для н-общезначимости будем использовать запись н $\models$ A.

Принципиальное значение имеет следующее утверждение.

Предложение 8. Для любой формулы A языка Lн $\models$ A тогда и только тогда, когда н $\models$ A.

Из определений ясно, что если н $\models$ A, то не только $\models$ A, но и $\models$ A*. Доказательство в обратную сторону основывается на том факте, что $\models$ A $\Leftrightarrow$ $\models$ A* (ведь формулы A и A* имеют одинаковую структуру). Рутинные детали опустим.

Осуществив столь же естественное распространение на семантику неопределенности понятия логического следования (снова достаточно в нужных местах добавить слово «определенно»), получим более общее утверждение.

Предложение 9. Г $\models$ A $\Leftrightarrow$ Г н $\models$ A.

Наконец, используя теорему полноты для классической логики, получаем следующее утверждение.

Предложение 10. Tн $\vdash$ A $\Leftrightarrow$ н $\models$ A.

Литература

1. *Анисов А.М.* Семантика неопределенности // Логические исследования. Вып. 4. М., 1997.
2. *Анисов А.М.* Темпоральный универсум и его познание. М., 2000.

П.И.Быстров

Методы построения табличных вариантов неклассических пропозициональных систем[1]

The outline of some methods of constructing of tableaux systems in non-classical logics is presented here. Namely, the following four types of tableaux constructions are considered: 1) Beth's tableaux with indexed formulae (or indexed lines); 2) analytic tableaux with indexed formulae; 3) Beth's tableaux constructed by means of notion of modalized (in the sense of certain system) formula; 4) analytic tableaux constructed by means of notion of modalized (in the sense of certain system) formula.

В данной статье (на примерах правил вывода) описаны четыре способа построения табличных пропозициональных модальных и релевантных систем: 1) таблицы Бета с индексированными формулами (или строками); 2) аналитические таблицы с индексированными формулами; 3) таблицы Бета, в которых используется понятие модализованной (в смысле конкретной системы) формулы; 4) аналитические таблицы, в которых используется понятие модализованной (в смысле конкретной системы) формулы. Два последних способа относятся к так называемым нормальным модальным системам, являющимся расширениями **S4** и подсистемами **S5**.

В первом и втором случаях применяются индексы в виде натуральных чисел или последовательностей натуральных чисел. При построении таблиц эти индексы приписываются вхождениям формул в таблицу в соответствии с определенными правилами (в первом случае индексы могут приписываться либо формулам, либо строкам таблицы). Правила задают определенные (для данной системы) отношения между индексами. Строго говоря, индексы играют вспомогательную, "техническую", роль, позволяя контролировать действия с модальными операторами (или сохранять релевантность вывода). В третьем и четвертом случаях правила построения таблиц основаны на понятии модализованной формулы. Понятие модализованной формулы вводится определением для каждой из рассматриваемых систем. Естественно,

[1] Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант 00-0300168.

таким способом можно построить табличный вариант любой модальной системы, для которой можно дать определение модализованной формулы (в смысле этой и только этой системы).

Поскольку упомянутые методы фактически не вносят изменений в табличные правила для конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, мы не приводим здесь полное описание систем, а проиллюстрируем действие этих методов на формулировках правил для релевантной импликации и формул с модальными операторами. Везде далее α, β, γ - правильно построенные пропозициональные формулы (в обычном смысле); $\supset$ - знак релевантной импликации (поскольку $\rightarrow$ по традиции используется в записи секвенций); $\Box$ - модальный оператор необходимости; i, j, k, m, n – натуральные числа; u, w (возможно, со штрихами) – индексы. Индекс – это непустая, конечная, начинающаяся с нуля и не содержащая двух одинаковых членов последовательность натуральных чисел, т.е. 0, 1, 2,...n. Рангом индекса называется общее количество содержащихся в нем чисел, отличных от 0. Индекс u называется подиндексом индекса w, если ранг индекса u меньше ранга индекса w или равен рангу индекса w. Отношение R на множестве индексов – это бинарное отношение следующего вида: uRw тогда и только тогда, когда w=u, k. Это отношение может быть рефлексивным (т.е. выполняется условие: uRw тогда и только тогда, когда w=u,k или w=u), транзитивным (т.е для любых индексов u и w или uRw, или для некоторого числа $n \geq 1$ найдутся такие индексы w_1, w_2, … w_n, что $w_1=v$, $w_n=w$ и для любого i ($1 \leq i < n$) имеет место w_iRw_{i+1}), или симметричным, (т.е. для любых индексов u и w, если uRw, то wRu), или же обладать любой комбинацией перечисленных свойств. Индексированная формула – это выражение вида $(\alpha)_w$. В записях формул, не содержащих логических связок, скобки опускаются.

Согласно первому из упомянутых выше методов, правила заполнения таблиц для формул, начинающихся модальным оператором, формулируются следующим образом.

I_r: Если формула $(\Box\alpha)_u$ входит в правый столбец таблицы (подтаблицы) t, то в правый столбец этой таблицы (подтаблицы) вписывается формула $(\alpha)_{u,\,k}$, где k – число, не входящее ни в один из индексов, приписанных формулам, находящимся в таблице (подтаблице) t.

I_l: Если формула $(\Box\alpha)_u$ входит в левый столбец таблицы (подтаблицы) t, то в левый столбец этой таблицы (подтаблицы) вписывается формула $(\alpha)_w$, причем имеет место uRw.

Правила построения таблиц для импликативных, конъюнктивных, дизъюнктивных и негативных формул остаются обычными (при их применении индексы остаются без изменений). Построение таблицы начинается вписыванием в нее испытуемой формулы с индексом 0. Таблица (подтаблица) считается замкнутой, если в ее правый и левый столбцы входит формула $(\alpha)_w$. Как обычно, в общем случае таблица считается замкнутой, если замкнуты все ее подтаблицы. Формула называется доказуемой (в конкретной системе), если можно построить замкнутую таблицу, которая начинается вписыванием формулы $(\alpha)_0$ в правый столбец.

Другой вариант описанного метода состоит в том, что при построении таблиц индексируются не формулы, а строки заполняемой таблицы. Первой строке исходной таблицы приписывается индекс 0, и на этой строке в правом столбце вписывается испытуемая формула. В данном случае правила построения таблиц для формул, начинающихся модальным оператором, формулируются следующим образом.

I^*_r: Если формула $\Box\alpha$ входит в правый столбец таблицы (подтаблицы) t на строке u, то в правый столбец этой таблицы (подтаблицы) на строке u, k вписывается формула α, где k – число, не входящее ни в один из индексов, приписанных строкам таблицы (подтаблицы) t.

I^*_l: Если формула $\Box\alpha$ входит в левый столбец таблицы (подтаблицы) t на строке u, то в левый столбец этой таблицы на строке w вписывается формула α, причем имеет место uRw.

Правила построения таблиц для импликативных, конъюнктивных, дизъюнктивных и негативных формул остаются обычными (подформулы тех формул, к которым эти правила применяются, не переносятся на другие строки). Таблица (подтаблица) считается замкнутой, если в ее правый и левый столбцы на одной и той же строке входит формула α. Как обычно, в общем случае таблица считается замкнутой, если замкнуты все ее подтаблицы. Формула называется доказуемой (в конкретной системе), если можно построить замкнутую таблицу, которая начинается вписыванием формулы α в правый столбец на строке с индексом 0.

При использовании описанных правил следует учитывать, что правила I_r, I^*_r наделены приоритетом. Это значит, что при появлении в таблице формул, начинающихся знаком модальности, сначала нужно применять правила I_r, I^*_r, а затем правила I_l, I^*_l.

С помощью описанного метода можно построить табличные аналоги ряда модальных систем. Для всех таких аналогов правила I_r, I^*_r являются общими. Далее, для получения табличного аналога системы **T** достаточно установить, что используемое в формулировке правил I_l, I^*_l отношение R только рефлексивно (и не обладает никакими другими свойствами). Для табличного аналога системы **S4** это отношение рефлексивно и транзитивно (но не симметрично); для системы **Br** оно рефлексивно и симметрично (но не транзитивно); для системы **S5** это отношение эквивалентности.

Для получения табличного аналога системы **S4.1** (**S4.1**= **S4** + $\Box(\Box(\alpha\supset\Box\alpha)\supset\alpha)\supset(\neg\Box\neg\Box\alpha\supset\alpha)$) правила I_l, I^*_l заменяются следующим правилами.

$I_{l4.1}$: Если формула $(\Box\alpha)_w$ входит в левый столбец таблицы (подтаблицы) t, то в левый столбец этой таблицы (подтаблицы) вписывается формула $(\alpha)_{w'}$, где w'=u, m, n, а w=u, k и формула $(\alpha)_{u.m}$ встречается в левом столбце таблицы (подтаблицы) t; или же просто имеет место wRw'.

$I^*_{l4.1}$: Если формула $\Box\alpha$ входит в левый столбец таблицы (подтаблицы) t на строке w, то в левый столбец этой таблицы (подтаблицы) на строке w' вписывается формула α, где w'=u, m, n, а w=u, k и формула α встречается в левом столбце таблицы (подтаблицы) t на строке с индексом u, m; или же просто имеет место wRw'.

Для получения табличного аналога системы **S4.2** (**S4.2**= **S4**+$\neg\Box\neg\Box\alpha\supset\Box\neg\Box\neg\alpha$) достаточно заменить правила I_l, I^*_l следующими правилами.

$I_{l4.2}$: Если формула $(\Box\alpha)_w$ входит в левый столбец таблицы (подтаблицы) t, то в левый столбец этой таблицы (подтаблицы) вписывается формула $(\alpha)_{w'}$, где w'=u, m, n, а w=u, n и u, n является подиндексом хотя бы одного из индексов, приписанных формулам, встречающимся в таблице (подтаблице) t; или же просто имеет место wRw'.

$I^*_{l4.2}$: Если формула $\Box\alpha$ входит в левый столбец таблицы (подтаблицы) t на строке w, то в левый столбец этой таблицы (подтаблицы) на строке w' вписывается формула α), где w'=u, m, n, а w=u, n и сочетание u, m является подиндексом хотя бы одного из индексов, приписанных строкам таблицы (подтаблицы) t; или же просто имеет место wRw'.

Для получения табличного аналога системы **S4.3** (**S4.3**= **S4**+$\Box(\Box\alpha\supset\beta)\vee\Box(\Box\beta\supset\alpha)$) достаточно заменить правила I_l, I^*_l следующими правилами.

$I_{l4.3}$: Если формула $(\Box\alpha)_w$ входит в левый столбец таблицы (подтаблицы) t, то в левый столбец этой таблицы (подтаблицы) вписывается формула $(\alpha)_{w}$, причем верно, что uRw' или wRu', где u ($u>0$) – индекс, приписанный хотя бы одной формуле вида $\Box\beta$, входящей в левый столбец таблицы (подтаблицы) t, а u' - индекс, приписанный хотя бы одной формуле вида β, входящей в левый столбец этой же таблицы (подтаблицы), и при этом uRu'; или же просто имеет место wRw'.

$I^{*}_{14\,3}$: Если формула $\Box\alpha$ входит в левый столбец таблицы (подтаблицы) t на строке w, то в левый столбец этой таблицы (подтаблицы) на строке w' вписывается формула α, причем верно, что uRw' или wRu', где u ($u>0$) – индекс, приписанный хотя бы одной строке, на которой формула вида $\Box\beta$ входит в левый столбец таблицы (подтаблицы) t, а u' - индекс, приписанный хотя бы одной строке, на которой вида β входит в левый столбец этой же таблицы (подтаблицы); или же просто имеет место wRw'.

И, наконец, для получения табличного аналога системы **S4.4** (**S4.4**= **S4**+$\alpha\supset(\neg\Box\neg\Box\alpha\supset\Box\alpha)$) правила I_{l}, I^{*}_{l} заменяются следующими правилами.

$I_{14\,4}$: Если формула $(\Box\alpha)_{w}$ входит в левый столбец таблицы (подтаблицы) t, то в левый столбец этой таблицы (подтаблицы) вписывается формула $(\alpha)_{w'}$, причем w' - любой индекс, ранг которого больше 0, если в левый столбец этой же таблицы (подтаблицы) входит формула $(\alpha)_{u}$ и $w=u, k$; или же просто имеет место wRw'.

$I^{*}_{14\,4}$: Если формула $\Box\alpha$ входит в левый столбец таблицы (подтаблицы) t на строке w, то в левый столбец этой таблицы (подтаблицы) на строке w' вписывается формула α, причем w' - любой индекс, ранг которого больше 0, если формула α входит в левый столбец этой же таблицы (подтаблицы) на строке u и $w=u, k$; или же просто имеет место wRw'.

Во всех этих правилах отношение R рефлексивно и транзитивно (но не симметрично). При построении таблиц приоритет правил I_{r}, I^{*}_{r} сохраняется. Подтаблица считается замкнутой, если одна и та же формула входит в ее правый и левый столбцы на одной и той же строке. Таблица замкнута, если замкнуты все ее подтаблицы.

Приведем простой пример табличного вывода аксиомы, характеризующей систему **S5**.

$$
\begin{array}{l|l}
 & (\neg\Box\neg\Box\alpha\supset\Box\alpha)_{0} \\
(\neg\Box\neg\Box\alpha)_{0} & (\Box\alpha)_{0} \\
 & (\Box\neg\Box\alpha)_{0}
\end{array}
$$

$$\begin{array}{r|l} & \alpha_{01} \\ & (\neg\Box\alpha)_{02} \\ (\Box\alpha)_{02} & \\ \alpha_{01} & \end{array}$$

При индексации строк вывод выглядит следующим образом.

$$\begin{array}{r|l} & \neg\Box\neg\Box\alpha\supset\Box\alpha \\ 0 \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \neg\Box\neg\Box\alpha & \Box\alpha \\ 0 \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \Box\neg\Box\alpha \\ 0 \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha & \alpha \\ 01 \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \neg\Box\alpha \\ 0\,2 \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Box\alpha & \\ 0\,2 \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Формула α вписывается в правый столбец на строке 01 по правилу I^*_r, примененному к формуле $\Box\alpha$, стоящей в правом столбце на строке 0. Эта же формула вписывается в левый столбец на строке 01 по правилу I^*_l, примененному к формуле $\Box\alpha$, стоящей в левом столбце на строке 02.

Табличные модальные системы, которые получаются с помощью изложенных выше правил, дедуктивно эквивалентны соответствующим аксиоматическим системам. Можно показать, что любую замкнутую табличную конструкцию для формулы α можно записать в виде правильно построенного секвенциального вывода с конечной секвенцией $\to\alpha$. Для этого используются секвенциальные исчисления с индексированными формулами, содержащие основную секвенцию вида $\Gamma_1, (\alpha)_u, \Gamma_2\to\Theta_1, (\alpha)_u, \Theta_2$, классические секвенциальные правила (которые не вносят изменений в индексы, но в их посылках главные формулы повторяются) и два следующих правила для модального оператора.

$$\frac{\Gamma\to\Theta, (\Box\alpha)_u, (\alpha)_{u,k}}{\Gamma\to\Theta, (\Box\alpha)_u}$$

где k – число, не входящее ни в один из индексов, приписанных формулам из секвенции, стоящей в заключении.

$$\frac{(\alpha)_{w'}, (\Box\alpha)_w\, \Gamma\to\Theta}{(\Box\alpha)_w, \Gamma\to\Theta}$$

В данном случае заглавными греческими буквами обозначены списки индексированных формул. Для второго правила имеет место wRw′, и для его применения в конкретной системе формулируются такие же условия, как и для применения правила I_l в соответствующей табличной системе.

Далее, определив формульные образы индексированных секвенций, можно показать, что секвенциальные исчисления с такими модальными правилами дедуктивно эквивалентны аксиоматическим системам в том смысле, что секвенция $\rightarrow (\alpha)_u$ выводима в секвенциальном исчислении тогда и только тогда, когда ее формульный образ доказуем в соответствующей аксиоматической системе. (Такое доказательство дано в работе [2].) Из этого следует дедуктивная эквивалентность аксиоматических систем и их табличных аналогов.

Метод индексации формул (или строк) можно использовать и для формулировки релевантных табличных систем. При этом (как и в модальных системах) применения табличных правил Бета для конъюнкции, дизъюнкции и отрицания не изменяют индексов, приписанных формулам. Для импликации вводятся следующие правила.

$I_{\supset r}$: Если формула $(\alpha\supset\beta)_u$ встречается в таблице **t** справа, то в этой же таблице пишется $(\alpha)_{u,k}$ слева, а $(\beta)_{u,k}$ справа, при этом k - новое число, не встречающееся в индексах, приписанных формулам, находящимся в **t**.

$I_{\supset l}$: Если формула $(\alpha\supset\beta)_u$ встречается в таблице **t** слева, то **t** расщепляется на две альтернативные таблицы **t1**и **t2**, и 1) если u=0 или формула $(\alpha\supset\beta)_u$ вписана в **t** по правилу $I_{\supset l}$, то либо $(\alpha)_u$ пишется в **t1** справа, а $(\beta)_u$ пишется в **t2** слева, либо $(\alpha)_w$ пишется в **t1** справа, а $(\beta)_w$ пишется в **t2** слева, причем w - индекс, приписанный одной из формул в **t**, и имеет место uRw; 2) если u>0 и формула $(\alpha\supset\beta)_u$ вписана в **t** по правилу, отличающемуся от $I_{\supset l}$, то $(\beta)_w$ пишется в **t2** слева, причем uRw, а $(\alpha)_w$ пишется в **t1** справа, причем w - индекс, приписанный одной из формул в **t**, и имеет место uRw.

Вхождение подформулы α_i (i=1,2...n) в индексированную формулу γ называется несущественным, если γ имеет вид $(\alpha_1\&\alpha_2\&...\&\alpha_n\&\beta)\supset \beta$, $\beta\supset(\alpha_1\vee\alpha_2\vee...\vee\alpha_n\vee\beta)$ или $(\alpha_1\supset(\alpha_2\supset...(\alpha_n\supset\beta)...))\supset(\alpha_n\supset\beta)$; в противном случае вхождение α_i в γ называется существенным.

Построение табличной конструкции для формулы γ начинается вписыванием $(\alpha)_0$ в исходную таблицу справа, если $\supset$ не является в γ главным логическим знаком, или же начинается вписыванием формулы $(\alpha)_0$ в исходную таблицу слева и формулы $(\beta)_0$ справа, если γ имеет вид $\alpha\supset\beta$. При построении таблиц первым применяется правило $I_{\supset r}$, а затем правило $I_{\supset l}$. Отношение R транзитивно (но не рефлексивно и не симметрично). Если формула $(\alpha)_w$ входит в правый и левый столбцы таблицы (подтаблицы), будем говорить, что данная таблица (подтаблица) замкнута по формуле $(\alpha)_w$. Табличная конструкция для формулы α считается замкнутой, если она замкнута по всем существенным вхождениям элементарных (не содержащих логических знаков) подформул формулы α. Формула α называется доказуемой, если для нее можно построить замкнутую табличную конструкцию.

Метод индексации формул можно использовать для построения перечисленных выше модальных систем в форме аналитических таблиц. Для этого к обычным правилам построения аналитических таблиц для формул, содержащих импликацию, конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание в качестве главных логических знаков (см., например, [1]), добавляются следующие правила для модальных формул с префиксами T и F.

$$\mathrm{T}\Box\ \frac{\mathrm{T}(\Box\alpha)_{w}}{\mathrm{T}(\alpha)_{w'}} \qquad \mathrm{F}\Box\ \frac{\mathrm{F}(\Box\alpha)_{u}}{\mathrm{F}(\alpha)_{u,k}}$$

В схемах этих правил k – число не входящее в индекс, приписанный формуле, являющейся посылкой, и имеет место wRw′. Ветвь аналитической таблицы считается замкнутой, если в ней встречаются формулы $\mathrm{T}(\alpha)_w$ и $\mathrm{F}(\alpha)_w$. Аналитическая таблица замкнута, если замкнуты все ее ветви. Формула α доказуема, если можно построить замкнутую аналитическую таблицу, построение которой начинается с префиксированной формулы $\mathrm{F}(\alpha)_0$.

Для получения различных модальных систем с помощью таких правил формулируются различные условия, касающиеся отношения R и/или приписывания индексов при применении правила T□. Таковыми могут быть условия, аналогичные тем, что применялись ранее при построении таблиц Бета с индексированными формулами (строками). Правило F□ является общим для всех систем.

Для некоторых модальных систем (например, **S5**, **S4**, **S4.2**, **S4.4** и др.) можно определить понятия модализованных (в смысле данной системы) формул. (Например, формула α называется **S5**-модализованной, если всякое вхождение пропозициональной буквы в α находится в области действия вхождения оператора □.) Эти понятия можно использовать для построения аналитических таблиц. В данном случае правила для модальных формул с префиксами T и F выглядят следующим образом.

$$T\Box^{*}\frac{T(\Box\alpha)}{T(\alpha)} \qquad F\Box^{*}\frac{F(\Box\alpha)}{F(\alpha)}$$

При этом применение правила F□* считается корректным в ветви *b* аналитической таблицы, если и только если формула □α является модализованной (в смысле рассматриваемой системы) и в *b* выше посылки данного правила нет префиксированной формулы T(α), в которой α не является модализованной. На применение правила T□* не накладывается никаких ограничений. В процессе построения таблиц всегда сначала применяется правило F□*, а затем правило T□*. Понятие замкнутой аналитической таблицы остается стандартным. Как обычно, формула α считается доказуемой (в рассматриваемой системе), если можно построить замкнутую аналитическую таблицу, которая начинается с префиксированной формулы F(α).

Например, замкнутая аналитическая таблица для формулы, характеризующей систему **S5**, имеет следующий вид.

$F(\neg\Box\neg\Box\alpha\supset\Box\alpha)$
$T(\neg\Box\neg\Box\alpha)$
$F(\Box\alpha)$
$F(\Box\neg\Box\alpha)$
$F(\alpha)$
$F(\neg\Box\alpha)$
$T(\Box\alpha)$
$T\alpha$

Легко убедиться в том, что здесь оба применения правила F□* корректны.

И, наконец, если в модальной системе можно определить понятие модализованной (в смысле этой системы) формулы, можно строить табличный аналог такой системы в стиле таблиц Бета. В данном случае в дополнение к обычным правилам для пропозициональных связок принимаются следующие правила заполнения таблиц для модальных формул.

I_{mr}: Если формула □α входит в правый столбец таблицы (подтаблицы), то в правый столбец данной таблицы (подтаблицы) вписывается формула α.

Применение этого правила корректно, если и только если формула □α является модализованной (в смысле рассматриваемой системы) и в левый столбец этой таблицы (подтаблицы) не входит формула α, не являющаяся модализованной.

I_{ml}: Если формула $\Box\alpha$ входит в левый столбец таблицы (подтаблицы), то в левый столбец данной таблицы (подтаблицы) вписывается формула α.

В системах с этими правилами сохраняются обычные определения замкнутой подтаблицы и таблицы. Формула считается доказуемой (в рассматриваемой системе) если для нее можно построить замкнутую таблицу. Правило I_{mr} наделяется приоритетом в том смысле, что в процессе построения таблицы сначала данное правило применяется ко всем формулам вида $\Box\alpha$, появившимся в правом столбце, а затем применяется правило I_{ml}. Разумеется, при этом все применения правила I_{mr} должны быть корректными.

Литература

1. *Smullyan R M.* First-Order Logic, second edition, New York, 1995.
2. *Быстров П И* Синтаксический анализ некоторых расширений **S4** // Синтаксические и семантические исследования неэкстенсиональных логик. М., 1989. С. 290-304.

В.Л.Васюков

Подструктурные экспоненциальные категории в теории категорий и категорной логике[1]

The conception of categorical logics emerged in the framework of category theory but today it turns out to be an independent field of modern logics studies. In the paper an equivalency of elementary category theory and categorical logics is shown and some features of that result for the case of so-called substructural exponential categories are considered.

1. Подструктурные экспоненциальные категории как системы категорной логики

Введем понятие дедуктивной импликативной системы и экспоненциальной категории, следуя [6].

Напомним, что граф состоит из класса стрелок (в теории графов называемых "ориентированными ребрами") и класса объектов (обычно называемых "вершинами") и двух отображений:

Начало: {стрелки} $\to$ {объекты}

Конец: {стрелки} $\to$ {объекты}

Вместо того чтобы писать *начало*(f) = A, *конец*(f) = B, часто пишут f: $A \to B$ или f: $A \vdash B$.

Согласно [3, p.47], дедуктивная система представляет собой граф со специальной стрелкой

$$1_A: A \vdash A$$

и бинарной операцией на стрелках (композиции)

$$\frac{f: A \vdash B \quad g: B \vdash C}{gf: A \vdash C}$$

Под объектами дедуктивной системы, как обычно, понимаются формулы, под стрелками — доказательства, и под операциями на стрелках — правила вывода. Мы получаем импликативное исчисление, если допускаем, что существует формула T (= истина) и бинарная операция $\supset$ (= "если,...,то") для образования импликации $A \supset B$ из двух данных формул A и B. Кроме этого, мы вводим следующие два правила вывода:

[1] Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 01-03-00403.

$$\frac{f: A \vdash B}{\ulcorner f \urcorner : T \vdash A \supset B} \qquad \frac{g: T \vdash A \supset B}{g^s: A \vdash B}$$

Нетрудно видеть, что наше импликативное исчисление соответствует системе ***I***, ибо:

а) мы имеем аксиому ***I*** в виде:

$$\ulcorner 1_A \urcorner : T \vdash A \supset A$$

б) правило *модус поненс* в виде:

$$\frac{f: T \vdash A \quad g: T \vdash A \supset B}{g^s f: T \vdash B}$$

Категория, согласно [3, p.52], есть дедуктивная система, в которой имеют место следующие уравнения между доказательствами:

$f 1_A = f, \quad 1_B f = f,$

$(hg) f = h (gf)$, для всех $f: A \vdash B$, $g: B \vdash C$, $h: C \vdash D$

Мы определяем *экспоненциальную категорию*, наделяя категорию A введенными правилами вывода и дополнительными тождествами:

$$\ulcorner f \urcorner^s = f, \quad \ulcorner g^s \urcorner = g, \text{ для всех } f: A \vdash B \text{ и } g: T \vdash C \supset D.$$

Наделяя экспоненциальные категории дополнительной структурой, мы одновременно получаем различные категорные импликативные исчисления, соответствующие подструктурным логическим исчислениям. Так, если мы добавим к нашей системе аксиом новую стрелку-аксиому, выглядящую следующим образом:

$$\beta^A{}_{BC}: B \supset C \vdash (A \supset B) \supset (A \supset C),$$

то получаем импликативное исчисление, соответствующее системе минимальной импликативной логики ***IB***, поскольку аксиому ***B*** мы теперь получаем в следующем виде:

$$\ulcorner \beta^A{}_{BC} \urcorner : T \vdash (B \supset C) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$$

Действуя подобным же образом, мы можем добавить к ***IB***-импликативному исчислению аксиомы, являющиеся категорными аналогами аксиом ***C, W, K*** :

$$\gamma^A{}_{BC}: A \supset (B \supset C) \vdash B \supset (A \supset C)$$
$$w_{AB}: A \supset (A \supset B) \vdash A \supset B$$
$$\kappa^B{}_A: A \vdash B \supset A$$

Нетрудно видеть, что все это ведет к добавлению следующих правил (стрелок):

$$\frac{f: B \vdash C}{1_A \supset f: A \supset B \vdash A \supset C}$$

(достаточно положить $1_A \supset f = (\beta^A{}_{BC} \ulcorner f \urcorner)^s$

$$\frac{f: A \vdash B \supset C}{f^\gamma: B \vdash A \supset C}$$

(достаточно положить $f^\gamma = (\gamma^A{}_{BC} \ulcorner f \urcorner)^s$)

$$\frac{f: A \vdash A \supset B}{f^w: A \vdash B}$$

(достаточно положить $f^w = (w_{AB} \ulcorner f \urcorner)^s$)

$$O_A : A \vdash T$$

$$\frac{f: T \vdash A}{f^\kappa: B \vdash A}$$

(где $O_A = (\kappa^A{}_T)^s$, $f^\kappa = O_B f$).

IBCWK-экспоненциальную категорию мы получаем теперь путем добавления следующих тождеств:

$$((1_B \supset f \ulcorner 1_B \urcorner)^s = f,$$

$$f^{\gamma\gamma} = f.$$

$$(\ulcorner f \urcorner)^w = f, \text{ где } f: T \vdash C.$$

$$f = O_A, \text{ для всех } f: A \vdash T.$$

2. Элементарная теории категорий

Иной подход к понятию категории характерен для теории категорий. С точки зрения логики теория категорий может рассматриваться как элементарная теория, чьи «категорные» нелогические аксиомы добавлены к первопорядковому исчислению с равенством. Подобный подход был реализован еще в 60-70-е годы У. Хэтчером, Ж. Блан и М. Р. Донадью и др. Формально это делается следующим образом.

Язык элементарной теории категорий ETAC [1, с.4] состоит из:

(i) счетного множества переменных двух типов:
    переменных типа объект: $x_1, x_2, \ldots$
    переменных типа стрелки: $f, g, h, \ldots$

(ii) логических констант: $\Rightarrow, \Leftrightarrow, \wedge, \vee, \neg, \exists, \forall, =$;

(iii) тернарного предиката $D(-, -, -)$, где первая переменная имеет тип стрелки, а две других переменных являются переменными типа объект ($D(f, x_1, x_2)$ означает «f есть стрелка из x_1 в x_2»);

(iv) тернарного предиката $\Gamma(-, -, -)$, где все переменные имеют тип стрелки ($\Gamma(f,g,h)$ означает «h является композицией f и g»).

ЕТАС аксиоматизируется с помощью следующих схем аксиом:

Ax1. $\forall f \exists! x_1,x_2 [D(f,x_1,x_2)]$

Ax2. $\forall x_1 \; \exists i \; [\Phi(x_1,i) \wedge D(i,x_1,x_1)]$, где $\Phi(x_1,i)$ представляет собой формулу $\forall f,g,x_2,x_3[D(f, x_1, x_2) \wedge D(g, x_3, x_1) \Rightarrow \Gamma(i,f,f) \wedge \Gamma(g,i,g)]$

Ax3. $\forall h \; \Gamma(f, g, h) \Rightarrow \exists x_1, x_2, x_3 [D(f, x_1, x_2) \wedge D(g, x_2, x_3) \wedge D(h, x_1, x_3)]$

Ax4. $D(f,x_1,x_2) \wedge D(g,x_2,x_3) \Rightarrow \exists \; h \; \Gamma(f,g,h)$

Ax5. $\Gamma(f,g,h) \wedge \Gamma(f,g,h') \Rightarrow h = h'$

Ax6. $\Gamma(f,g,k) \wedge \Gamma(g,h,l) \wedge \Gamma(f,l,m) \wedge \Gamma(k,h,m') \Rightarrow m = m'$

Существующие варианты аксиоматизации элементарной теории позволяют выразить и более сложные категорные структуры и конструкции. При этом они могут основываться и на другом наборе нелогических предикатов. В качестве примера рассмотрим аксиоматизацию элементарной теории категорий ***D*** У. Хэтчера [2, p.387-389].

Пусть D будет первопорядковым языком с равенством, включающим следующие нелогические понятия: символ тернарного отношения K, одноместный предикат F, константы 1 и A, одноместные функциональные символы D, C, Π_1 и Π_2, и бинарный функциональный символ $\times$. Собственные аксиомы элементарной теории категорий делятся на четыре группы. Первая группа - это просто первопорядковые аксиомы элементарной теории категорий:

I. <u>Теория категорий</u>

1. $\forall x \, [D(C(x)) = C(x) \wedge C(D(x)) = D(x)]$
2. $\forall x,y,z \, [K(x,y,z) \wedge K(x,y,w) \Rightarrow z = w]$
3. $\forall x \, \forall y \, \exists z \, [K(x,y,z) \Leftrightarrow (C(x) = D(y))]$
4. $\forall x,y,z \, [K(x,y,z) \Rightarrow (D(x) = D(z) \wedge C(z) = C(y))]$
5. $\forall x \, [K(D(x),x,x) \wedge K(x,C(x),x)]$
6. $\forall x,y,z,w,x',y',z'[K(x,y,z) \wedge K(x,w,x',) \wedge K(x,x',y) \wedge K(z,w,z') \Rightarrow y' = z']$

Интуитивно наш универсум представляет собой универсум стрелок, $K(x,y,z)$ означает, что z есть композиция x и y, что можно записать также как «$yx = z$», $D(x)$ означает область определения x, а $C(x)$ означает область значения x. Стрелка x будет представлять собой объект, что записывается $Ob(x)$, если $x = D(x)$. Далее для объектов будут использоваться заглавные буквы X, Y, Z и т.д.

II. <u>Объекты 1 и A</u>

1. *1 есть единственный терминальный объект.*
2. $Ob(A) \wedge A \neq 1$

3. $\exists x\,[D(x) = 1 \wedge C(x) = A]$

4. 1 *представляет собой генератор (порождающий объект). Символически:*

$\forall f,g[D(f)=D(g)\wedge C(f)=C(g)\Rightarrow \forall h(D(h)=1\wedge C(h)=D(f)\wedge fh=gh)\Rightarrow f=g)]$

Определим элемент объекта X как стрелку $1 \to X$ (если использовать запись $f : A \to B$ для стрелки с областью определения A и областью значения B). Отсюда аксиома II.3 говорит, что A не пусто, а II.4 утверждает, что стрелки представляют собой функции, т.е. параллельные стрелки, совпадающие на элементах области определения, тождественны. Интуитивно 1 является одноэлементным множеством, а A есть непустое базисное множество.

III. Произведение объектов

1. $\forall X,Y$ *($X\times Y$ есть единственный объект - произведение X и Y - по отношению к некоторым, не обязательно единственным, проекциям).*

(понятие проекции вводится с помощью предиката $Pr(x,y)$, означающего, что x и y являются проекциями, формально определяющегося как $D(x) = D(y) \wedge \forall f \forall g\ [(D(f) = D(g)\wedge C(f) = C(g)\wedge C(y) = C(x)) \Rightarrow \exists! z\ (xz = f\wedge gz = g)])$

2. $(X\times Y)\times Z = X\times (Y\times Z)$.
3. $X\times Y = X\times Z \Rightarrow Y = Z$.
4. $[\varphi(1) \wedge \forall x(\varphi(x) \wedge Ob(x) \Rightarrow \varphi(A\times x))] \Rightarrow \forall x(Ob(x) \Rightarrow \varphi(x))$,

   где $\varphi(x)$ есть любая формула языка элементарной теории категорий.

Интуитивно единственными объектами элементарной теории категорий ***D*** являются A^n, $A^n\times A^m = A^{n+m}$. Таким образом, произведения объектов не просто единственно с точностью до изоморфизма, но тождественно единственно.

IV. Стандартные проекции

1. $\Pi_1(1) = 1$; $\Pi_1(A) = A$; $\forall X(X\neq 1 \Rightarrow \Pi_1(X){:}\ X\to A))$
2. $\Pi_2(1) = 1$; $\Pi_2(A) = A\to 1$; $\forall X(D(\Pi_2(X)) = X)$
3. *Для каждого объекта X либо $X = 1$, либо X представляет собой произведение объектов A и $C(\Pi_2(X))$ по отношению к проекциям $\Pi_1(X){:}\ X\to A$ и $\Pi_2(X){:}\ X\to C(\Pi_2(X))$.*

Заметим, что аксиомы III.2-III.4 истинны для натуральных чисел, когда 1 интерпретируется как нуль. Аксиома III.3 представляет обой более общую форму аксиомы Пеано $A\times X = A\times Y \Rightarrow X = Y$, а III.4 является первопорядковой формулировкой пеановской аксиомы индукции. Отсутствует только аксиома $A\times X\neq 1$, но она может быть получена в качестве теоремы ***D***. Более того, подтеория ***D***, состоящая из чистых объектов (когда и квантификация ограничивается только объектами), содержит в себя разрешимую и полную первопорядковую теорию арифметики М.Пресбургера [6]. Фактически вся теория объектов $\boldsymbol{D}$ эквивалентна пресбургеровской арифметике, если устранить имеющуюся функцию предшествования $C(\Pi_2(X))$ на объектах.

3. Элементарная теория S-категорий

То обстоятельство, что вся теория объектов $\boldsymbol{D}$ эквивалентна пресбургеровской арифметике, отнюдь не означает, что универсум элементарной теории категорий обязательно носит арифметический характер. В [5, р.328] было показано, что соответствующие расширения элементарной теории категорий позволяют получить и иное строение ее универсума.

Вернемся к аксиоматике элементарной теории категорий ETAC и расширим ее следующими новыми аксиомами, описывающими действие трех новых операторов $\otimes$, /, \ на объектах:

Ax7. $\forall x_1 \forall x_2 \exists ! f\, D(f, x_1, x_2)$

Ax8. $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \,[D(f, x_1, x_2) \Rightarrow D(g, x_1 \otimes x_3, x_2 \otimes x_3) \wedge D(h, x_3 \otimes x_1, x_3 \otimes x_2)]$

Ax9. $\forall x_1\, \forall x_2\, \forall x_3\, [D(f, x_1 \otimes x_2, x_3) \Leftrightarrow D(g, x_1, x_3 / x_2) \Leftrightarrow D(f, x_2, x_1 \setminus x_3)]$

Как нетрудно заметить, аксиома Ах7 превращает элементарную теорию категорий в элементарную теорию категорий предпорядка. Теорию ETAC + (Ах7)-(Ах9) обозначим как SETAC, т.е. аксиоматическую теорию S-категорий. Таким образом, наш замысел ясен – добавление этих аксиом должно привести к тому, что мы получаем элементарную теорию категорий, моделирующую исчисления Айдукевича-Ламбека. Чтобы доказать, что это действительно так, построим перевод из языка LSC в язык SETAC.

Рассмотрим функцию tr_1 из языка LSC в язык SETAC, определяя ее следующим образом:

$tr_1\,(x_i) = x_i$,
$tr_1\,(x_1 \cdot x_2) = tr_1\,(x_1) \otimes tr_1\,(x_2)$,
$tr_1\,(x_1 / x_2) = tr_1\,(x_1) / tr_1\,(x_2)$,
$tr_1\,(x_1 \setminus x_2) = tr_1\,(x_1) \setminus tr_1\,(x_2)$,
$tr_1\,(x_1 \to x_2) = D(f, tr_1\,(x_1), tr_1\,(x_2))$.

Лемма 1. *Если* $\vdash_{LSC} x_1 \to x_2$, *то* $\vdash_{SETAC} D(f, x_1, x_2)$.

Доказательство проводится непосредственной индукцией по длине доказательства $x_1 \to x_2$ в LSC.

Поскольку язык LSC обладает слишком бедными выразительными возможностями, чтобы обратный перевод адекватно передавал структуру языка SETAC в LSC, то прибегнем к следующему приему: будем строить перевод не из языка SETAC в язык LSC, но в метаязык LSC, предоставляющий в наше распоряжение гораздо более широкие возможности.

Рассмотрим отображение из языка SETAC в метаязык LSC, удовлетворяющее следующим условиям:

$tr_2\,(x_i) = x_i$,
$tr_2\,(x_1 \otimes x_2) = tr_2(x_1) \cdot tr_2(x_2)$,
$tr_2\,(x_1 \,/\, x_2) = tr_2(x_1) \,/\, tr_2(x_2)$,
$tr_2\,(x_1 \setminus x_2) = tr_2(x_1) \setminus tr_2(x_2)$,
$tr_2\,(f) = x_i \rightarrow x_j$,

$tr_2\,(D(f, x_1, x_2)) = [tr_2(f)$ *есть*$\cdot x_1 \rightarrow x_2$ *и* $\vdash_{LSC} x_1 \rightarrow x_2]$,

$tr_2\,(\Gamma(f, g, h)) = [$*для* $tr_2(f) =\cdot\, x_i \rightarrow x_j$ *и* $tr_2(g) =\cdot\, x_j \rightarrow x_k$ *и* $tr_2(h) =\cdot\, x_i \rightarrow x_k$ *если* $\vdash_{LSC} tr_2(f)$ *и* $\vdash_{LSC} tr_2(g)$, *то* $\vdash_{LSC} tr_2(h)]$,

$tr_2\,(f = f') = [tr_2(f)$ *и* $tr_2(f')$ *один и тот же*$]$,
$tr_2\,(A \Rightarrow B) = [$*если* $tr_2(A)$, *то* $tr_2(B)]$,
$tr_2\,(A \Leftrightarrow B) = [tr_2(A)$ *тогда и только тогда, когда* $tr_2(B)]$,
$tr_2\,(A \wedge B) = [tr_2(A)$ *и* $tr_2(B)]$,
$tr_2\,(A \vee B) = [tr_2(A)$ *или* $tr_2(B)]$,
$tr_2\,(\neg A) = [$*не* $tr_2(A)]$,
$tr_2\,(\forall x_i\, A) = [$*для каждого* x_i, $tr_2(A)]$,
$tr_2\,(\exists x_i\, A) = [$*для некоторого* x_i, $tr_2(A)]$,
$tr_2\,(\forall f\, A) = [$*для каждого* $tr_2(f)$, $tr_2(A)]$,
$tr_2\,(\exists f\, A) = [$*для некоторого* $tr_2(f)$, $tr_2(A)]$,

где A, B являются формулами языка SETAC.

Теперь мы в состоянии индукцией по длине доказательства A в SETAC доказать следующую лемму:

Лемма 2. *Если* $\vdash_{SETAC} A$, *то* $\vdash_{LSC} tr_2(A)$.

В качестве следствия леммы 2 мы получаем, что если $\vdash_{SETAC} D(f, x_1, x_2)$, то $\vdash_{LSC} x_1 \rightarrow x_2$, что вместе с леммой 1 дает нам следующую теорему вложения для LSC:

Теорема 3. $\vdash_{LSC} x_1 \rightarrow x_2$ *тогда и только тогда, когда* $\vdash_{SETAC} D(f, x_1, x_2)$.

4. Эквивалентность расширений элементарной теории категорий и систем категорной логики

Рассмотренная эквивалентность SETAC и LSC наводит на мысль о возможной эквивалентности элементарной теории категорий и систем категорной логики в том виде, как они были сформулированы ранее. Если они действительно эквивалентны, то можно было бы говорить о том, что понятие категории в категорной логике соответствует интуитивным конструкциям, лежащим в основе теории категорий.

Рассмотрим функцию tr_3 из языка CatLog категорной логики в язык ETAC элементарной теории категорий, определяя ее следующим образом:

$tr_3(A) = x_A$ (переменная типа объект в языке ETAC);
$tr_3(f) = f$ (переменная типа стрелка в языке ETAC);
$tr_3(f\colon A \vdash B) = D(f, tr_3(A), tr_3(B))$;
$tr_3(gf) = \Gamma(tr_3(f), tr_3(g), h) = \Gamma(f,g,h)$, где $h = tr_3(h) = gf$;
$tr_3(g = f) = [tr_3(g) = tr_3(f)]$.

Лемма 3. *Если $f\colon A \vdash B$ есть стрелка (дедуктивной) категории, то* $\vdash_{ETAC} D(f, x_A, x_B)$.

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по конструкции стрелок. ■

Как и в предыдущем случае обратный перевод будет осуществляться не из языка ETAC в язык CatLog, но в метаязык CatLog, что естественным образом облегчает задачу. Рассмотрим функцию tr_4 из ETAC в метаязык (дедуктивной) категории, удовлетворяющую следующим условиям:

$tr_4(x_i) = A_i$,
$tr_4(f) = f$,
$tr_4(D(f, x_1, x_2)) = (tr_4(f)\colon tr_4(x_1) \vdash tr_4(x_2))$,
$tr_4(\Gamma(f, g, h)) = (tr_4(h) = tr_4(g)tr_4(f))$,
$tr_4(f = f') = (tr_4(f) = tr_4(f'))$,
$tr_4(\alpha \Rightarrow \beta) = [$*если* $tr_4(\alpha)$, *то* $tr_4(\beta)]$,
$tr_4(\alpha \Leftrightarrow \beta) = [tr_4(\alpha)$ *тогда и только тогда, когда* $tr_4(\beta)]$,
$tr_4(\alpha \wedge \beta) = [tr_4(\alpha)$ *и* $tr_4(\beta)]$,
$tr_4(\alpha \vee B) = [tr_4(\alpha)$ *или* $tr_4(\beta)]$,
$tr_4(\neg\alpha) = [$*не* $tr_4(\alpha)]$,
$tr_4(\forall x_i\, \alpha) = [$*для каждого* A_i, $tr_4(\alpha)]$,
$tr_4(\exists x_i\, \alpha) = [$*для некоторого* A_i, $tr_4(\alpha)]$,
$tr_4(\forall f\, \alpha) = [$*для каждого* f, $tr_4(\alpha)]$,

$tr_4(\exists f\,\alpha) = $ [*для некоторого* f, $tr_4(\alpha)$],

где α, β являются формулами языка ETAC.

Следующим шагом является доказательство леммы:

Лемма 4. *Если* $\vdash_{ETAC} \alpha$, *то* $tr_4(\alpha)$ *является стрелкой (дедуктивной) категории.*

Доказательство. Проводится индукцией по длине доказательства α в ETAC. ■

В качестве следствия леммы 4 получаем, что если $\vdash_{ETAC} D(f, x_1, x_2)$, то $f\colon A_1 \vdash A_2$ есть стрелка категории, что вместе с леммой 3 дает нам следующую теорему вложения для CatLog:

Теорема 4. $f\colon A_1 \vdash A_2$ *представляет собой стрелку (дедуктивной) категории тогда и только тогда, когда* $\vdash_{ETAC} D(f, x_1, x_2)$.

Пополним теперь аксиоматику элементарной теории категорий ETAC за счет следующих аксиом, описывающих свойства оператора $\supset$ на объектах, новой константы T и операторов $\ulcorner(-)\urcorner$, $(-)^s$ на стрелках:

Ax10. $\forall f, x_1, x_2\, (D(f, x_1, x_2) \Rightarrow D(\ulcorner f \urcorner, T, x_1 \supset x_2))$
Ax11. $\forall f, x_1, x_2\, (D(f, T, x_1 \supset x_2) \Rightarrow D(f^s, x_1, x_2))$
Ax12. $\forall f, x_1, x_2\, (D(f, x_1, x_2) \Rightarrow (\ulcorner f \urcorner^s = f))$
Ax13. $\forall f, x_1, x_2\, (D(f, x_1, x_2) \Rightarrow (\ulcorner f^s \urcorner = f))$

Будем называть теорию ETAC+(Ax10)-(A13) элементарной теорией экспоненциальных категорий и обозначим ее как EETAC. Докажем, что EETAC будет эквивалентна дедуктивной экспоненциальной категории. Рассмотрим вначале функцию-перевод tr_5 из языка CatLog в язык EETAC, определяя ее следующим образом:

$tr_5(A) = x_A$ (переменная типа объект в языке EETAC);

$tr_5(f) = f$ (переменная типа стрелка в языке EETAC);

$tr_5(T) = T$;
$tr_5(A \supset B) = x_A \supset x_B$;

$tr_5(\ulcorner f \urcorner) = \ulcorner tr_5(f) \urcorner$;

$tr_5(f^s) = tr_5(f)^s$;

$tr_5(f\colon A \vdash B) = D(f, tr_5(A), tr_5(B))$;

$tr_5(gf) = \Gamma(tr_5(f), tr_5(g), h) = \Gamma(f,g,h)$, где $h = tr_5(h) = gf$;

$tr_5(g = f) = [tr_5(g) = tr_5(f)]$.

Лемма 5. *Если $f\colon A \vdash B$ есть стрелка (дедуктивной) экспоненциальной категории, то $\vdash_{EETAC} D(f, x_A, x_B)$.*

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по конструкции стрелок. ■

Обратный перевод будет осуществляться не из языка EETAC в язык CatLog, но в метаязык CatLog. Рассмотрим функцию tr_6 из языка EETAC в метаязык (дедуктивной) категории, удовлетворяющую следующим условиям:

$tr_6(x_i) = A_i$,
$tr_6(f) = f$,
$tr_6(\mathrm{T}) = \mathrm{T}$;
$tr_6(x_1 \supset x_2) = tr_6(x_1) \supset tr_6(x_2)$;
$tr_6(\ulcorner f \urcorner) = \ulcorner tr_6(f) \urcorner$;
$tr_6(f^S) = tr_6(f)^S$;
$tr_6(D(f, x_1, x_2)) = (tr_6(f)\colon tr_6(x_1) \vdash tr_6(x_2))$,
$tr_6(\Gamma(f, g, h)) = (tr_6(h) = tr_6(g) tr_4(f))$,
$tr_6(f = f') = (tr_6(f) = tr_6(f'))$,
$tr_6(\alpha \Rightarrow \beta) = [$*если* $tr_6(\alpha)$, *то* $tr_6(\beta)]$,
$tr_6(\alpha \Leftrightarrow \beta) = [tr_6(\alpha)$ *тогда и только тогда, когда* $tr_6(\beta)]$,
$tr_6(\alpha \wedge \beta) = [tr_6(\alpha)$ *и* $tr_6(\beta)]$,
$tr_6(\alpha \vee B) = [tr_6(\alpha)$ *или* $tr_6(\beta)]$,
$tr_6(\neg\alpha) = [$*не* $tr_6(\alpha)]$,
$tr_6(\forall x_i\, \alpha) = [$*для каждого* A_i, $tr_6(\alpha)]$,
$tr_6(\exists x_i\, \alpha) = [$*для некоторого* A_i, $tr_6(\alpha)]$,
$tr_6(\forall f\, \alpha) = [$*для каждого* f, $tr_6(\alpha)]$,
$tr_6(\exists f\, \alpha) = [$*для некоторого* f, $tr_6(\alpha)]$,

где α, β являются формулами языка EETAC.

Следующим шагом является доказательство леммы:

Лемма 6. *Если $\vdash_{EETAC} \alpha$, то $tr_6(\alpha)$ является стрелкой (дедуктивной) экспоненциальной категории.*

Доказательство. Проводится индукцией по длине доказательства α в EETAC. ■

В качестве следствия леммы 6 получаем, что если $\vdash_{EETAC} D(f, x_1, x_2)$, то $f\colon A_1 \vdash A_2$ есть стрелка экспоненциальной категории, что вместе с леммой 6 дает нам следующую теорему вложения для CatLog:

Теорема 5. *f: $A_1 \vdash A_2$ представляет собой стрелку (дедуктивной) экспоненциальной категории тогда и только тогда, когда* $\vdash_{EETAC} D(f, x_1, x_2)$.

Нетрудно видеть, что добавляя к EETAC аксиомы, описывающие различные специальные стрелки в подструктурной экспоненциальной категории, можно получить соответствующие теоремы вложения (дедуктивных) экспоненциальных категорий со специальными стрелками в соответствующие расширения элементарной теории категорий. В качестве подобных специальных аксиом могут использоваться, например, следующие аксиомы:

Ax14. $\forall x_1, x_2, x_3 \exists f (D(f, x_1 \supset x_2, (x_3 \supset x_1) \supset (x_3 \supset x_2))$
Ax15. $\forall x_1, x_2, x_3 \exists f (D(f, x_1 \supset (x_2 \supset x_3), x_2 \supset (x_1 \supset x_3))$
Ax16. $\forall x_1, x_2 \exists f (D(f, x_1, x_2 \supset x_1))$

описывающие добавление к элементарной теории экспоненциальных категорий специальных стрелок $\beta^A{}_{BC}$, $\gamma^A{}_{BC}$, w_{AB} и $\kappa^B{}_A$, превращающих EETAC в элементарную теорию ***IBCWK***-экспоненциальных категорий.

Литература

1. *Blanc G., Donnadieu M. R.* Axiomatisation de la categorie des categories // Cah. Topol. Geom. Different. XVII, 2, 1976. P.1-38.
2. *Hatcher W. S.* A Language for Type-free Algebra // Zeitschr. Math, Log. Grundl. Math., 1978. Bd. 24. S. 385-397.
3. *Lambek J., Scott P. J.* Introduction to higher order categorical logic, Cambridge University Press. London, 1986.
4. *Presburger M.* Über die Volständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt // Comptes rendue I. Congrès des Math. des Pays Slaves. Warsaw, 1929. S. 192-201, 395.
5. *Vasyukov V. L.* Categorial Semantics for Ajdukiewicz-Lambek Calculus // The Heritage of Kazimierz Ajdukiewicz / V.Sinisi and J.Woleński (eds.), Rodopi, Amsterdam-Atlanta: 1995. P.322-334.
6. *Vasyukov V. L.* Implicative logics in categories // Bull. Sect. Log. Vol. 26. N 4. 1997. P. 188-192.

Д.Н.Дегтярёв

Сводимость модальностей в логиках с новыми временными операторами

The tense logic on the real line with the operators F("future"), P("past"), N("now") is considered. The main problem: how many modalties which are not equivalent we can construct. It is shown that there are only finite number of such modalities.

Введение

Будет рассматриваться временная модель, в которой моментами времени являются действительные числа, а отношение «раньше» суть обычное отношение «меньше» на действительных числах. В первой части даны необходимые определения. Во второй части приводится несколько новых временных операторов, введение которых вполне естественно и позволяет повысить выразительность языка. В третьей части рассматривается стандартный для временных логик вопрос об итерировании операторов для логик с новыми временными операторами.

1. Основные определения

Символами временных логик служат счётное множество пропозициональных переменных; связки $\neg$ и $\wedge$; знаки пунктуации; некоторое множество унарных временных операторов. Стандартные булевы связки используются как обычные сокращения.

Формулы строятся обычным образом: (а) всякая переменная является формулой; (б) если α и β – формулы, то каждое из выражений $\neg\alpha$, $(\alpha\wedge\beta)$, $A\alpha$, где A – некоторый временной оператор данной теории, есть формула; (в) выражение является формулой только в том случае, если это следует из правил (а) и (б). «Лишние» скобки, то есть такие, которые легко восстановить, опускаются.

Оценкой пропозициональных переменных называется функция V, которая каждой переменной ставит в соответствие некоторое подмножество множества моментов времени.

Истинность формулы при оценке V в некоторый момент времени x определяется следующим образом:

I. $x\models^{V} p \Leftrightarrow x\in V(p)$;

II. $x\models^{V} \neg\alpha \Leftrightarrow x\not\models^{V}\alpha$;

III. $x\models^{V} \alpha\wedge\beta \Leftrightarrow x\models^{V}\alpha$ и $x\models^{V}\beta$;

IV. истинность формул, начинающихся с временного оператора, будет определена ниже для каждого оператора отдельно.

Формула α является истинной во временной модели (записывается $\models\alpha$), если она истинна при любой оценке в каждый момент времени.

2. Новые временные операторы

Временной оператор B выражается через временные операторы $B_1, \dots, B_n$, если существует формула α, в которую могут входить только операторы $B_1, \dots, B_n$ и такая, что для любой переменной p выполняется, что $\models Bp\leftrightarrow\alpha$.

Обычными для временных логик являются операторы «будет» (F) и «было» (P). Истинность формул начинающихся с этих операторов определяется следующим образом:

I. $x\models^{V} F\alpha \Leftrightarrow$ существует момент y такой, что $x<y$ и $y\models^{V}\alpha$;

II. $x\models^{V} P\alpha \Leftrightarrow$ существует момент z такой, что $z<x$ и $z\models^{V}\alpha$.

Логики, содержащие только временные операторы F и P достаточно хорошо изучены. Но эти операторы не позволяют выразить некоторые вполне естественные утверждения о времени. Для повышения выразительной способности языка необходимо добавить новые временные операторы. Но не всякий оператор добавит выразительности. Чтобы оператор был действительно новым, необходимо, чтобы он не выражался через уже имеющиеся. Таким по отношению к F и P является, например, оператор N («сейчас»), который уже рассматривался в работах В. Б. Шехтмана [5] и Й. ван Бентема [3], [4].

Истинность формул, начинающихся с оператора N, определяется следующим образом:

I. $x\models^{V} N\alpha \Leftrightarrow$ существуют моменты a и b такие, что $a<x$ и $x<b$ и для всякого момента t такого, что $a<t<b$ справедливо $t\models^{V}\alpha$.

Утверждение 1. *Оператор N не выражается через F и P.*

Доказательство. Достаточно показать, что для любой формулы α, в которую входят только операторы F и P и единственная переменная p, найдутся оценка V и момент x такие, что

Зададим $V(p)=R\setminus(A\cup B)$, где $A=\{\pm 1/n, n=2,3,\ldots\}$, $B=Z\setminus\{0\}$.

Индукцией по построению формулы α покажем, что $V(\alpha)\in X=\{\varnothing, R, R\setminus(A\cup B), A\cup B\}$, где $V(\alpha)$ – множество моментов времени в которых при оценке V истинна формула α.

Базис индукции. Если α есть переменная p, то $V(\alpha)=V(p)=R\setminus(A\cup B)\in X$.

Индукционный шаг. Пусть $V(\beta)\in X$ и $V(\gamma)\in X$.

Если формула α имеет вид $\neg\beta$, то $V(\alpha)=R\setminus V(\beta)$. Если $V(\beta)=\varnothing$, то $V(\alpha)=R\in X$. Если $V(\beta)=R$, то $V(\alpha)=\varnothing\in X$. Если $V(\beta)=R\setminus(A\cup B)$, то $V(\alpha)=A\cup B\in X$. Если $V(\beta)=(A\cup B)$, то $V(\alpha)=R\setminus(A\cup B)\in X$.

Если формула α имеет вид $\beta\wedge\gamma$, то $V(\alpha)=V(\beta)\cap V(\gamma)$. Легко видеть, что для любых $V(\beta)$ и $V(\gamma)$ $V(\beta)\cap V(\gamma)\in X$.

Пусть теперь формула α имеет вид $F\beta$. Если $V(\beta)=\varnothing$, то $V(\alpha)=\varnothing\in X$. Если $V(\beta)=R\setminus\{\varnothing\}$, то $V(\alpha)=R\in X$. Случай когда формула α имеет вид $P\beta$ совершенно аналогичен.

Итак, $V(\alpha)\in X$, а $V(Np)=R\setminus(A\cup B\cup\{0\})\notin X$. Следовательно симметрическая разность $V(\alpha)$ и $V(p)$ будет непустым. А для любой точки x из этой симметрической разности будет справедливо $x\not\models^{V} Np\leftrightarrow\alpha$. Утверждение доказано.

Введём два новых временных оператора L^{+} и R^{+}. Истинность формул, начинающихся с этих операторов, определяется следующим образом:

I. $x\models^{V}L^{+}\alpha \Leftrightarrow x\models^{V}\alpha$ и существует момент a такой, что $a<x$ и для всякого момента t такого, что $a<t<x$ справедливо $t\models^{V}\alpha$;

II. $x\models^{V}R^{+}\alpha \Leftrightarrow x\models^{V}\alpha$ и существует момент a такой, что $x<a$ и для всякого момента t такого, что $x<t<a$ справедливо $t\models^{V}\alpha$.

Утверждение 2. *Операторы L^{+} и R^{+} не выражаются через операторы F, P и N.*

Доказательство. Аналогично предыдущему, поэтому достаточно ограничиться введением оценки и множества X. Оценка $V(p)= R\setminus(Z\cup A\cup B)$, где A–объединение всех множеств следующего вида ($k\in Z$):

$A_k=\{(4k-3)/2 + 1/n, n=3, 4, \ldots\}$;

B-объединение всех множеств следующего вида ($k\in Z$):

$B_k=\{(4k-1)/2-1/n, n=3,4,\ldots\}$.

Обозначим $C=\{(4k-3)/2, k\in Z\}$, $D=\{(4k-1)/2, k\in Z\}$.

Индукцией по построению формулы α легко проверить, что $V(\alpha)\in X=\{\varnothing,\ R,\ R\backslash(Z\cup A\cup B),\ Z\cup A\cup B,\ R\backslash(C\cup D),\ C\cup D,\ R\backslash(Z\cup A\cup B\cup C\cup D),\ Z\cup A\cup B\cup C\cup D\}$. В свою очередь $V(L^+p)= R\backslash(Z\cup A\cup B\cup D)$, а $V(R^+p)= R\backslash(Z\cup A\cup B\cup C)$. Утверждение доказано.

Замечание. Ясно, что $\models Np\leftrightarrow L^+R^+p$.

Определим ещё два временных оператора: L и R. Истинность формул, начинающихся с этих операторов, определяется следующим образом:

- $x\models^V L\alpha \Leftrightarrow$ существует момент a такой, что $a<x$ и для всякого момента t такого, что $a<t<x$ $t\models^V\alpha$;
- $x\models^V R\alpha \Leftrightarrow$ существует момент a такой, что $x<a$ и для всякого момента t такого, что $x<t<a$ $t\models^V\alpha$.

Утверждение 3. *Операторы L и R не выражаются через операторы F, P, L^+, R^+.*

Доказательство. Как и раньше зададим оценку $V(p)= R\backslash(Z\cup A\cup B\cup C\cup D\cup E\cup F)$, где A–объединение всех множеств следующего вида ($k\in Z$):

$A_k=\{(8k-1)/2+1/n, n=3,4,\ldots\}$;

B–объединение всех множеств следующего вида ($k\in Z$):

$B_k=\{(8k-3)/2-1/n, n=3,4,\ldots\}$;

C–объединение всех множеств следующего вида ($k\in Z$):

$C_k=\{(8k-5)/2+1/n, n=3,4,\ldots\}$;

D–объединение всех множеств следующего вида ($k\in Z$):

$D_k=\{(8k-7)/2-1/n, n=3,4,\ldots\}$;

$E=\{(8k-1)/2, k\in Z\}$; $F=\{(8k-3)/2, k\in Z\}$.

Обозначим $G=\{(8k-5)/2, k\in Z\}$, $H=\{(8k-7)/2, k\in Z\}$.

Индукцией по построению формулы α показывается, что $V(\alpha)\in\{\varnothing, R, R\backslash(Z\cup A\cup B\cup C\cup D\cup E\cup F), Z\cup A\cup B\cup C\cup D\cup E\cup F, R\backslash(Z\cup A\cup B\cup C\cup D\cup E\cup F\cup G), Z\cup A\cup B\cup C\cup D\cup E\cup F\cup G, R\backslash(Z\cup A\cup B\cup C\cup D\cup E\cup F\cup H), Z\cup A\cup B\cup C\cup D\cup E\cup F\cup H, R\backslash(Z\cup A\cup B\cup C\cup D\cup E\cup F\cup G\cup H), Z\cup A\cup B\cup C\cup D\cup E\cup F\cup G\cup H, G, R\backslash G, H, R\backslash H, G\cup H, R\backslash(G\cup H)\}$.

В свою очередь $V(Lp)= R\backslash(E\cup G)$, а $V(Rp)= R\backslash(F\cup H)$. Утверждение доказано.

Замечание. Ясно, что $\models L^{+}p\leftrightarrow Lp\wedge p$, $\models R^{+}p\leftrightarrow Rp\wedge p$.

Введём следующие обозначения для операторов, двойственных уже введённым: $G\alpha\equiv\neg F\neg\alpha$, $H\alpha\equiv\neg P\neg\alpha$, $M\alpha\equiv\neg N\neg\alpha$, $K\alpha\equiv\neg L\neg\alpha$, $Q\alpha\equiv\neg R\neg\alpha$, $K^{+}\alpha\equiv\neg L^{+}\neg\alpha$, $Q^{+}\alpha\equiv\neg R^{+}\neg\alpha$.

3. Сводимость модальностей

Модальностью от операторов $B_1, \dots, B_n$ называется конечная (возможно пустая) последовательность этих и двойственных им операторов.

Модальность $\underline{a}$ от операторов $B_1, \dots, B_n$ сводится к модальности $\underline{b}$ от тех же операторов, если $\models \underline{a}p\leftrightarrow\underline{b}p$.

Символом Λ будем обозначать пустую модальность.

Вопрос о сведении модальностей является стандартным для временных логик. Ещё Прайор в своих работах (смотри [1], [2]) выделял конечное множество модальностей от F и P, к которым сводятся все остальные модальности от этих операторов. Следующее утверждение обобщает результат Прайора на случай совокупности модальностей от F, P, N.

Утверждение 4. *Любая модальность от операторов F, P и N сводится к одной из следующих 49:*

I. модальности вида ab, где $a\in\{M, F, P, FP, GF, GP, HF, HP\}$, $b\in\{\Lambda, N, NM\}$;

II. модальности вида cd, где $c\in\{N, G, H, GH, FG, PG, FH, PH\}$, $d\in\{\Lambda, M, MN\}$;

III. Λ.

Доказательство. Построим вспомогательное исчисление L_1 в котором будут достаточно легко выводиться эквивалентности, необходимые для доказательства утверждения. Все выводимые в L_1 формулы, истинны в указанной выше семантике. Аксиомами этого исчисления будут:

1) все тождественно истинные формулы логики высказываний;
2) $Gp\rightarrow GGp$;
3) $Gp\rightarrow Fp$;
4) $Fp\rightarrow FFp$;
5) $p\rightarrow GPp$;
6) $FPp\rightarrow PFp$;
7) $Np\rightarrow p$;

8) $Np \to NNp$;

9) $Np \to Fp$;

10) $Fp \to NFp$;

11) $PGp \to Np$;

12) $FGFp \to GFp$;

13) $PGp \to Gp$.

Правилами вывода служат:

IV. Modus Ponens;

V. правило подстановки;

VI. правила обобщения: если есть α, то есть $G\alpha$ и $H\alpha$;

VII. правила: если есть $\alpha \to \beta$, то есть $B\alpha \to B\beta$, где $B \in \{F, P, N\}$;

VIII. правило зеркального отражения: если есть α, то есть α^*, где α^* получена из α заменой всех вхождений операторов F, P, G, H на P, F, H, G соответственно.

Теперь с помощью этих формул и правил мы сможем выводить необходимые эквивалентности. Поскольку, как было сказано исчисление L_1 корректно относительно семантики, мы будем использовать знак $\models$ и как выводимость в L_1.

Легко вывести следующее: $\models NFp \leftrightarrow Fp$, $\models NGp \leftrightarrow PGp$, а также двойственные формулы: $\models MPp \leftrightarrow GPp$, $\models MHp \leftrightarrow Hp$, и формулы полученные из этих четырёх по правилу зеркального отражения. Эти формулы позволяют свести любую модальность от F, P, N к модальности вида $\underline{e}f$, где $\underline{e}$ – модальность от F и P, а f – модальность от N.

Покажем, что любая модальность от F и P состоящая из трёх операторов (существует $4^3=64$ таких модальности) сводится к модальности от F и P из двух или менее операторов. Легко вывести, что $\models Fp \leftrightarrow FFp$, $\models FPp \leftrightarrow PFp$, $\models FGFp \leftrightarrow GFp$, $\models FHFp \leftrightarrow Fp$, и что истинны двойственные и зеркальные этим формулы. Следовательно любая модальность от F, P из трёх операторов где дважды встречается какой-либо из операторов (их 40) сводится к модальности от F, P из двух или менее операторов. Не намного сложнее вывести, что $\models FPGp \leftrightarrow FGp$, $\models PFGp \leftrightarrow FGp$, $\models FGPp \leftrightarrow FPp$, $\models PGFp \leftrightarrow GFp$, $\models GFPp \leftrightarrow FPp$, $\models GPFp \leftrightarrow FPp$, и истинность двойственных и зеркальных им формул. Эти формулы доказывают, что оставшиеся 24 модальности из трёх операторов сводятся к модальности из двух операторов.

В свою очередь выводим: $\vDash Np \leftrightarrow NNp$, $\vDash NMp \leftrightarrow NMNMp$, а также двойственные и зеркальные формулы. Получаем, что любая модальность от N сводится к некоторой из D=$\{\Lambda, N, M, NM, MN, NMN, MNM\}$. А каждая модальность от F и P сводится к некоторой из E=$\{\Lambda, F, P, G, H, FP, GH, GF, GP, HF, HP, FG, PG, FH, PH\}$.

Таким образом, любая модальность от F,P,N сводится к модальности вида $\underline{gh}$, где $\underline{g}\in$E, $\underline{h}\in$D. А благодаря тому, что $\vDash GNp \leftrightarrow Gp$, $\vDash FNMNp \leftrightarrow FNp$, и что истинны двойственные и зеркальные формулы получаем в точности формулировку утверждения. Утверждение доказано.

Ответ на естественный вопрос о возможном усилении утверждения 4 даёт утверждение 5.

Утверждение 5. *Модальности из предыдущего утверждения являются попарно несводимыми.*

Доказательство проводится построением подходящих контрмоделей.

Аналогично утверждению 4 доказывается утверждение 6.

Утверждение 6. *Существует конечное множество модальностей от F, P, L^+, R^+ такое, что любая модальность от тех же операторов сводится к некоторой модальности из этого множества.*

Однако полный аналог утверждения 5 автору неизвестен.

Что касается операторов L и R, то множества несводимых модальностей, в которых они участвуют, уже бесконечны, как это следует из утверждения 7.

Утверждение 7. *Для любого $k\in$N справедливо $\nvDash L^{k+1}p \to L^k p$, но $\vDash L^k p \to L^{k+1} p$.*

Литература

1. *Ивин А.А.* Логика времени // Неклассическая логика. М., 1970. С. 124-190.
2. *Прайор А.Н.* Временная логика и непрерывность времени // Семантика модальных и интенсиональных логик. Сб. статей. М., 1981.
3. *Benthem J. van.* Tenses in Real Time // Zeitschrift fur mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. Bd. 32. 1986. S. 61-72.
4. *Benthem J. van.* The Logic of Time. Reidel. Dordrecht. 1982.
5. *Shehtman V.* A logic with progressive tenses // Diamonds and Defaults / Kluwer Academic Publishers. 1993. P. 255-285.

Понятие как релевантная функция[1]

In what follows I will try to consider concept as relevant function. In so doing I will

1. provide an appropriate background for such an approach,
2. interpret concepts in terms of λ-abstractions,
3. clarify the notion of relevant function,
4. and outline the ways to relevant calculus of concepts.

В отечественной литературе по логике существует множество различных подходов и трактовок темы «Понятие». На фоне достаточно полного единодушия в освещении таких разделов логики как, например, «Силлогистика» или «Логика высказываний», отмеченное разнообразие наводит на мысль о недостаточной разработанности темы «Понятие» в современной логике. Данная работа представляет собой попытку устранить эти неточности через оригинальную трактовку понятия как релевантной функции. Развитие предложенного ниже подхода может привести к построению не только новой теории понятия, но и соответствующего исчисления, формализующего основные отношения и операции над понятиями, а также процедуру, известную в традиционной логике как «подведение предмета под понятие».

Предварительные соображения

Наиболее точная и строгая трактовка понятия предложена Е.К.Войшвилло. Основы теории понятия заложены им в монографиях 1967 [1] и 1989 [2]. По Е.К. Войшвилло, *"понятие как форма (вид) мысли, или мысленное образование, есть результат обобщения предметов некоторого класса и мысленного выделения самого этого класса по определенной совокупности общих для предметов этого класса – и в совокупности отличительных для них – признаков"* – ([2] с. 93).

Развитие предложенного Войшвилло подхода представлено в основном в работах В.А.Бочарова и В.И.Маркина [4 – 6], наибо-

---

[1] Работа поддержана РГНФ, грант № 00-03-00273.

лее фундаментальное изложение в учебном пособии авторов «Основы логики» [3].

"понятие есть мысль, которая посредством указания на некоторый признак выделяет из универсума и собирает в класс (обобщает) предметы, обладающие этим признаком"([3] с. 185).

Однако, на мой взгляд, даже в этой теории остаются некоторые несогласованности и неточности. Более подробно концепции Е.К. Войшвилло, В.А.Бочарова и В.И.Маркина рассмотрены в моей работе [7], здесь просто отметим основные принципиальные моменты.

Во-первых, в определении понятия как формы мысли не проясняется, что подразумевается под термином «мысль». Во-вторых, трактовка понятия Е.К.Войшвилло приводит к появлению так называемых понятийных форм высказываний, не сводимых к стандартным предикативным. В-третьих, трактовка понятийных выражений В.А.Бочаровым и В.И.Маркиным как универсалий, обозначающих объем соответствующего понятия, и выражающих в качестве смысла содержание понятия, оставляет вопрос о языковом выражении непосредственно самого понятия открытым. Наконец, вызывает определенные вопросы и сравнительно новый подход к трактовке понятийных терминов В.А.Бочарова. Он перестраивает всю теорию смысла и значения (см. [4]). Теперь, по Бочарову, каждый знак обладает тремя характеристиками: он обозначает свое значение, изображает смысл и выражает мысль. Получающийся в результате семантический четырехугольник действительно позволяет добиться единообразия в трактовке предложений и универсалий как знаков языка. Правда, теперь приходится искать внятного последовательного объяснения, чем обусловлено различение суждения как мысли и смысла предложения как «некой абстрактной структуры, изображаемой и утверждаемой мыслью».

На мой взгляд, старая идея Фреге о том, что «понятие есть функция одного аргумента, значением которой всегда является истинностное значение» ([8], с. 247) позволяет прояснить теорию понятия, сняв описанные выше противоречия.

Понятийные термины как функциональные абстракты

Характеризуя «старомодный» подход к пониманию функции как правила, Х.Барендрегт пишет:

"В противоположность понятию Дирихле (вводимому через график, т.е. множество пар, состоящих из аргумента и значе-

ния) это более старое понятие упоминало процесс перехода от аргумента к значению, кодируемый определением" ([7] с 278).

В определении понятия В.А.Бочаровым и В.И.Маркиным легко увидеть указание на мысль как процесс перехода от исходного множества (область определения) к его подмножеству (та часть области определения, на которой функция принимает фиксированные значения, то есть, значение “истина” для предметно-истинностных функций). При этом признак, фиксируемый в содержании понятия, играет роль определения, “кодирующего”, задающего функцию. Итак, будем понимать понятия как специфические функции, которые из исходного множества-универсума выбирают предметы по определенному признаку (закону). Такой подход позволяет трактовать понятийные функции как предметно-истинностные. При этом область определения предметно-истинностной функции представляет собой универсум соответствующего понятия, область истинности (т.е. подмножество области определения, на котором функция принимает значение “истина”) – объем понятия, а предикатор – содержание понятия.

Для выражения понятийных конструкций естественного языка средствами символического языка можно использовать аппарат λ-абстракций. В основе использования специальных λ-выражений лежит стремление различить в языке терм, представляющий значение, которое возвращает функция при подстановке константы на аргументное место, и непосредственно саму функцию. Пусть $\lambda\alpha\ .\ A(\alpha)$ – синтаксическая формальная запись для понятия. (Читается “функция от аргумента α такая, что $A(\alpha)$”) Будем называть выражения такого вида функциональными абстрактами или лямбда-выражениями.

Использование λ-абстракций для формальной экспликации понятий позволяет, сохранить с минимальными изменениями практически все наработки, полученные в теории понятия. Так, все стандартно выделяемые виды понятий сохраняются и при новом функциональном подходе. Дополнительно появляется возможность различить по форме записи логически и фактически универсальные понятия. $\lambda\alpha\ .\ A(\alpha)$ – логически универсальное понятие, если $A(\alpha)$ – закон логики (предикатов). Для фактически универсального понятия резервируется формальное выражение $\lambda\alpha\ .\ \alpha$.

Для сравнения атрибутивных и понятийных форм высказываний обогатим язык логики предикатов дополнительной операцией применения (функции к аргументу), называемой также аппликацией. Выражение вида $\lambda x\ A(x) \bullet \mathbf{k}$ будем понимать как формальную экспликацию процедуры подведения предмета, обозначенного константой **k**, под понятие $\lambda x\ A(x)$. Именно такие выражения по сути и представляют так называемые понятийные формы высказываний.

В общем виде аппликативная система есть пара <**X**, •>, где X – множество лямбда-термов. Для того чтобы аппликативная система представляла алгебру, она должна обладать еще одним свойством – комбинаторной полнотой: для произвольного терма t над множеством переменных $y_1 \ldots y_n$ существует функция f такая, что $f\ y_1 \ldots y_n = t$. При построении лямбда-исчисления роль комбинаторной полноты выражает так называемая β-конверсия:
$\lambda x\ \Re(x) \bullet к = \Re(x/к)$.

Как замечает Х.Б. Барендрегт,
"λ-исчисление – это по существу теория, имеющая аппликацию и абстракцию в качестве исходных понятий и β-конверсию в качестве аксиомы" [(7] с. 282].

В понятийной интерпретации β-конверсия есть утверждение о взаимовыразимости понятийных и предикативных форм высказываний. Таким образом снимается вопрос о специфике понятийных высказываний.

Еще один вопрос, требующий дальнейшего прояснения, связан со спецификой понятийных функций. Выше уже отмечалось, что понятийные функции являются предметно-истинностными. Теперь необходимо прояснить, в каком смысле эти функции являются релевантными.

Для ответа на этот вопрос обратимся к войшвиллианской теории понятий. Рассмотрим два выражения: x F(x) и : x F(y). Очевидно, что первое из них будучи универсалией выражает логическую форму какого-то понятия. Что представляет собой второе выражение? Строго говоря, оно не является универсалией, поскольку его предикативная часть не содержит свободного вхождения переменной x. Возвращаясь к развиваемой в этой работе трактовке понятий как функций, вполне естественно теперь потребовать, чтобы эти функции действительно зависели от своего аргумента. Понятие «действительной зависимости» введено во втором томе Entailment [(9), с. 392] в связи с рассмотрением так называемых релевантных функций. Ясно, что далеко не всякая математическая функция действительно зависит от своего аргумента. Примером «релевантной» функции является прибавление единицы. В качестве абсолютно «нерелевантной» функции можно указать умножение на ноль, всегда возвращающее ноль в качестве значения. Промежуточное значение занимает возведение в квадрат, дающее один и тот же результат для пары аргументов <a, -a>. Естественно потребовать, чтобы понятийные функции были релевантными.

Подводя итог сказанному выше, можно заметить следующее. Для выявления логической формы понятий мы использовали язык логики предикатов, обогащенный лямбда-выражениями. Запись понятий всегда была функциональна – соответствующие выражения содержали символ функтора (константу или переменную) и символ аргумента (константу или переменную). При этом понятийное выражение обязательно должно содержать свободные (в обычном смысле) переменные – индивидные или функциональные. На основе такого подхода может быть построено исчисление понятий, построенное по аналогии с лямбда-исчислением. С помощью лямбда-символа из формул языка логики предикатов строятся понятийные абстракты. Понятийные формы высказываний образуются с использованием операции аппликации. Дополнительно в качестве дедуктивного постулата принимается β-конверсия.

Комбинаторное представление понятий

Кроме описанного выше лямбда-исчисления комбинаторная алгебра на основе аппликативной системы может быть построена и по-другому. Речь идет о подходе, основывающимся на идеях комбинаторов Карри и Шейнфинкеля. Это позволяет получить в результате комбинаторную алгебру, не постулируя требования β-конверсии. Благодаря изоморфизму Карри-Ховарда, последний способ дает возможность проинтерпретировать комбинаторы как импликативные формулы и тем самым открывает путь к принципиально иной, импликативной трактовке понятий.

Идея Карри достаточно проста. В исходное множество термов добавляются два особых терма, называемых комбинаторами: элементы S и K, такие, что $S \neq K$, $Kxy=x$, $Sxyz=xz(yz)$, при ассоциации скобок влево. Фактически комбинаторы это особые термы, разрешающие те или иные виды преобразования аппликативных последовательностей. Так, например, комбинатор K, будучи применен к последовательности xy, просто «стирает» в ней элемент y. Оказывается, что, используя эти комбинаторы, можно так определить лямбда-термы, чтобы в итоге β-конверсия оказалась выводимой.

Для начала необходимо показать, что существует комбинатор I такой, что $I=SKK$, то есть, $Ix=x$. Доказательство очевидно. После этого индукцией по построению терма обосновывается следующее утверждение: для произвольного терма t и произвольных x, d из X имеет место следующее: $\lambda x \,.\, t \bullet d = t(d/x)$. При этом комбинаторы, преобразующие аппликативные последовательности, используются в определении лямбда-термов для задания разных типов подстановки.

Наша теория понятия запрещает случаи образования функциональных абстрактов, в которых функциональное выражение, входящее в состав лямбда-терма, не содержит свободной переменной, по которой образован терм. Это означает, что комбинатор K является слишком сильным, он не пригоден для выражения релевантных функций. В этом отношении более подходящим выглядит так называемое λ-I исчисление Черча и соответствующее ему комбинаторное исчисление.

Для построения абстрактного комбинаторного исчисления понятий рассмотрим вариант языка, содержащий
индивидные переменные - $x_1, x_2, \ldots, x_n$;
индивидные константы – $a_1, a_2, \ldots, a_n$;
функциональные переменные – $f_1, f_2, \ldots, f_n$;
функциональные константы – $F_1, F_2, \ldots, F_n$
символы лямбда-абстракции и аппликации (приложения).

Построенный язык содержит только одноместные функциональные символы. Еще Шейнфинкель отмечал, что многоместные функции могут быть выражены через суперпозицию одноместных функций. Кроме того, в случае образования высказываний с понятийными терминами об n-ках индивидов нам важно обеспечить одновременную подстановку всех индивидных констант на место соответствующих переменных, а не последовательное «насыщение» аргументных мест.

Пусть $V = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n\} \cup \{ f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ – множество переменных, а $K = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n\} \cup \{ F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ – множество констант.

Теперь в нашем распоряжении две базовые формы понятийных выражений: $\lambda x_i \,.\, F_j\,(x_i)$ и $\lambda f_j \,.\, f_j\,(a_i)$ (еще два варианта сочетаний исходных символов бракуются, так как содержат либо вхождения двух свободных переменных – индивидной и функциональной, либо вообще не содержат свободных переменных).

Терм.

1. Произвольная индивидная переменная есть терм.
2. Произвольная индивидная константа есть терм.

3. если Ф – функциональная константа или переменная, а t – терм , то Ф• t есть терм.

Замкнутый терм – терм, не содержащий ни одной переменной.

Понятие – терм, содержащий ровно одну переменную.

Формула.

1. Произвольный замкнутый терм есть формула.
2. Если t(v) понятие и v индивидная переменная, а k индивидная константа, то t(v) • k – формула.
3. Если t(v) понятие и v функциональная переменная, а k функциональная константа, то t(v) • k – формула.

Утверждение. Пусть A(v) – произвольное понятие. Тогда существует понятие B(v) такое, что Bk = A(k/v), где $k \in K$, A(k/v) есть результат замены v в A на k.

Доказательство этого утверждения будет означать, что система <Ф, •>, где Ф – множество формул, является комбинаторной алгеброй. Для обоснования утверждения индукцией по сложности понятия B(v) определим выражение λ* v.B так, чтобы выполнялось λ* v.Bk=A(k/v).

1. Пусть B(v) есть v. Тогда λ* v.v=I, где Ix=x.

Имеем λ* v.vk=Ik=k. Таким образом, v (k/v) =k.

2. Пусть B имеет вид DE.

2.1. Переменная v содержится в E и не содержится в D, то есть, D есть функциональная константа. Тогда λ* v.DE=BD(λ* v.E), где Bxyz=x(yz). Имеем λ* v.DEk= BD(λ* v.E)k= D(λ* v.Ek)=D E(k/v) – на основании индуктивного допущения.

2.2. Переменная v содержится в D и не содержится в E, то есть, D есть функциональная переменная. Тогда λ* v.DE=C (λ* v D) E, где Cxyz=xzy. Имеем λ* v.DEk= C (λ* v. D) Ek= (λ* v. D k) E=D (k/v)E – на основании индуктивного допущения.

Случай, когда переменная содержится и в D и в E, блокируется определением формулы.

Таким образом, построено комбинаторное исчисление понятий, представляющее собой комбинаторную алгебру. При этом использованы комбинаторы **I**, **B**, **C**. Соответствующие этим комбинаторам импликативные формулы образуют импликативный фрагмент так называемой линейной логики Жерара. Все это открывает возможность для импликативного представления понятий и построения соответствующего импликативного исчисления понятий.

Литература

1. *Войшвилло Е.К.* Понятие. М., 1967.
2. *Войшвилло Е.К.* Понятие как форма мышления: логико-гносеологический анализ. М., 1989.
3. *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Основы логики. М., 1997.
4. *Бочаров В.А.* Понятие, суждение, мысль // 3 Смирновские чтения. М., 2001. С. 109.
5. *Бочаров В.А.* Понятия, их формы и схемы // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке // Материалы VII Общерос. науч. конф. СПб., 2002. С. 214-216.
6. *Маркин В.И.* Традиционная силлогистика как теория отношений между понятиями по содержанию // 3 Смирновские чтения. М., 2001. С. 145.
7. *Зайцев Д.В.* Понятие: функциональный подход // Я. (А. Слинин) и Мы: к 70-летию проф. Ярослава Анатольевича Слинина. СПб, 2002. С.169-178.
8. *Фреге Г.* Размышления о смысле и значении // Логика и логическая семантика. М., 2000.
9. *Anderson A.R., Belnap N.D., Dunn J.M.* Entailment: the logic of relevance and necessity. Vol. 2. Princeton, NJ. P. 392-397.

А.С.Карпенко

Нерегулярность и «существенная» немонотонность логики Юрьева Y_3[1]

Three-valued Yuriev's logic Y_3 was constructed for modeling of neural networks. In this work it is shown that Y_3 does not contain Kleene's regular operations and it "essentially" non-monotonic.

В статье Д.Н.Юрьева [6] сконструирована трехзначная матричная логика Y_3 в сигнатуре (~, &, ∨, ∨∨), изначально предназначенная для моделирования нейронных сетей. Приведем табличное определение логических операций из этой работы в стандартных обозначениях:

p	$\sim p$
1	0
½	½
0	1

&	1	½	0
1	1	½	½
½	½	½	½
0	½	½	0

∨	1	½	0
1	1	1	½
½	1	½	0
0	½	0	0

∨∨	1	½	0
1	½	1	½
½	1	½	0
0	½	0	½

Для удобства операцию ∨∨ («сильная дизъюнкция») обозначим посредством •. В [6] показано, что любая из указанных бинарных операций выразима посредством остальных двух и отрицания. Например,

$$x \bullet y = (x \vee y) \vee \sim(x \,\&\, y).$$

Непосредственно из истинностных таблиц для приведенных операций следует:

1 Работа поддержана грантом РФФИ № 00-06-80037

1) Y_3 не имеет тавтологий при выделенном значении 1, поскольку $^1/_2$ является неподвижной точкой относительно всех исходных операций лоики Y_3;

2) Y_3 не является *нормальной* логикой в смысле Решера, т.е. ограничение ее операций на множестве булевых значений $\{0,1\}$ не совпадает с классическими логическими операциями. Например, $1 \oplus 0 = {}^1/_2$, где $\oplus$ стоит для &, $\vee$, и $\bullet$.

В [3] было сформулировано следующее утверждение (без доказательства):

Теорема 1. Посредством множества операций $\{\sim, \&, \vee\}$ логики Y_3 не выразимы операции $max(x, y)$ и $min(x, y)$.

Рассмотрим наборы значений <10> <01>. Покажем, что если суперпозиция операций $\sim$ и $\vee$ над набором <10> дает значение 1, то эта же суперпозиция над набором <01> дает 0, т.е. мы не сможем *одновременно* получить значение 1 *на этих наборах*, а значит $max(x, y)$, или значение 0, а значит $min(x, y)$.

$$\begin{array}{ccc} x & \vee & y \\ 1 & ^1/_2 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} x & \vee & y \\ 0 & ^1/_2 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \sim x & \vee & y \\ 0 & \mathbf{0} & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \sim x & \vee & y \\ 1 & \mathbf{1} & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} x & \vee & \sim y \\ 1 & \mathbf{1} & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} x & \vee & \sim y \\ 0 & \mathbf{0} & 0 \end{array}$$

Учитывая коммутативность и неассоциативность операции $\vee$, к этим трем различным формулам посредством суперпозиции можно «добавить» переменные x или y (отрицанием можно пренебречь, поскольку 1 меняется на 0 и наоборот):

$$\begin{array}{ccccc} x & \vee & (x & \vee & y) \\ 1 & \mathbf{1} & & ^1/_2 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} x & \vee & (x & \vee & y) \\ 0 & \mathbf{0} & & ^1/_2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} y & \vee & (x & \vee & y) \\ 0 & \mathbf{0} & & ^1/_2 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} y & \vee & (x & \vee & y) \\ 1 & \mathbf{1} & & ^1/_2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} x & \vee & (\sim x & \vee & y) \\ 1 & ^1/_2 & & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} x & \vee & (\sim x & \vee & y) \\ 0 & ^1/_2 & & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} y & \vee & (\sim x & \vee & y) \\ 0 & \mathbf{0} & & & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{llllll} y & \vee & (\sim x & \vee & y) \\ 1 & \mathbf{1} & & & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} x & \vee & (x & \vee & \sim y) \\ 1 & \mathbf{1} & & & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{llllll} x & \vee & (x & \vee & \sim y) \\ 0 & \mathbf{0} & & & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} y & \vee & (x & \vee & \sim y) \\ 0 & {}^1/_2 & & & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{llllll} y & \vee & (x & \vee & \sim y) \\ 1 & {}^1/_2 & & & 0 \end{array}$$

Поскольку все возможные случаи перечислены, то последующие добавления не дают ничего нового.

Операция & не меняет положения дел, поскольку сохраняет 0 и 1, когда 0 & 0 и 1 & 1, соответственно, а в остальных случаях дает $^1/_2$.

Следствие 1. Не существование нормальных бинарных операций в $\mathbf{Y}_3$ говорит о том, что $\mathbf{Y}_3$ не является *решеточной* (*квази-решеточной*, т.е. без законов поглощения) логикой.

Следствие 2. Логика $\mathbf{Y}_3$ не содержит регулярных операций Клини (см. [4, § 64]).

Регулярные операции задаются *регулярными таблицами* в следующем смысле: данный столбец (строка) содержит 1 в строке (столбце) для $^1/_2$ только при условии, что этот столбец (эта строка) состоит целиком из 1; аналогично для 0. Заметим, что необходимым условием быть регулярной операцией[2] является опять же свойство нормальности.

Обратим внимание, что решеточные (квази-решеточные) и регулярные операции являются *монотонными* операциями. Операция $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ называется *монотонной* относительно $\leq$, если для любых наборов значений α и β таких, что $\alpha \leq \beta$, имеет место соотношение

$$f(\alpha) \leq f(\beta).$$

Операции & и $\vee$ логики $\mathbf{Y}_3$ являются нерегулярными, но монотонными. Для того, чтобы операция $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ не была монотонной, необходимо и достаточно, чтобы существовала пара наборов α и β, причем $\alpha \leq \beta$, для которой

$$f(\alpha) > f(\beta).$$

---

[2] Впервые рассмотрение всех регулярных операций в трехзначной логике представлено в дипломной работе К.Лукьяновской [5].

Легко показать, что операция сильной дизъюнкции • не является монотонной, относительно упорядочивания $0 \leq {}^{1}/_{2} \leq 1$. Например, $(0, 0) \leq (0, {}^{1}/_{2})$, но $(0 \bullet 0) > (0 \bullet {}^{1}/_{2})$.

Рассмотрим трехзначный случай теоремы С.В.Яблонского [7, с. 83] о классе монотонных операций для логики $\mathbf{P_n}$ (функционально полная логика Поста [9]). Из нее следует, что весь класс монотонных операций в $\mathbf{P_3}$ порождается следующими операциями:

1) константы 0, ${}^{1}/_{2}$, 1;
2) $max(x, y)$ и $min(x, y)$;
3) унарные операции $M_{1/2}(x)$ и $M_1(x)$

x	$M_{1/2}(x)$	$M_1(x)$
1	1	1
½	1	0
0	0	0

Из констант в $\mathbf{Y_3}$ имеется только ${}^{1}/_{2}$, например, $x \bullet x = {}^{1}/_{2}$. Легко видеть, что унарные операции $M_{1/2}(x)$ и $M_1(x)$ не выразимы в $\mathbf{Y_3}$, в силу существования неподвижной точки (см. выше). Учитывая теорему 1 констатируем, что из семи указанных монотонных функций $\mathbf{Y_3}$ содержит только одну. Для примера, логика Бочвара $\mathbf{B_3}$ [1] содержит операции 0, 1, $M_{1/2}(x)$ и $M_1(x)$, а трехзначная логика Лукасевича $\mathbf{Ł_3}$ [8] содержит все, кроме ${}^{1}/_{2}$. О логиках Поста, Лукасевича и Бочвара см. также в [2].

Таким образом, в силу прикладного значения логики Юрьева $\mathbf{Y_3}$ можно сделать вывод, что работа биологического нейрона моделируется нерегулярными и «существенно» немонотонными логическими операциями.

Литература

1. *Бочвар Д.А.* Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления // Математический сборник. 1938. Т. 4, № 2. 1938. С. 287-308.
2. *Карпенко А.С. Многозначные логики* (монография). Логика и компьютер. Вып. 4. М.: Наука, 1997.
3. *Карпенко А.С.* Не истинностно-функциональная логика Клини с антибулевой операцией // Труды научно-исслед. семинара Логического центра Ин-та философии РАН. Вып. XV. М., 2001. С. 41-45.
4. *Клини С.К.* Введение в метаматематику. М, 1957.

5. *Лукьяновская К.* Регулярные логики Клини. Дипломная работа. Каф. логики филос. ф-та МГУ. М., 2003.
6. *Юрьев Д.Н.* Новая трехзначная логика // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Ин-та философии РАН. Вып. XV. М, 2001. С. 120-125.
7. *Яблонский С. В.* Функциональные построения в *k*-значной логике // Труды математического института им. В. А.Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5-142.
8. *Łukasiewicz J.* O logice trójwartosciowey. Ruch Filozoficzny. T. 5. S.170-171. (Англ. перевод: On three-valued logic. In: Łukasiewicz J. Selected Works. Warszawa: PWN, 1970. P. 87-88).
9. *Post E.L.* Introduction to a general theory of elementary propositions // *American Journal of Mathematics.* Vol. 43, N 3. 1921. P. 163-185. (Переиздано: van Heijenoort J. (ed.) *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Cambridge (Mass.): Harvard Univ. Press, 1967. P. 264-283).

И.А.Карпенко, В.М.Попов

Подструктурные логики, родственные логике И.Е.Орлова[1]

We construct substructural logics, which are sublogics of Orlov's system, based on different sequential formulizatons of classical propositional calculus. The implication-negation fragment of each of them is implication-negation fragment of Orlov's system.

Предлагаются различные секвенциальные формулировки классического пропозиционального исчисления, на основе которых конструируются подструктурные логики, являющиеся подлогиками логики И.Е.Орлова. При этом в качестве импликативно-негативного фрагмента каждая из этих подлогик логики И.Е.Орлова имеет импликативно-негативный фрагмент последней. Пусть L – обычным образом определяемый пропозициональный язык над алфавитом $<S,\wedge,\vee,\supset,\neg,\ ),(>$, где S есть множество $\{p_1,p_2,p_3\ldots\}$ всех пропозициональных переменных языка L, $\wedge,\vee,\supset$ – бинарные логические связки этого языка, а $\neg$ – унарная логическая связка этого языка,) и (– технические символы языка L. Термин "формула" будет употребляться только по отношению к формулам языка L. Принимаются обычные договоренности об опускании скобок. Далее A, B, и C – произвольные формулы, а Γ, Δ, Θ и Σ – произвольные конечные последовательности формул. Доказательства во всех определяемых здесь секвенциальных исчислениях строятся обычным для этого типа исчислений способом, а множество основных секвенций любого из этих исчислений есть множество всех секвенций вида A→A. При таких обстоятельствах каждое из этих исчислений полностью определяется множеством всех его правил вывода (фигур заключения). Множество всех правил вывода каждого из формулируемых здесь секвенциальных исчислений включается во множество всех следующих правил вывода: R1-R13, R14.1-R14.4, R15.1-R15.4.

$$\frac{A,A,\Gamma\to\Delta}{A,\Gamma\to\Delta}\ (R1) \qquad\qquad \frac{\Gamma\to\Delta,A,A}{\Gamma\to\Delta,A}\ (R2)$$

[1] Работа выполнена при поддержеке РГНФ, грант № 01-03-00403.

$$\frac{\Gamma,A,B,\Delta\to\Theta}{\Gamma,B,A,\Delta\to\Theta}\ \text{(R3)} \qquad \frac{\Gamma\to\Delta,A,B,\Theta}{\Gamma\to\Delta,B,A,\Theta}\ \text{(R4)}$$

$$\frac{\Gamma\to\Delta,A \quad B,\Sigma\to\Theta}{A\supset B,\Gamma,\Sigma\to\Delta,\Theta}\ \text{(R5)} \qquad \frac{A,\Gamma\to\Delta,B}{\Gamma\to\Delta,\ A\supset B}\ \text{(R6)}$$

$$\frac{A,B,\Gamma\to\Delta}{A\wedge B,\Gamma\to\Delta}\ \text{(R7)} \qquad \frac{\Gamma\to\Delta,A,B}{\Gamma\to\Delta,A\vee B}\ \text{(R8)}$$

$$\frac{\Gamma\to\Delta,A}{\neg A,\Gamma\to\Delta}\ \text{(R9)} \qquad \frac{A,\Gamma\to\Delta}{\Gamma\to\Delta,\neg A}\ \text{(R10)}$$

$$\frac{\Gamma\to\Delta,A \quad A,\Sigma\to\Theta}{\Gamma,\Sigma\to\Delta,\Theta}\ \text{(R11, назывемое правилом смешения)}$$

$$\frac{\Gamma\to\Delta}{A,\Gamma\to\Delta}\ \text{(R12, называемое правило добавления слева)}$$

$$\frac{\Gamma\to\Delta}{\Gamma\to\Delta,A}\ \text{(R13, называемое правилом добавления справа)}$$

$$\frac{\Gamma\to\Delta,A \quad \Sigma\to\Theta,B}{\Gamma,\Sigma\to\Delta,\Theta,A\wedge B}\ \text{(R14.1)} \qquad \frac{\Gamma\to\Delta,A \quad \Gamma\to\Delta,B}{\Gamma\to\Delta,A\wedge B}\ \text{(R14.2)}$$

$$\frac{\Gamma\to\Delta,A \quad \Gamma\to\Sigma,B}{\Gamma\to\Delta,\Sigma,A\wedge B}\ \text{(R14.3)} \qquad \frac{\Gamma\to\Delta,A \quad \Sigma\to\Delta,B}{\Gamma,\Sigma\to\Delta,A\wedge B}\ \text{(R14.4)}$$

$$\frac{A,\Gamma\to\Delta \quad B,\Sigma\to\Theta}{A\vee B,\Gamma,\Sigma\to\Delta,\Theta}\ \text{(R15.1)} \qquad \frac{A,\Gamma\to\Delta \quad B,\Gamma\to\Delta}{A\vee B,\Gamma\to\Delta}\ \text{(R15.2)}$$

$$\frac{A,\Gamma\rightarrow\Delta \quad B,\Gamma\rightarrow E}{A\vee B,\Gamma\rightarrow\Delta,\Sigma}\ (R15.3) \qquad \frac{A,\Gamma\rightarrow\Delta \quad B,\Sigma\rightarrow\Delta}{A\vee B,\Gamma,\Sigma\rightarrow\Delta}\ (R15.4)$$

Секвенциальное исчисление GCL(i,j) и секвенциальное исчисление GO(i,j), где $i,j\in\{1,2,3,4\}$, таковы, что множеству всех правил вывода исчисления GCL(i,j) принадлежат только правила R1-R13, R14.i и R15.j, а множеству всех правил вывода исчисления GO(i,j) принадлежат только правила R1-R11, R14.i и R15.j, т.е. множеству всех правил вывода исчисления GO(i,j) принадлежат все те и только те правила, каждое из которых является правилом вывода исчисления GCL(i,j) и отлично от структурных правил добавления R12 и R13. Множества всех доказуемых секвенций в ряде определенных выше секвенциальных исчислений равны.

Определим отображение φ множества {1,2,3,4} на {1,2,3,4} следующим образом: φ(1)=1, φ(2)=2, φ(3)=4, φ(4)=3.

Можно доказать (используя факт наличия правила сечения R11 в соответствующих секвенциальных исчислениях), что для всяких i и j из {1,2,3,4} верно следующее: множество всех секвенций, доказуемых в GO(i,j), равно множеству всех секвенций, доказуемых в GO(φ(i), φ(j)).

Доказаны следующие утверждения 1 и 2.

Утверждение 1. Для всяких $i,j\in\{1,2,3,4\}$ секвенциальное исчисление GCL(i,j) аксиоматизирует классическую пропозициональную логику: секвенция →A доказуема в GCL(i,j) т.т.т. формула A есть классическая тавтология.

Утверждение 2. Для всяких $i,j\in\{1,2,3,4\}$ секвенциальное исчисление GO(i,j) аксиоматизирует собственную подлогику классической пропозициональной логики: всякая секвенция →A доказуемая в GO(i,j) такова, что A есть классическая тавтология, но не всякая классическая тавтология A такова, что →A доказуема в GO(i,j).

Итак, для всяких $i,j\in\{1,2,3,4\}$ секвенциальное исчисление GO(i,j) получается из секвенциального исчисления GCL(i,j) только за счёт ограничения применения структурных правил – отбрасываются правила добавления R12-R13 (см. определение исчисления GO(i,j)), GCL(i,j) аксиоматизирует классическую пропозициональную логику (см. утверждение 1), GO(i,j) аксиоматизирует пропозициональную логику отличную от классической пропозициональной логики (см. утверждение 2). Поэтому для всяких $i,j \in \{1,2,3,4\}$ логика, которая аксиоматизируется исчислением GO(i,j) есть подструктурная логика в смысле, вероятно, близком к [5] и [6].

Доказаны следующие утверждения 3 и 4.

Утверждение 3. Для всяких $i,j \in \{1,2,3,4\}$ логика, аксиоматизируемая исчислением GO(i,j) является подлогикой логики, аксиоматизируемой исчислением GO(1,1).

Утверждение 4. Логика, аксиоматизируемая исчислением GO(1,1), равна множеству всех формул, доказуемых в исчислении совместимости предложений И.Е. Орлова.

Следствие утверждений 3 и 4. Для всяких $i,j \in \{1,2,3,4\}$ логика, аксиоматизируемая исчислением GO(i,j), включается во множество всех формул, доказуемых в исчислении совместимых предложений И.Е. Орлова, т.е. логика, аксиоматизируемая исчислением GO(i,j), является подлогикой логики И.Е.Орлова.

Доказана теорема об устранимости сечения для GO(1,1).

Следствием этой теоремы и утверждения 3 является следующее утверждение 5.

Утверждение 5. Для всяких $i,j \in \{1,2,3,4\}$ и всякой формулы A, не содержащей ни вхождений $\wedge$, ни вхождений $\vee$ верно следующее: $\to$A доказуема в GO(i,j) т.т.т. $\to$A доказуема в GO(1,1).

Следствие утверждения 5. Для всяких $i,j \in \{1,2,3,4\}$ импликативно-негативный фрагмент логики, аксиоматизируемой исчислением GO(i,j), равен импликативно-негативному фрагменту логики, аксиоматизируемой исчислением GO(1,1).

Следствие утверждения 4. Импликативно-негативный фрагмент логики, аксиоматизируемой исчислением GO(1,1) равен импликативно-негативному фрагменту логики И.Е. Орлова (т.е. логики, аксиоматизируемой исчислением совместимости предложений)[2].

Из вышеприведённых следствий из утверждений 5 и 4 следует, что для всяких $i,j \in \{1,2,3,4\}$ импликативно-негативный фрагмент логики, аксиоматизируемой исчислением GO(i,j), равен импликативно-негативному фрагменту логики И.Е. Орлова.

---

[2] Конечно, в предположении унификации символики.

Литература

1. *Орлов И.Е.* Исчисления совместимости предложений // Математический сборник. Т. 35, Вып. 3-4. М., 1998.
2. *Попов В.М.* О разрешимости релевантной логики RAO // Модальные и интенсиональные логики. М., 1998.
3. *Попов В.М.* О системе совместимости предложений И.Е. Орлова. Тбилиси, 1982.
4. *Попов В.М.* Система И.Е. Орлова и релевантная логика // Философские проблемы истории логики и методологии науки. М., 1986.
5. *Dosen, K., Schraeder-Heister P. (eds.)* Substructural logics. Oxford, 1993.
6. *Restall G.* Substructural logics. Stanford Encyclopedia of Philosophy. http://plato.stanford.edu/entries/logic-substructural/.

В.Е.Комендантский

Метод резолюций для смешанной логики Поста

In this paper we present a resolution method for many-valued mixed Post logic *PostL* introduced by Kosovsky and Tishkov. This logic is not widely known, so we give the definition of its sequent calculus and define a 2-valued interpretation of many-valued sequents of *PostL*. It is a logic based on linear inequalities, its predicates are finitely-valued and take values from fixed partitions of rational numbers, the set of truth values is linearly ordered. *PostL* naturally generalizes the class of logics that occur in real-world applications. Compared to related approaches, our resolution method leads in many cases to a reduction of the number of clauses that are generated. We prove soundness and completeness of resolution for *PostL*.

1. Введение

В этой статье мы исследуем многозначную смешанную логику Поста *PostL*, которая была введена в [1]. Смешанная логика Поста – это логика многосортного языка, её предикаты задаются выражениями вида $P^{a,b,c}$, где a,b,c – положительные целые числа. Мы снабжаем эту логику правилом резолюции, необходимым для автоматического доказательства теорем. Так как *PostL* является логикой конечнозначных предикатов на основе неравенств, метод резолюций для этой логики может быть применён также к вычислениям систем неравенств с переменными по рациональным числам, записанных на *PostL*. Логика *PostL* определяется в параграфе 2, где мы приводим её секвенциальное исчисление. Секвенциальное определение удобно с точки зрения представления множеств формул как конечных дизъюнкций для обработки их по правилу резолюции. Мы также определяем внутренний и внешний языки рассматриваемой логики.

В параграфе 3 мы даём функцию перевода δ, которая отображает многозначные формулы *PostL* в их интерпретации в 2-значных формулах классической первопорядковой логики. Эта функция устанавливает определимость *PostL* в классической первопорядковой логике (результат был доказан теоремой 8.3.2 в [1]). В параграфе 3 мы также даём доказательство непротиворечивости и полноты многозначной бинарной резолюции на неравенствах логики *PostL*.

Логика *PostL* обладает хорошими прикладными характеристиками. Исчисление *PostL* предназначено для работы одновременно с несколькими сложными системами аксиом. Предположим, что некто присваивает разные степени истинности предикатам, взятым из разных наук. Далее, учитывая введённое разделение предикатов на классы, соответствующие различным наукам, этот некто объединяет несколько теорий в рамках одной системы аксиом, и это при том, что некоторые из взятых аксиом могут противоречить друг другу в классическом смысле. Например, возьмём математику и историю. Утверждениям математики придадим максимальное положительное истинностное значение, а утверждениям истории – некоторое неотрицательное значение из множества истинностных значений. Используя этот метод, на формальном уровне мы можем различить факты из разных теорий и избавиться от противоречий внутри всей системы аксиом, в нашем случае состоящей из аксиом точной науки математики и гуманитарной науки истории. Для подобного представления знаний в системах теорий в последующем изложении мы будем использовать рациональные числа в качестве логических значений простых высказываний.

В литературе бытует подход к многозначной резолюции, который имеет много общего с подходом, представленным здесь и в статье [7]. Так, в [5] было введено понятие отмеченного дизъюнкта. Отмеченный дизъюнкт определяется как дизъюнкция многозначных литералов, помеченных непустыми множествами истинностных значений. Там же указывается, что отмеченные дизъюнкты не зависят от логики, из которой они произошли. По сути, отмеченные дизъюнкты не содержат ни одной многозначной связки и просто являются характерным языком для обозначения многозначных интерпретаций. Данный подход к многозначной резолюции был разработан в [3], [6] и [8]. Родственный ему подход на основе линейных неравенств (см. [1]), который мы используем в настоящей статье, близок к подходу отмеченных формул, за исключением той детали, что линейные неравенства естественнее формализуют линейные порядки на множествах истинностных значений.

2. Смешанная логика Поста

У логики *PostL* есть два уровня. На первом уровне рассматриваются формулы многозначной логики. Множество истинностных значений и интерпретация логических связок определяются во внутренней сигнатуре. Предметные переменные – многосортные. На втором уровне имеется единственный предикат сравнения значения внутренних формул с нулём. Внешний язык не содержит функциональных символов. Внешние предметные переменные – это внутренние предметные переменные. Итак, формулы этого уровня – это формулы двузначной логики.

Определение 1 (Внутренний синтаксис). *Внутренний язык* $\mathbf{L}^{i}$ содержит множество $\boldsymbol{L}^{i} = \{\pm k/c \mid a \leq k < b$, где a,b,c,k – положительные целые, $a<b$, $c>0\}$ логических констант для непустого множества $\boldsymbol{P}^{i}$ предикатных символов, помеченных положительными целыми числами a,b,c, множество $\boldsymbol{O}^{i}$ предметных переменных, множество $\boldsymbol{F}^{i}$ функциональных символов, множество логических связок $\boldsymbol{C}^{i} = \{\neg,\vee,\&,\supset,\equiv\}$ и множество кванторов $\boldsymbol{Q}^{i} = \{\forall,\exists\}$. *Внутренний терм* t состоит из функциональных символов из $\boldsymbol{F}^{i}$ и предметных переменных из $\boldsymbol{O}^{i}$. *Внутренний атом* $P^{a,b,c}(t_1,\ldots,t_n)$ содержит внутренние термы и предикатные символы из $\boldsymbol{P}^{i}$. *Внутренняя предикатная формула* либо является внутренним атомом, либо составлена из атомов и кванторов из $\boldsymbol{Q}^{i}$ и логических связок из $\boldsymbol{C}^{i}$.

Будем говорить, что формула A – это формула сорта a,b,c, если все её предикатные символы имеют вид $P^{a,b,c}$. Формула A построена над множеством сортов S, если сорта всех переменных в A находятся в S.

Определение 2 (Внешний синтаксис). *Внешний язык* $\mathbf{L}^{e}$ содержит $\boldsymbol{C}^{e} = \{\neg,\vee,\&,\supset,\equiv,?:\}$, где ? : – это трёхместная условная логическая связка “если-то-иначе”, $\boldsymbol{Q}^{e} = \{\forall,\exists\}$ и единственный предикатный символ $\leq$ сравнения с нулём. *Неравенство PostL* – это выражение вида $0 \leq A$, где A – внутренняя предикатная формула, или выражение A_1+A_2, где A_1 и A_2 – предикатные формулы. *Внешние предикатные формулы PostL* состоят из неравенств *PostL* со связками из $\boldsymbol{C}^{e}$ и кванторами из $\boldsymbol{Q}^{e}$.

Для формул вида $\neg(0 \leq A)$ мы будем использовать сжатую запись $(0 < \neg A)$. Итак, можно записывать формулы в общем случае как $(0 \prec A)$, где $\prec \in \{\leq,<\}$.

Определение 3 (Секвенция). *Секвенция PostL* – это выражение вида $\rightarrow\Delta$, где Δ – конечное множество внешних предикатных формул. *Интерпретация* секвенции $\to\Delta$ – это дизъюнкция предикатных формул в Δ. Интерпретация секвенции с пустым Δ ложна. Вместо того, чтобы говорить об истинности интерпретации секвенции, мы будем говорить об истинности секвенции самой по себе. Точнее, секвенция истинна, если её интерпретация истинна при всех приписываниях значений предметным переменным.

Определение 4. *Схемами аксиом* исчисления секвенций двузначной логики являются ($\to\Delta$ A $\neg$A), ($\to\Delta$ T) и ($\to\Delta$ $\neg\perp$), где T означает *истину*, а $\perp$ означает *ложь*.

Внешние правила вывода стандартны для безантецедентных секвенциальных исчислений.

Ниже сформулированы внутренние правила. Выражения в квадратных скобках могут быть одновременно опущены при чтении правил.

$$\frac{\to\Delta\ (0 \le A+B)}{\to\Delta\ (0 \le B+A)\}}\ (\le \mathrm{Split})$$

$$\frac{\to\Delta\ (0 \le A[+B])}{\to\Delta\ (0 \le \neg\neg A[+B])}\ (\le\neg\neg)$$

$$\frac{\to\Delta\ (0 \le A[+C]) \quad \to\Delta\ (0 \le B[+C])}{\to\Delta\ (0 \le (A\&\ B)[+C])}\ (\le\&)$$

$$\frac{\to\Delta\ (0 \le \neg A[+C])\ (0 \le \neg B[+C])}{\to\Delta\ (0 \le \neg(A\&\ B)[+C])}\ (\le\neg\&)$$

$$\frac{\to\Delta\ (0 \le A[+C])\ (0 \le B[+C])}{\to\Delta\ (0 \le (A\vee B)[+C])}\ (\le\vee)$$

$$\frac{\to\Delta\ (0 \le \neg A[+C])) \quad \to\Delta\ (0 \le \neg B[+C])}{\to\Delta\ (0 \le \neg(A\vee B)[+C])}\ (\le\vee)$$

$$\frac{\to\Delta\ (0 \le A(y \setminus x)[+B])}{\to\Delta\ (0 \le \forall x A[+B])}\ (\le\forall)$$

$$\frac{\to\Delta\ (0 \le \neg A(t \setminus x)[+B])\ (0 \le \neg\forall x A[+B])}{\to\Delta\ (0 \le \neg\forall x A[+B])}\ (\neg\forall)$$

$$\frac{\to\Delta\ (0 \le A(t \setminus x)[+B])\ (0 \le \exists x A[+B])}{\to\Delta\ (0 \le \exists x A[+B])}\ (\le\exists)$$

$$\frac{\to\Delta\ (0 \le \neg A(y \setminus x)[+B])}{\to\Delta\ (0 \le \neg\exists x A[+B])}\ (\neg\exists)$$

все правила сохраняют истинность, если $\le$ заменить на $<$. В кванторных правилах $A(t \setminus x)$ означает, что терм t подставляется в атомы A вместо переменной x; предметная переменная y и терм t свободны для подстановки в A вместо x, переменная x не входит свободно в заключение правила. Импликация $A \supset B$ задаётся как аббревиатура для $\neg A \vee B$. Переменная y не входит свободно в заключения правил $(\prec \exists)$ и $(\prec \neg\forall)$.

Вдобавок мы определяем правила для условного высказывания:

$$\frac{\begin{array}{l}\to\Delta(0 \le A[+E]^2)(0 \le [\neg]^1 C[+D]^3)\\ \to\Delta(0 < \neg(A[+\neg E]^2)(0 \le [\neg]^1 B[+D]^3)\end{array}}{\to\Delta\ (0 \le ([\neg]^1 A[+E]^2)\ ?\ B : C[+D]^3)}\ (\le\ ?:)$$

$$\frac{\begin{array}{l}\to\Delta\ (0 \le A[+E]^2)(0 < [\neg]^1\}C[+D]^3)\\ \to\Delta\ (0 < \neg A[+\neg E]^2)(0<[\neg]^1 B[+D]^3)\end{array}}{\to\Delta\ (0 < [\neg]^1 A[+E]^2)\ ?\ B : C[+D]^3)}\ (<\ ?:)$$

где выражения в квадратных скобках с одинаковым индексом могут быть одновременно опущены.

Условное высказывание позволяет нам ввести циклическое отрицание Поста в язык *PostL*. Для каждой внутренней формулы, которая принимает n различных значений из множества $\{a_1,\ldots,a_n\}$, где $a_1<\ldots<a_n$, мы определяем отрицание Поста $\neg_{Post} A$ как аббревиатуру для

$$(\neg A+a_1?a_n:(\neg A+a_2?a_1: \ \ldots \ (\neg A+a_{n-1}?a_{n-2}:a_{n-1}))).$$

3. Резолюция

Мы используем понятия метода резолюций из монографии Чена [2]. О резолюции в многозначных логиках писали Бааз и Фермюллер в [4].

Теперь определим функцию перевода δ. Перевод δ отображает секвенции и внешние предикатные формулы *PostL* в секвенции и формулы двузначной логики соответственно, т.е. δ приписывает интерпретации секвенциям *PostL*. Корректность 2-значной интерпретации δ, определённой Косовским и Тишковым в [1], основана на теореме 7.4.1 и лемме 8.3.2 из [1].

$\delta(A\&B)=_{def}\delta(A)\&\delta(B)$,
$\delta(A\vee B)=_{def}\delta(A)\vee\delta(B)$,
$\delta(\neg A)=_{def}\neg\delta(A)$,
$\delta(\forall xA)=_{def}\forall x\delta(A)$,
$\delta(\exists xA)=_{def}\exists x\delta(A)$,
$\delta(0\prec (A\&B)[+C])=_{def}\delta(0\prec A[+C])\&\ \delta(0\prec B[+C])$,
$\delta(0\prec (A\vee B)[+C])=_{def}\delta(0\prec A[+C])\vee\ \delta(0\prec B[+C])$,
$\delta(0\prec\neg(A\&B)[+C])=_{def}\delta(0\prec\neg A[+C])\vee\ \delta(0\prec\neg B[+C])$,
$\delta(0\prec\neg(A\vee B)[+C])=_{def}\delta(0\prec\neg A[+C])\&\ \delta(0\prec\neg B[+C])$,
$\delta(0\prec (A?B:C)[+D])=_{def}\delta(0\prec (\neg A\vee B)[+D])\&\ \delta((A\vee C)[+D])$,
$\delta(0\prec\neg(A?B:C)[+D])=_{def}\delta(0\prec (\neg A\vee\neg B)[+D])\ \&\ \delta((A\vee\neg C)[+D])$,
$\delta(0\prec\forall xA[+C])=_{def}\forall y\delta(0\prec A(y\setminus x)[+C])$,
$\delta(0\prec \neg\forall xA[+C])=_{def}\exists y\delta(0\prec\neg A(y\setminus x)[+C])$,
$\delta(0\prec\exists xA[+C])=_{def}\exists y\delta(0\prec A(y\setminus x)[+C])$,
$\delta(0\prec \neg\exists xA[+C])=_{def}\forall y\delta(0\prec\neg A(y\setminus x)[+C])$,

где в последних четырёх строчках y не входит ни в A, ни в C.

$\delta(0\prec P+C)=_{def}\delta(0\prec C+P)$,

где P – это атом, возможно с отрицаниями.

С использованием правил перевода δ можно по каждой *PostL*-формуле построить сколемизированную КНФ $(L_{1,1}\vee\ldots\vee L_{1,n1}\&\ldots\&(L_{m,1}\vee\ldots\vee L_{m,nm})$, где каждая из $L_{i,j}$ $(1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n_i)$ –

это литерал вида $\delta(0\prec A[+B])$, A и B – это атомы, возможно с отрицаниями. Формула $\delta(0\prec A[+B])$ 2-значна, она истинна в том и только том случае, когда неравенство $(0\prec A[+B])$ истинно. Опишем метод построения таких формул $\delta(0\prec A[+B])$. Любое неравенство с кванторами, перемещёнными на внешний уровень, и содержащее лишь внутренние атомы, заменяется эквивалентной формулой с конечным множеством попарно различных 2-значных атомов. Для каждого данного атома сорта a,b,c будет достаточно b–a попарно различных 2-значных атомов, каждому из которых приписано значение из множества $\{-1/c, 1/c\}$. Затем рациональные значения складываются. Чтобы доказать последующие результаты, достаточно использовать 2-значные атомы со значениями из множества $\{-1,1\}$, вместо $\{-1/c,1/c\}$, потому что линейную комбинацию атомов можно перемножить на любое целое. И так как все сорта конечны, можно построить классическую КНФ по любой данной *PostL*-формуле. Когда классическая КНФ наконец построена, она должна быть сколемизирована с помощью удаления кванторов с внешнего уровня.

Благодаря тому, что для любой *PostL*-формулы можно построить сколемизированную классическую КНФ (будем называть её множеством дизъюнктов *PostL*), мы получаем схему правила резолюции. Здесь мы предполагаем, что любой 2-значный литерал $(0\prec A[+B])$, возможно с отрицанием, входящий в дизъюнкт *PostL*, является сколемизированной формулой, получающейся с помощью конечного числа применений δ к некоторой *PostL*-формуле, A и B – это атомы, с отрицаниями или без.

Определение 5 (Резолюция). Пусть Δ_1 и Δ_2 – множества дизъюнктов со сколемизированными литералами вида $(0\prec A[+B])$, тогда *бинарная резолюция* – это правило

$$\frac{\Delta_1\cup\{(0\prec A_1[+B])\} \quad \Delta_2\cup\{(0\prec\neg A_2[+C])\}}{(\Delta_1\cup\Delta_2\cup\{(0\prec B+C)\})\sigma},$$

где знак $\prec$ в заключении обозначает $\leq$ тогда и только тогда, когда $\prec$ – это $\leq$ в обеих посылках, в противном случае $\prec$ обозначает $<$; σ – это наиболее общий унификатор формул A_1 и A_2. B и C – это атомы, возможно пустые; в частности, если оба атома B и C пусты, мы получаем дизъюнкт $(0\prec\varnothing)$.

Вместе с бинарной резолюцией мы допускаем использование правила ($\prec$ Split), что позволяет перегруппировывать внутренние формулы в посылках. Внешние формулы в дизъюнктах могут быть произвольно расставлены, так как мы рассматриваем лишь неупорядоченную резолюцию. Кроме того допускается использование *правила противоречия*:

$$\frac{\Delta \cup (0<A+\neg A)}{\Delta \cup (0<\varnothing)}$$

Лемма 1 (Основные дизъюнкты). Пусть Ф – произвольное множество основных дизъюнктов *PostL*. Если Ф невыполнимо, то пустой дизъюнкт $(0\prec \varnothing)$ выводим из Ф конечным числом применений правила бинарной резолюции.

Доказательство. Случай $(0\prec \varnothing)\in\Phi$ тривиален. Поэтому предположим, что $(0\prec \varnothing)\notin\Phi$. Так как все дизъюнкты в Ф – основные, эрбранов базис Ф совпадает со множеством всех литералов Ф. Лемма будет доказана индукцией по разнице diff(Ф) между общим числом литералов в Ф и общим числом дизъюнктов в Ф. Возможно два случая:

1) diff(Ф)=0. В этом случае число литералов совпадает с числом дизъюнктов. Так как $(0\prec \varnothing)\notin\Phi$, Ф состоит только из одних единичных дизъюнктов. Построим последовательность множеств $\Phi_0\subseteq\Phi_1\subseteq\ldots\subseteq\Phi_n$ таких, что $\Phi_0 = \Phi$, и для каждого $i \geq 0$ Φ_i содержит Φ_{i-1}, а также все непосредственные следствия из Φ_{i-1} по правилу резолюции, кроме того Φ_i замкнуто относительно правила ($\prec$ Split) и правила противоречия. Продемонстрируем, что любое невыполнимое множество дизъюнктов может быть насыщенно указанной процедурой до множества, содержащего пустой дизъюнкт. Любое противоречивое множество дизъюнктов содержит подмножество $\Lambda=\{(0\prec A[+B]), (0\prec \neg A[+\neg B])\}$, где $\prec$ есть $<$ по крайней мере в одном из дизъюнктов множества Λ . Пусть Λ получено на i-ом шаге насыщения ($0<i<n$), тогда $(0\prec \varnothing)$ получается самое большее на шаге i+2. Действительно, $\Lambda\subseteq\Phi_i$, $\{(0<A+\neg A), (0<B+\neg B)\}\subseteq\Phi_{i+1}$, следовательно $\{(0<\varnothing)\}\subseteq\Phi_{i+2}$.

2) diff(Ф)>0. Ф содержит неединичные дизъюнкты. Будем насыщать множество $\Phi_0=\Phi$, применяя правило резолюции к отдельным литералам пар дизъюнктов как в случае diff(Ф)=0, индукцией по числу литералов в этих дизъюнктах. После каждого i-го насыщения образуется множество $\Phi_i\supseteq\Phi_{i-1}$, содержащее дизъюнкции всех непосредственных резольвент, полученных индуктивной процедурой, и замкнутое относительно ($\prec$ Split) и правила противоречия. Так как Ф невыполнимо, а при насыщении

мы получаем все возможные резольвенты Ф, то некоторое $Ф_i$, при $i \geq 0$, будет содержать пару дизъюнктов, состоящих из одних и тех же литералов, но с противоположными знаками. Следовательно, $Ф_{i+2}$ будет содержать резольвенту этой пары – $(0 \prec \varnothing)$. Лемма доказана.

Доказательство леммы 1 для случая отмеченных многозначных дизьюнктов см. [8], где рассмотрена многозначная отрицательная гипррезолюция.

Лемма 2 (Лемма подъёма). Если Δ_1' и Δ_2' – это подстановочные случаи дизъюнктов Δ_1 и Δ_2 соответственно, и если Δ' – это резольвента Δ_1' и Δ_2', тогда существует резольвента Δ дизъюнктов Δ_1 и Δ_2, такая что Δ' есть подстановочный случай Δ.

Доказательство. Эта лемма доказывается как классическая лемма подъёма (см. [2]), при этом в доказательстве учитывается структура многозначной резольвенты, т.е. в качестве дизъюнктов Δ_1 и Δ_2 берутся формулы логики Поста вида $(0 \prec A[+B])$ и $(0 \prec C[+D])$ соответственно.

Теорема 1 (Полнота и непротиворечивость). Множество Ф дизъюнктов *PostL* невыполнимо, если и только если пустой дизъюнкт $(0 \prec \varnothing)$ выводим из Ф конечным числом применений правила бинарной резолюции.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Следует из лемм 1 и 2 в точности так же, как и в случае классической логики. Так как Ф невыполнимо, то по теореме Эрбрана (см. [2]) существует конечное невыполнимое подмножество Ф' основных дизъюнктов из Ф. По лемме 1 существует доказательство D' дизъюнкта $(0 \prec \varnothing)$ из Ф'. Доказательство D' может быть преобразовано по лемме 2 в доказательство D дизъюнкта $(0 \prec \varnothing)$ из Ф.
($\Leftarrow$) Следует из того, что эрбранова интерпретация, которая выполняет множество дизъюнктов, также выполняет и все их резольвенты. Но ни одна эрбранова интерпретация не выполняет пустой дизъюнкт. Теорема доказана.

Как следствие теоремы 1, теорем 8.3.1 и 6.1.2 из [1] (последняя из них устанавливает принадлежность проблемы выполнимости системы линейных неравенств с переменными по рациональным числам классу проблем, разрешимых на детерминированной машине Тьюринга полиномиальными по времени алгоритмами) мы получаем результат:

Теорема 2. Проблема невыполнимости произвольного множества дизъюнктов *PostL* полна в классе проблем, разрешимых на детерминированной машине Тьюринга полиномиальными по времени алгоритмами.

Заключение

В этой статье мы рассмотрели только одну логику из [1]. Но принцип резолюции, введённый здесь может быть применён с небольшими изменениями ко всему классу логик конечнозначных предикатов основанных на неравенствах, таких как плюралистическая логика n-местных кортежей и смешанная логика Лукасевича. Судя по всем внешним признакам, линейно упорядоченные множества истинностных значений обрабатываются очень эффективно нашей резолюцией, вдобавок появляется возможность сконструировать систему автоматического вывода для гипертеорий, состоящих из многочисленных разнообразных теорий и защищённых от противоречивых высказываний.

Дальнейшие исследования должны показать, насколько многозначная резолюция на неравенствах отличается от отмеченной многозначной резолюции авторов статей [4], [5] и [8]. Сложность резолюции с учётом метода вычисления конъюнктивной нормальной формы должна быть точно определена. Одной из важных проблем, подлежащих изучению, является проблема представления циклического отрицания Поста в *PostL*. В настоящей статье оно представлено условным оператором "если-то-иначе", но в этом случае представление отрицания Поста может стать трудоёмкой процедурой. Поэтому необходима естественная формализация отрицания Поста с учётом многосортной природы логики *PostL*.

Литература

1. *Косовский Н.К., Тишков А.В.* Логики конечнозначных предикатов на основе неравенств. СПб.: СПбГУ, 2000.
2. *Чень Ч., Ли Р.* Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. М., 1983.
3. *Aguzzioli S., Ciabattoni A.* Finiteness in infinite-valued logic // Journal of Logic, Language and Information, 9(1). 2000. P. 5–29.
4. *Baaz M., Fermuller C.G.* Resolution based theorem proving for many-valued logics // Journal of Symbolic Computation, 19(4). 1995. P. 353–391.
5. *Hahnle R.* Automated theorem proving in multiple-valued logics. International Series of Monographs on Computer Science, Oxford University Press, 1993.

6. *Hahnle R.*, Commodious axiomatization of quantifiers in multiple-valued logic // Proc. 26th International Symposium on Multiple-Valued Logics, Los Alamitos, IEEE Press. 1996. P. 118–123.
7. *Komendantsky V.*, Resolution for mixed Post logic // Proc. 4th ESSLLI Student Session, University of Trento, 2002.
8. *Sofronie-Stokkermans V.* Automated Theorem Proving by Resolution for Finitely-Valued Logics Based on Distributive Lattices with Operators // Multiple-Valued Logic, 2001 (в печати), http://www.mpi-sb.mpg.de /~sofronie/papers/resolution priestley.ps.gz.

Е.Е.Ледников

О семантике «явного» и «неявного» знания[1]

The author proposes to use notions of «explicit» and «implicit» knowledge in epistemic logic and considers some peculiarities of semantics for such notions in this paper.

При построении модальной эпистемической логики приходится считаться с так называемыми парадоксами логического всеведения. Если в качестве субъекта знания рассматривать не идеального субъекта, для которого не существует границ осведомленности и дедуктивных возможностей, а некоторого реального человека, то и его знания, и дедуктивные способности следует ограничить. В первую очередь его следует лишить следующих проявлений логического всеведения:

1)из того факта, что субъект знает, что A, и знает, что $A \supset B$, следует, что он знает B (своеобразный аналог *modus ponens*);

2)из того факта, что субъект знает, что A, и $A \supset B$ – тавтология, следует, что он знает B;

3)субъект знает все тавтологии и общезначимые формулы.

Существуют различные способы борьбы с парадоксами всеведения [2, 3], но те системы, которые предлагались в указанных работах, нам представляются весьма слабыми и дедуктивно неинтересными. Взглянем на обсуждаемую проблему внимательнее и зададимся вопросом – всегда ли неприемлемо логическое всеведение субъекта знания? Мы предлагаем различать два вида эпистемических контекстов. В первом случае, говоря, например, о знании субъектом геометрии Эвклида, мы не подразумеваем знания им всех следствий (теорем) этой геометрии. Здесь речь идет о *явном* знании, и отказ от логического всеведения вполне уместен. Но в языке встречаются и такие контексты знания, в которых знание субъектом той же геометрии Эвклида подразумевает способность решить любые геометрические задачи данной геометрии, если в этом возникнет потребность. Здесь уже речь идет о *неявном* знании, при подходящем уточнении которого

[1] Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 02-03-18290

логическое всеведение может оказаться вполне допустимым. Поэтому заслуживает внимания построение такой эпистемической логики, в которой использовались бы модальные операторы явного и неявного знания.

Обозначим явное знание субъекта α как (E_α), а неявное – как (I_α). Естественно предположить, что произвольный субъект знания неявно знает все логические следствия своих явных знаний и что он имеет знание о чем-либо явно или неявно, но не бывает явных неявных знаний, неявных явных и т.п. Поэтому в предлагаемой эпистемической логике операторы явного и неявного знания не встречаются в области действия друг друга. Итак, если A – формула классической логики, то $(E_\alpha)A$ и $(I_\alpha)A$ – тоже формулы. Формулами являются все выражения вида $(E_\alpha)\ldots(E_\alpha)A$ и вида $(I_\alpha)\ldots(I_\alpha)A$, но выражения вида $(E_\alpha)(I_\alpha)A$ и вида $(I_\alpha)(E_\alpha)A$ не являются формулами.

Перейдем к семантике явного и неявного знания. Моделью предлагаемой логики будет $M = (W, W_\alpha, T, F)$. Здесь W – множество эпистемически возможных миров (различных вариантов запасов знаний произвольного субъекта), W_α - подмножество W (эпистемические альтернативы реальным знаниям субъекта α), T, F – функции, отображающие множество элементарных высказываний p_i в подмножества из W. Интуитивно, $T(p_i)$ – множество «эпистемических миров», в которые входит p_i, а $F(p_i)$ – тех «миров», в которые входит отрицание p_i, т.е. $(\sim p_i)$.

Множество W состоит из: 1) полных «миров» w', членами которых является каждое p_i или его отрицание, но не то и другое вместе; 2) неполных «миров», в которые не входят ни некоторые p_i, ни их отрицания; 3) «внутренне несогласованных миров», в которые входят как некоторые p_i, так и их отрицания $(\sim p_i)$. Подобные «миры» похожи на противоречивые описания состояния, рассматривавшиеся в [1], их допущение связано со склонностью субъекта знания к противоречивым утверждениям (или с некритическим к ним отношением), которую априорно нельзя сбрасывать со счетов. Произвольный «мир» w совместим с полным «миром» w', если w и w' совпадают в тех элементарных высказываниях, из которых образован w. Так что если $p_i \in w$, то $p_i \in w'$, если $(\sim p_i) \in w$, то $(\sim p) \in w'$ для каждого p_i из w.

Пусть W_α* – множество всех полных «эпистемических миров», совместимых с некоторым «миром» w из W_α. Определим теперь отношение выполнимости формул на «мирах». Интуитивно $M,w|=A$ означает, что формула A истинна (выполнима) в «мире» w модели M, а $M,w\sim|=A$ – что формула A ложна (не выполнима) в «мире» w модели M.

Отношение выполнимости определяется следующим образом:

1)для элементарного высказывания p_i: $M,w|=p_i$, если $w\in T(p_i)$; $M,w\sim|=p_i$, если $w\in F(p_i)$;

2)для отрицания произвольной формулы A: $M,w|=\sim A$, если $M,w\sim|=A$; $M,w\sim|=\sim A$, если $M,w|=A$.

3)Для импликации $A_1\supset A_2$: $M,w|=A_1\supset A_2$, если $M,w\sim|=A_1$ или $M,w|=A_2$; $M,w\sim|=A_1\supset A_2$, если $M,w|=A_1$ и $M,w\sim|=A_2$.

4)для явного знания E_α: $M,w|=(E_\alpha)A$, если $M,w_i|=A$ для всех $w_i\in W_\alpha$, иначе $M,w\sim|=(E_\alpha)A$.

5)для неявного знания I_α: $M,w|=(I_\alpha)A$, если $M,w'|=A$ для всех $w'\in W_\alpha$*, иначе $M,w\sim|=(I_\alpha)A$.

Формула A общезначима ($|=A$), если A истинна во всех полных «мирах» $w'\in W_\alpha$* во всех моделях $M=(W, W_\alpha, T, F)$.

Теперь нетрудно убедиться, что в предлагаемой семантике перечисленные выше случаи логического всеведения будут иметь место только в отношении неявного знания. Так, если $|=A$, например, A – пропозициональная тавтология, то $|=(I_\alpha)A$ (субъект неявно знает законы логики). Если $|=(I_\alpha)A$ и $|=(I_\alpha)A\supset B$, то $|=(I_\alpha)B$ (субъект неявно знает все следствия как явных, так и неявных знаний). Если $|=(I_\alpha)A$ и $|=A\supset B$, то $|=(I_\alpha)B$ (субъект неявно знает логические следствия из законов логики).Но сказанное не имеет места для явного знания, поскольку в предлагаемой семантике является выполнимой формула $(E_\alpha)A\&(E_\alpha)(A\supset B)\&\sim(E_\alpha)B$ (хотя во всех «мирах» $w_i\in W$ некоторой модели M имеет место $M,w_i|=(E_\alpha)A$ и $M,w_i|=(E_\alpha)(A\supset B)$, в некоторых $w_j\subseteq w_i$ имеет место также $M,w_j\sim|=(E_\alpha)B$), а также формулы $(E_\alpha)A\ \&\ \sim(E_\alpha)[A\ \&\ (B\vee\sim B]$, $(E_\alpha)A\ \&\ (E_\alpha)\sim A$, $(E_\alpha)(A\ \&\ \sim A)$ (некоторые модели M состоят, кроме «реального», исключительно из «внутренне несогласованных миров»). В то же время в соответствии с введенным пониманием явного и неявного знания имеет место $|=(E_\alpha)A\supset(I_\alpha)A$, но обратная импликация не общезначима.

Каковы интуитивные основания предлагаемой семантики? Уместно допустить, что реальный субъект обладает такими явными знаниями, в которых имеются пробелы и внутренняя несогласованность, хотя он не осознает далеко идущих следствий указанных недостатков. Но по мере того, как неявное становится для субъекта явным, его запасы знаний увеличиваются, субъект освобождается от пробелов в них и внутренней несогласованности, число возможных эпистемических альтернатив сужается, и в предельном случае, когда все неявные знания становятся явными, среди эпистемических альтернатив знаниям субъекта остаются только полные «эпистемические миры».

Литература

1. *Войшвилло Е.К.* Логическое следование и семантика обобщенных описаний состояний // Модальные и интенсиональные логики и их применение к проблемам методологии науки. М., 1984. С. 183 - 191.
2. *Герасимова И.А.* Окрестностные семантики для эпистемических логик // Модальные и интенсиональные логики и их применение к проблемам методологии науки. М., 1984. С. 207 – 219.
3. *Хинтикка Я.* Логико-эпистемические исследования. М., 1980. С. 228 – 242.

С.А.Павлов

Секвенциальная формулировка логики с операторами истинности и ложности[1]

In this paper the classical logic with truth and falsehood operators in sequent form is formulated. The generalization of this logic on the domain of symbolic expressions is realized.

В статье предложена секвенциальная формулировка классической логики с операторами истинности и ложности **GFL2**. Далее проведено обобщение этой логики на область недвузначных предложений и символьных выражений.

Мотивом к такому построению является необходимость явного различения закона исключенного третьего и принципа двузначности. Критика этих законов являлась одной из предпосылок построения неклассических логик. Имеется несколько формулировок закона исключенного третьего и принципа двузначности, эквивалентных между собой в рамках классической логики, и различающихся по силе для неклассических логик.

Так, Я.Лукасевич различал закон исключенного третьего и «принцип, что *каждое высказывание либо истинно, либо ложно*». Последний он называл «*принципом двузначности*» [3]. Принцип двузначности (бивалентности) символически записывается в языке логики с операторами истинности и ложности как $(|A \veebar -A)$, где $\veebar$ символ исключающей дизъюнкции, $-$, $|$ символы операторов ложности и истинности.

Также А.Тарский отмечал [7], что семантический закон исключенного третьего не следует отождествлять с законом исключенного третьего, не включающим в себя термина «истинно». Последний в языке CL формулируется как $(A \vee \sim A)$.

Представляет интерес сформулировать логику, в языке которой можно выражать как законы исключенного третьего и противоречия в несемантической формулировке, так и семантические их формулировки. Также для изучения структурных свойств этой логики полезно дать ее секвенциальную формулировку.

Для одновременной формулировки всех этих законов, как в семантической, так и в несемантической формулировках, и для

---

[1] Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 01-03-00403.

их совместного рассмотрения необходимо в объектный язык логики ввести символы, соответствующие семантическим терминам «истинно» и «ложно».

Введение таких терминов в качестве логических операторов было осуществлено для случая неклассической логики в работах автора [4, 5]. Основные содержательные положения логики с операторами истинности и ложности приведены там же.

Секвенциальная формулировка классической логики с операторами истинности и ложности

Язык исчисления GFL2

Алфавит: $p, p_1, p_2, \ldots$ пропозициональные переменные;
$-$, Imp логические константы[2];
$\&, \vee$ логические константы;
(,) технические символы.

Оператор ложности обозначен символом $-$, а исходная импликация обозначена латинскими буквами Imp.

Правила образования ппф

(i) Всякая пропозициальная переменная есть правильно построенная формула (ппф).

(ii) Если A , B есть ппф, то $(-A)$, $(A \text{ Imp } B)$, $(A \& B)$, $(A \vee B)$, есть ппф.

(iii) Все иные формулы являются неправильно построенными формулами (нпф).

Введем следующие **сокращения** для формул.

D1.1 $0 =_{df} -(-s \rightarrow -s)$ (константа «ложь»)

D1.2 $\sim A =_{df} (A \rightarrow 0)$ (отрицание)

D1.3 $|A =_{df} -\sim A$ ('|' содержательно означает «истинно»).

Высказывание об истинности предложения A рассматривается как сокращение для высказывания о ложности отрицания предложения A.

Для высказывания о строгой истинности предложения A:

'$\ulcorner$' содержательно означает «есть истинно и неложно».

D1.4 $\ulcorner A =_{df} -(|A \rightarrow -A)$

Определим импликацию $\supset$, которую назовем D-импликацией, так как именно она фигурирует в правиле дедукции.

D1.5 $(A \supset B) =_{df} (\ulcorner A \rightarrow \ulcorner B)$

---

[2] Исходная импликация исчисления **FL4** в [4] обозначается как $\rightarrow$.

Из всего класса ппф выделим подкласс формул, которые образованы из префиксированных операторами истинности или ложности формул (называемыми в дальнейшем T.F.-формулами (T.F.-ф.)).

(iv) Если A есть ппф, то (–A) есть T.F.-ф.

(v) Если P_1, P_2 есть T.F.-ф., то (P_1 Imp P_2), (P_1 & P_2), ($P_1 \vee P_2$), есть T.F.-ф.

Секвенциальное исчисление **GFL2** является секвенциальным исчислением генценовского типа [2]. Буквы A и B используются как переменные по ппф, буквы P и Q используются как переменные по T.F.-формулам, а буквы Γ, Δ, Σ, Θ – как переменные по конечным последовательностям ппф (пустая последовательность формул является конечной последовательностью формул). Множество всех основных секвенций исчисления **GFL2** есть множество всех секвенций вида $A \to A$. Множеству всех правил этого исчисления принадлежат все следующие правила R1 – R25 и только они.

ДЛ: $\dfrac{\Gamma \to \Theta}{A, \Gamma \to \Theta}$, ДП: $\dfrac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, A}$,

СЛ: $\dfrac{A, A, \Gamma \to \Theta}{A, \Gamma \to \Theta}$, СП: $\dfrac{\Gamma \to \Delta, A, A}{\Gamma \to \Delta, A}$,

ПЛ: $\dfrac{\Gamma, A, B, \Lambda \to \Theta}{\Gamma, B, A, \Lambda \to \Theta}$, ПП: $\dfrac{\Gamma \to \Lambda, A, B, \Theta}{\Gamma \to \Lambda, B, A, \Theta}$,

ПС: $\dfrac{\Gamma \to \Delta, A \qquad A, \Sigma \to \Theta}{\Gamma, \Sigma \to \Delta, \Theta}$

R8: $\dfrac{A, \Gamma \to \Theta}{A \,\&\, B, \Gamma \to \Theta}$, R9: $\dfrac{A, \Gamma \to \Theta}{B \,\&\, A, \Gamma \to \Theta}$, R10: $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A \qquad \Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, A \,\&\, B}$,

R11: $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A}{\Gamma \to \Theta, A \vee B}$, R12: $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A}{\Gamma \to \Theta, B \vee A}$, R13: $\dfrac{A, \Gamma \to \Theta \qquad B, \Gamma \to \Theta}{A \vee B, \Gamma \to \Theta}$,

$$\text{R14: } \frac{P, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, -P} \qquad \text{R15: } \frac{\Gamma \to \Theta, P}{-P, \Gamma \to \Theta},$$

$$\text{R16: } \frac{\Gamma \to \Theta, P}{\Gamma \to \Theta, |P} \qquad \text{R17: } \frac{P, \Gamma \to \Theta}{|P, \Gamma \to \Theta}$$

$$\text{R18: } \frac{A, \Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, A \supset B}, \qquad \text{R19: } \frac{\Gamma \to \Delta, A \qquad B, \Sigma \to \Theta}{A \supset B, \Gamma, \Sigma \to \Delta, \Theta},$$

Отметим, что данное исчисление с операторами истинности и ложности может рассматриваться как двухуровневое. В ее формулировке используются метапеременные A, B для формул (первый уровень) и P, P_1 для T.F.-формул (второй уровень). Для T.F.-формул имеет место классическая логика.

К обычным правилам для классических связок (для T.F.-формул, обращаем внимание на R14- R17) добавляем следующие логические фигуры заключения:

$$\text{R20: } \frac{\Gamma \to \Delta, -A, |B}{\Gamma \to \Delta, |(A \text{ Imp } B)} \qquad \text{R21: } \frac{-A, \ \Gamma \to \Delta \qquad |B, \Gamma \to \Delta}{|(A \text{ Imp } B), \Gamma \to \Delta}$$

$$\text{R22: } \frac{\Gamma \to \Delta, |A, \qquad \Gamma \to \Delta, -B}{\Gamma \to \Delta, -(A \text{ Imp } B)} \qquad \text{R23: } \frac{|A, -B, \Gamma \to \Delta}{-(A \text{ Imp } B), \Gamma \to \Delta}$$

$$\text{R24: } \frac{\Gamma \to \Delta, --A}{\Gamma \to \Delta, |A} \qquad \text{R25: } \frac{--A, \Gamma \to \Delta}{|A, \Gamma \to \Delta}$$

2. Расширение секвенциального исчисления на область символьных выражений

Обычно неправильно построенные формулы в логике не рассматриваются. Относительно них можно утверждать, что они бессмысленны, то есть ни истинны, ни ложны. В стандартном языке пропозициональной логики невыразим тот факт, что они ни истинны и ни ложны. Однако в предложенном выше языке утверждения о неистинности и неложности формул, являющихся неправильно построенными (сокращенно нпф), можно выразить следующим образом:

(–| Nonsense & – – Nonsense),

где словом «Nonsense» обозначена некоторая нпф.

Можно ввести новую метапеременную N, соответствующую неправильно построенным формулам, и сформулировать дополнительную аксиому для нпф, которая будет аналогична вышеприведенному положению. При этом ни одно из ранее принятых правил (фигур заключения) не изменится.

Более интересно ввести новую метапеременную для любых формул, как правильно, так и неправильно построенных, то есть для ппф и нпф одновременно. При этом правило (iv) обобщаем до правила (iv)* следующим образом.

(iv)* Если A есть формула, то (–A) есть T.F.-ф.

В этом случае, обобщая имеющиеся правила R1-R25 на новую область, необходимо будет отбросить только правило R24, соответствующее принципу двузначности в слабой форме, то есть (|A ∨ –A).

Полученное секвенциальное исчисление **GFL3N** будет секвенциальным исчислением генценовского типа. Буквы A и B будем использовать как переменные по формулам (то есть по правильно и неправильно построенным формулам), буквы P и Q используются как переменные по T.F.-формулам, а буквы Γ, Δ, Σ, Θ – как переменные по конечным последовательностям формул. Множество всех основных секвенций исчисления **GFL3N** есть множество всех секвенций вида A → A. Множеству всех правил этого исчисления принадлежат все следующие правила R1 – R23, R25 и только они.

Интересно, что данное исчисление эквивалентно трехзначной логике Лукасевича. Может это и не так удивительно, учитывая, что при построении этого исчисления ослаблялся именно принцип двузначности, являвшийся для Лукасевича отправной точкой в построении им трехзначной логики.

Следующий шаг состоит в том, чтобы кроме бессмысленных выражений, допустить к рассмотрению противоречивые предложения. Тогда получим исчисление **GFL4**, отличающееся от **GFL2** и **GFL3N**. Имеем ряд небольших отличий, состоящих в следующем.

1. К множеству пропозициональных переменных добавляем множество сентенциальных переменных.

2. Правило (i) обобщаем до правила (i)* следующим образом.

(i)* Всякая пропозициональная или сентенциальная переменная есть правильно построенная формула (ппф).

3. Вводим определение символьного выражения и обобщаем правило (iv) до правила (iv)**.

Символьное выражение есть конечная последовательность символов из алфавита[3].

(iv)** Если A есть символьное выражение то (–A) есть T.F.-ф.

4. Обобщая имеющиеся правила R1-R25 на универсум символьных выражений, отбросываются правила R24 и R25.

Полученное секвенциальное исчисление **GFL4** является секвенциальным исчислением генценовского типа. Буквы A и B будем использовать как переменные по символьным выражениям, буквы P и Q используются как переменные по T.F.-формулам, а буквы Γ, Δ, Σ, Θ – как переменные по конечным последовательностям символьных выражений. Множество всех основных секвенций исчисления **GFL4** есть множество всех секвенций вида A → A. Множеству всех правил этого исчисления принадлежат правила R1 – R23 и только они.

Отметим, что **GFL4** имеет четырехзначную интерпретацию, совпадающую с интерпретацией логики **FL4**.

Покажем, что обобщение логики тавтологических следований $\mathbf{E_{fde}}$ на универсум символьных выражений приводит к логике (обозначим ее $\mathbf{SE_{fde}}$), эквивалентной **GFL4**.

Характеристическая матрица для E_{fde} есть <{T,F,B,N}, ~, &, ∨, Imp^S, {T}>, где Imp^S обозначает импликацию, истинностную таблицу для которой предложил Т.Смайли для логики тавтологических следований E_{fde} (см. [1]).

Imp^S	T	F	B	N	A	~|A	|A
T	T	F	F	F	T	F	T
F	T	T	T	T	F	T	F
B	T	F	T	F	B	F	T
N	T	F	F	T	N	T	F

Обратим внимание на столбец, соответствующий истинностному значению N, которое означает «ни истинно, ни ложно». Он соответствует столбцу, отвечающему отрицанию оператора истинности. Следовательно, можно построить определение оператора в языке $\mathbf{SE_{fde}}$, который соответствует оператору истинности в **GFL4**. $|A =_{df} \sim (A\ Imp^S \sim)$

[3] По сути это определение соответствует понятию формулы (правильно или неправильно построенной) в языках **GFL2** и **GFL3N**

Обратим внимание, что на месте консеквента стоит символ отрицания, который, рассматриваясь в качестве формулы, не истинен и не ложен, то есть имеет значение N.

Чтобы получить эквивалентную **FL4** логику, достаточно к истинностным таблицам логики $\mathbf{E}_{\mathbf{fde}}$ добавить таблицу для оператора истинности. Из того, что в языке $\mathbf{SE}_{\mathbf{fde}}$ можно построить определение для оператора, соответствующего оператору истинности в **GFL4**, следует, что логика $\mathbf{SE}_{\mathbf{fde}}$ эквивалентна **GFL4**.

Наличие операторов истинности и ложности позволяет выразить следующее соотношение, связывающее исходную импликацию Imp исчисления **GFL4** и импликацию Imp^S логики $\mathbf{E}_{\mathbf{fde}}$,

$$\vdash (\mathrm{A}\ \mathrm{Imp}^{S}\ \mathrm{B}) \equiv ((|\mathrm{A}\ \mathrm{Imp}\ |\mathrm{B}) \wedge (-\ \mathrm{B}\ \mathrm{Imp}\ -\mathrm{A}))$$

означающее, что истинность А имплицирует истинность В и ложность В имплицирует ложность А

Смысл последнего соотношения близок к тому, что писал Е.А.Сидоренко в [6]: «Любой логик, сторонником какого бы понимания логического следования он ни являлся, по-видимому, согласится с тем, что формула *B* логически следует из *A*, если и только если в рамках принятой семантики всякое достаточное условие истинности *A* ... является достаточным условием истинности *B*, а всякое достаточное условие ложности *B* является достаточным условием ложности *A*».

Литература

1. *Белнап Н.* Как нужно рассуждать компьютеру // Белнап Н., Стил Т. Логика вопросов и ответов. М., 1981.
2. *Генцен Г* Исследования логических выводов // Математическая теория логического вывода. М., 1967. С. 9-74.
3. *Лукасевич Я.* О детерминизме // Логические исследования. Вып. 2. М., 1993. С. 190-205.
4. *Павлов С А.* Логика ложности FL4 // Труды научно-исслед. семинара Логического центра Ин-та философии РАН. 1993. М., 1994
5. *Павлов С.А* Формулировка классической логики, обогащенной семантическими терминами «истинно» и «ложно» // Труды научно-исслед. семинара Логического центра Ин-та философии РАН. Вып. XV. - М., 2001 С. 74-78.
6. *Сидоренко Е.А.* Релевантная логика (предпосылки, исчисления, семантика). М., 2000.
7. *Тарский А* Семантическая концепция истины и основания семантики. // Аналитическая философия: становление и развитие. М., 1998.

Язык. Семантика. Логика[1]

The notions of the title (Language, Semantics and Logic) are considered usually to be each to others rather similar. The paper shoes that a semantics of the object language may be formulated by such the way that the language, its semantics and their logic do not determinate each others and so may be considered as independent.

При стандартном понимании всех трех вынесенных в заголовок понятий различие между ними относительно, и нередко их фактически отождествляют. Действительно, все они предполагаю друг друга. Язык – это, как правило, объектный язык некоторой логической теории, имеющей истинностную семантику. Семантика при этом оказывается специфической характеристикой именно данного языка. При иной семантике другим окажется и язык. А семантика детерминирует соответствующую логику. Поэтому часто говорят не семантике языка, но о семантике соответствующей логики.

Я попытаюсь здесь показать, что семантика объектного языка может строиться таким образом, что все эти понятия, язык, семантику и логику, придется рассматриваться как независимые друг от друга. Главным, с прицелом на решение определенных эпистемических проблем, будет продемонстрировать, что истинностная семантика совсем не обязательно однозначно детерминирует логику того объектного языка, для которого такая семантика строится.

1. Объектный язык и содержательная семантика

Пусть мы имеем некоторый объектный язык L, логические правила оперирования выражениями которого ставится задача описать. Ясно, что непременным образом должен быть задан синтаксис этого языка. Иными словами, мы должны определиться, какого рода выражения являются правильно построенными выражениями (формулами) объектного языка L.

1 Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 02-03-18037

В семантическом плане мы можем иметь при этом некоторую содержательную трактовку логических связок языка, понимая один из знаков языка как союз «и», другой –как «или», третий – как «если…, то…» или отрицание или квантор и так далее. Уже такого рода семантика позволяет устанавливать некоторые корреляции между выражениями объектного языка, в том смысле, что отрывают возможность говорить, что при истинности некоторой формулы A всегда будет истинной также формула B, формально: $A \models B$.

При этом оказывается возможным предложить описание, аксиоматическое или какое-то иное, класса такого рода выражений. При наличии в объектном языке или при возможности определить в нем импликацию «$\rightarrow$» описываются те приемлемые выражения $A \rightarrow B$ языка L, которым соответствуют верные утверждения вида $A \models B$.

При содержательной интерпретации принимаемого объектного языка L в силу неоднозначности используемых для этого выражений языка естественного приходится говорить об интуитивных основаниях принятия и отвержения тех или иных утверждений вида $A \models B$. И даже если при этом имеется некоторое формализованное описание, прямое или опосредованное, такого рода утверждений, то будет верным считать, что семантики в строгом смысле слова в рассматриваемом случае не имеется.

Чтобы иметь семантику объектного языка надо, сформулировать условия верификации всех его синтаксически приемлемых выражений, чтобы именно на этих основаниях утверждать, что имеет силу $A \models B$. В этом случае можно говорить, что для языка L сформулирована истинностная семантика. Желательно при этом, чтобы истинностная семантика имела некоторое интуитивное оправдание, согласуясь с содержательной интерпретацией принимаемого объектного языка L. Скажем, у известных модальных систем S1-S5, предложенных К.Льюисом в начале XX в., такого рода семантик не было до появления семантик возможных миров крипкевского типа[2].

[2] Подробнее смотри об этом во вступительной статье Смирнова В.А. к книге переводов "Семантика модальных и интенсиональных логик". М., 1981. В число переводов входит статья *Крипке С.* "Семантическое рассмотрение модальной логики" с кратким, но строгим изложением семантики возможных миров для модальной логики. См. также [11].

2. Семантика классических связок и логика

Построение истинностной семантики для языка не означает, что тем самым задается и его логика. Для того, кто привык, что семантика строится для определенной логической системы или для описания класса логически общезначимых формул, такого рода заявление может показаться странным. Однако прецедент такого рода не детерминирующей однозначным образом семантики давно имеется.

Примером может служить реляционная семантика пропозиционального языка КДО, связками которого являются классические конъюнкция, дизъюнкция и отрицание. На возможные миры в этой семантике не распространяются требования полноты и непротиворечивости[3]. Иными словами, возможные миры, образующие множество W, представляют собой любые списки литералов (пропозициональных переменных и (или) их отрицаний). Некоторая переменная может не входить в такие списки ни с отрицанием, ни без него, делая мир неполным. А может входить одновременно и с отрицанием и без него, делая мир противоречивым.

Условия верификации и фальсификации пропозициональных формул со связками КДО в обсуждаемой семантике (в дальнейшем обозначаемой как $\mathbf{Sem}^1$) задаются стандартным образом. Возможно также использование материальной импликации притом, что условия верификации и фальсификации $A \supset B$ те же, что и у формулы $\neg A \vee B$.

Семантика $\mathbf{Sem}^1$ не детерминирует никакой *логики* в том смысле, что ни одна пропозициональная формула с классическими пропозициональными связками не является общезначимой (не верифицируется во всех возможных мирах). Естественно, что нет также формул, которые фальсифицируются во всех возможных мирах.

Хотя семантика $\mathbf{Sem}^1$ оперирует явным образом лишь двумя истинностными значениями, она фактически является четырехзначной. Так любая формула может быть в некотором возможном мире $w_i \in W$: (1) только истинной; (2) только ложной; (3) одновременно и истинной, и ложной; (4) неопределенной, то есть ни истинной, ни ложной.

---

[3] Е.К.Войшвилло назвал семантики такого рода семантиками обобщенных описаний состояний [1].

В семантике **Sem**^{1} можно различным образом задать условия истинности утверждений о семантическом следовании вида $A \models B$. Этого можно добиться, варьируя множества миров, в рамках которых осуществляется верификация A и B, а также за счет использования различных сочетаний из четырех указанных значений, которые могут быть приписаны A и B. На этом пути могут быть получены классы истинных утверждений $A \models B$, соответствующие теоремам таких первопорядковых систем следования, как релевантная система E_{fde} Андерсона и Белнапа, система Хао Вана и система, двойственная ей, а так же система теорем соответствующего вида со строгой импликацией К. Льюиса. И, таким образом, может быть задана адекватная семантика названных систем. Исключив из рассмотрения противоречивые и неполные миры, можно задать также класс утверждений вида $\models B$, совпадающий с классом теорем классической пропозициональной логики.

3. Семантика языка, допускающего итерацию знака следования

Возникает вопрос, а можно ли построить свободную от общезначимых формул семантику для расширенного объектного языка, который наряду с классическими пропозициональными связками будет содержать релевантную неэкстенсиональную связку следования «$\rightarrow$» и при этом не будет запретов на ее итерацию? Поясним, в чем трудность проблемы4.

Семантика **Sem**^{1} позволяла считать семантически истинной формулу вида $A \rightarrow B$ с классическими формулами A и B при верности $A \models B$. Но формула $A \rightarrow B$ не являлась формулой объектного языка, для которого строилась семантика **Sem**^{1} и, поэтому, в рамках этой семантики не стоял вопрос, считать ли ее истинной во всех мирах. Мы могли считать верной $A \models A$, и на этом основании семантически истинной $A \rightarrow A$, что не ставило перед нами проблемы истинностной оценки выражения вида $B \models A \rightarrow A$, так как оно предметом такой оценки и быть не могло. Введя стрелку в объектный язык, и допустив возможность ее итерации, мы оказываемся перед необходимостью оценивать истинность $B \models A \rightarrow A$. И если мы не желаем считать его верным для любого произвольно взятого B, то должны найти возможность считать, с одной стороны, $A \rightarrow A$ семантически истинным, а с другой, – найти способ

---

[4] Более подробно об этом см в [7].

отвергнуть $B \to .A \to A$. И значит, найти вариант, который позволял бы иметь миры, в которых $A \to A$ и вообще любой закон логики можно было бы фальсифицировать. Иначе говоря, мы должны построить семантику расширенного объектного языка, в которой, как и в $\mathbf{Sem}^1$, не было бы формул истинных во всех мирах.

В техническом плане задача стоит так. Надо, чтобы принятие $A \to B$ в качестве закона логики позволяло в семантике верифицировать соответствующее утверждение $A \models B$ о семантическом следовании, но не вынуждало считать формулу $A \to B$ истинной во всяком возможном мире. Именно такого рода задача решается в семантике, обозначаемой нами как $\boldsymbol{S}^{ea}$.

Формулировка условий верификации и фальсификации формул со знаком следования «$\to$», требует введения на множестве миров некоторого бинарного отношения достижимости R. Миры из W в $\mathbf{S}^{\to}$ строятся как двухуровневые. Первые уровни (этажи) составляют те же описания состояний, что и в $\mathbf{Sem}^1$. Вторые этажи миров представляют собой произвольные множества формул объектного языка. Первый этаж мира w_i обозначается как w_i^a, а второй – как w_i^e. Мы имеем, таким образом, в каждом мире a- и e-этажи. Отсюда и обозначение семантики как $\boldsymbol{S}^{ea}$.

4. Двухуровневая реляционная семантика $\boldsymbol{S}^{ea}$

Язык, для которого мы будем строить семантику, содержит бесконечное число пропозициональных переменных и следующие логические связки: "$\wedge$" – конъюнкцию (которая при написании будет обычно опускаться), "$\vee$" – дизъюнкцию, "$\neg$" – отрицание и "$\to$" – (релевантную) импликацию.

Модельная структура представляет собой пару $<W,R>$, где W есть бесконечное множество универсумов рассуждений (миров) $w_1, w_2, \ldots, w_n \ldots$, из которых каждый w_i ($i \geq 1$) в свою очередь представляет собой упорядоченную пару $<w_i^a, w_i^e>$. Первый член этой пары (*первый этаж* мира w_i или его атомарная часть, *фактуальный мир*) есть некоторый список *литералов* (пропозициональных переменных или их отрицаний). Требование *полноты*, согласно которому для каждой пропозициональной переменной в атомарный мир входит или сама переменная, или ее отрицание, к атомарным мирам не предъявляется.

Второй член пары, w_i^e – *второй этаж* мира w_i, называемый также *миром следствий*, есть некоторое множество формул принятого объектного языка. К данному множеству предъявляются только следующее требование конъюнктивной замкнутости:

Если A и B – элементы множества w_i^e, то конъюнкция AB также является его элементом. Формально:

$(Cl_{con})\ \forall w_i((A \in w_i^e)\&(B \in w_i^e) \supset (AB \in w_i^e))$.

Формулировка условий верификации и фальсификации формул со знаком следования «→», требует введения на множестве миров некоторого бинарного отношения достижимости R. Мы не приписываем этому отношению изначально никаких свойств. Будет ли оно рефлексивным, симметричным и транзитивным, будет определяться той логикой, которая по тем или иным причинам будет приниматься.

Миры из W в S^{ea} строятся как двухуровневые. Первые уровни (этажи) составляют те же описания состояний, что и в **Sem**[1]. Вторые этажи миров представляют собой произвольные множества формул объектного языка. Первый этаж мира w_i обозначается как w_i^a, а второй – как w_i^e .

Мы используем выражения $T(A)/w_i$ и $F(A)/w_i$ для утверждений о *верифицируемости* и, соответственно, о *фальсифицируемости* формулы A в мире w_i[5].

Мы рассматриваем классическое отрицание, и поэтому будут справедливыми следующие соотношения:

$T(A)/w_i = F(\neg A)/w_i$ и $T(\neg A)/w_i = F(A)/w_i$

и, следовательно,

$T(\neg\neg A)/w_i = T(A)/w_i$ и $F(\neg\neg A)/w_i = F(A)/w_i$.

Определение D1: *В мире w_i формулы верифицируются исключительно в соответствии со следующими условиями*:

(1) Если A – пропозициональная переменная или ее отрицание, и A входит в список w_i^a, то $T(A)/w_i$[6].

---

[5] В неформальных рассуждениях мы, как уже делали это ранее, наряду с утверждениями о верифицируемости и фальсифицируемости формул в некотором мире будем говорить об их истинности (верности), ложности именно в том строгом смысле, какой придается понятиям верифицируемости и фальсифицируемости. Под мирами в содержательном смысле у нас имеются в виду универсумы рассуждения. Согласитесь, что заявление о том, что в некотором мире истинно противоречие $\neg AA$, выглядит достаточно странно в отличие от утверждения, что в этом универсуме рассуждения верифицируется противоречие $\neg AA$, так как в противоречивости универсумов рассуждения нет ничего странного. Скажем, доказательство от противного состоит как раз в том, чтобы показать, что отрицание тезиса влечет противоречие (универсума рассуждения).

[6] Обратите внимание, что возможность верифицируемости некоторого литерала A в w_i не исчерпывается его вхождением в список w_i^a, некоторый

(2) $T(AB)/w_i$, если и только если $T(A)/w_i$ *и* $T(B)/w_i$.

(3) $T(A \vee B)/w_i$, если и только если $T(A)/w_i$ *или* $T(B)/w_i$.

(4) $T(\neg(A \vee B))/w_i$, если и только если $T(\neg A)/w_i$ *и* $T(\neg B)/w_i$.

(5) $T(\neg(AB))/w_i$, если и только если $T(\neg A)/w_i$ *или* $T(\neg B)/w_i$.

(6) $T(\neg(A \to B))/w_i$, если и только если $\exists w_j R w_i w_j \& T(A)/w_j \& F(B)/w_j$[7].

(7) $T(A \to B)/w_i$, если и только если выполняются требования:

(a) $\forall w_j (R w_i w_j \supset (T(A)/w_j \supset T(B)/w_j \& (B \in w_j^e))$

(b) $\forall C \forall w_j (R w_i w_j \supset . T(\neg(C \to A)/w_j \supset \neg(C \to B) \in w_j^e)$

(c) $\forall D \forall w_j (R w_i w_j \supset . T(\neg(A \to D))/w_j \supset \neg(B \to D) \in w_j^e)$.

В пункте (7) мы впервые используем вторые этажи наших миров. Условие (a) требует, чтобы консеквент высказывания $A \to B$ был не только верен в тех достижимых мирах из w_i мирах, в которых верен его антецедент, но и находился на их вторых этажах. Пункты (b) и (c) носят характер чисто технический, не позволяя за счет бесконечности числа формул C и D свести условия истинности $A \to B$ к каким бы то ни было условиям, выражаемым экстенсиональным способом.

Во всех мирах истинные формулы вида $A \to B$ замыкаются в соответствии со следующим правилами транзитивности и контрапозиции соответственно:

(Cl_{tr}) $T(A \to B)/w_i \supset T(C \to A \to . C \to B)/w_i \& T(B \to C \to . A \to B)/w_i$.

(Cl_{cp}) $T(A \to B)/w_i \supset T(\neg B \to \neg A)/w_i$.

Конечную конъюнкцию Q формул вида $(A_k \to B_k)$ $(k \geq 1)$ будем относить к классу языковых детерминант[8] $(Q \in LT_d)$, если и только если для всех k в любом мире w_i предположение об истинности в этом мире A_k влечет верность в этом мире B_k..

Имеет место замыкание, аналогичное замыканию по модус поненс:

литерал вполне может оказаться верифицируемым по иным основаниям данного определения. Ниже на эти возможности будет специально указано.

7 Здесь и далее логические знаки (такие, как $\forall$, $\exists$, $\supset$, $\in$, $\&$), связывающие метавыражения и отсутствующие в нашем объектном языке, должны пониматься здесь и в дальнейшем как соответствующие метасимволы.

8 Языковая детерминированность, идею которой я заимствую у А.А.Зиновьева [см : 2, 3], выражений вида $A \to B$ определяется исключительно задаваемыми в семантике условиями истинности формул объектного языка. Это, так сказать, истины языка. В качестве истин логики в рамках предлагаемой семантики они могут быть на этом основании постулированы.

(Cl_{mp}) Если $Q \rightarrow C$ верифицируется в мире w_i, и $Q \in LT_d$, то в w_i верифицируется формула C.

Семантика S^{ea} не детерминирует никакой логики. Она вообще не порождает никаких общезначимых утверждений объектного языка. Скажем, верность $AB \models B$ или, иначе, $AB \rightarrow B \in LT_d$ не влечет верности формулы $AB \rightarrow B$ ни в каком отдельном мире, так как дополнительно требует, чтобы в этом мире при истинности ее антецедента AB на втором этаже наличествовал ее консеквент B.

Вместе с тем семантика S^{ea} задает некоторый класс импликаций $A \rightarrow B$, относящихся к классу LT_d. Этот класс истин языка отвечает условиям релевантности, в том смысле, что в число таких истин входят только те, которым соответствуют теоремы релевантной системы E. Класс истин языка связан с принятыми условиями верификации формул с соответствующими логическими связками, но зависит также от того, какими свойствами обладает отношение достижимости.

В случае если это отношение будет рефлексивно и транзитивно, то класс истин языка будет описываться релевантной системой T. Этот класс LT_d совпадет с классом теорем системы E, если замкнуть его относительно принципа, согласно которому следование детерминирует материальную импликацию:

($Cl_{\supset}$) Если $Q \rightarrow C$ верифицируется в мире w_i, то верифицируется формула $\neg Q \vee C$ в w_i[9]

В объектный язык могут быть включены другие логические связки и операторы. Например, различные модальные операторы, кванторы, иные виды импликаций. Для их адекватного описания наряду с имеющимся отношением достижимости R могут потребоваться другие отношения достижимости, отличающиеся по своим свойствам.

Мы можем, скажем, наряду с импликацией $A \rightarrow B$, которая отображает необходимую условную связь (E-импликацию) между A и B, ввести еще одну релевантную импликацию (R-импликацию) вида $A \Rightarrow B$, которая утверждением своей истинности характеризует сложившиеся обстоятельства и может быть ложной, когда таковые отсутствуют. Тогда для указания условий истинности для R-импликации потребуется ввести некоторое новое отношение достижимости, подобно тому, как это сделано в

---

[9] Доказательство приводится в [6].

[6], где семантика строится с двумя отношениями достижимости R^N и R^C.

Используя две указанные импликации, можно будет, например, различать универсальные высказывания типа «Все бамбуки суть злаковые растения» от случайно истинных обобщений: «Все студенты группы успешно сдали логику». В первом случае высказыванию будет соответствовать утверждение:

∀x(Бамбук(x)→Злак(x)). Во втором: ∀x(Студент(x) ⇒ Сдал логику(x)).

Обогащая объектный язык, чтобы усилить его выразительные возможности, надо, определяя условия верификации высказываний, исключать появления в семантике априорно истинных утверждений.

5. Зачем семантика без логики

Естественно считать, что применение логики при решении прикладных задач может быть тем более успешным, чем богаче ее логический аппарат, чем сильнее и выразительнее применяемая логическая теория [5]. При этом обычно не обращают внимания на два важных обстоятельства.

Во-первых, на то, что логика, избранная исследователем, ее применяющим, изначально берется как общепринятая, интерсубъективная. Во-вторых, что эта логика, хотим ли мы того или нет, необходимо становится органической частью прикладной теории, предлагаемой для решения задачи.

Вместе с тем в логическом обиходе используется множество разных базисных логических теорий, фактически, для одного и того же объектного языка. Конечно, в таком положении обычно нет ничего страшного и противоестественного. Если избранная логика адекватна поставленной задаче, фиксирована и аккуратно задана, то она выглядит лишь как некоторое аппаратное, служебное средство для описания соответствующей предметной области. Высказывания, которые носят чисто логический характер, да и вся логическая теория вообще как бы выносятся за скобки.

Указанные обстоятельства, однако, могут стать серьезной помехой тогда, когда в качестве прикладной области логики выбираются эпистемологические, когнитивные проблемы. Вряд ли можно серьезно полагать, что всем познающим мир свойственна одна и та же логика. Поставим задачу моделирования некоторого познающего субъекта (познавателя). И если присущую ему логику рассматривать как органическую часть его знания, которая также должна быть отражена в модели, то навязывать ему априори ту или иную логику заведомо неправомерно.

Это понятно хотя бы уже потому, что знание, присущее некоторому познавателю, и попытка описать это знание, отображая то, что ему представляется истинным, неизбежно будет зависеть от многих факторов. В частности от того, замкнута ли совокупность утверждений, принимаемых им в качестве истинных, относительно вытекающих из нее логических следствий. И если замкнута, то надо иметь в виду именно его собственную логику и то, в какой степени способен он разрешать вопрос, что может с точки зрения этой логики считаться следствием из уже принятых им утверждений.

Таким образом, решая эпистемические проблемы надо так исхитриться, чтобы применять к моделированию знания логический аппарат, не нагружая какой-либо логикой объект исследования (познавателя), знание которого моделируется.

Точно также не следует навязывать познавателям никаких теорий истинности, как и никаких иных философских теорий познания[10]. Его ответы на метафизические вопросы, если он таковые дает, также составляют часть его знания. Возможно, что они вообще не представляют для него никакого интереса и не становятся предметом его оценок. Я не считаю здесь принципиальным тот факт, что познаватель может и сам творить предметную область, и в этом смысле, соучаствовать в творении онтологического мира, создавая новые и материальные, и духовные (мысленные) объекты, могущие войти в универсум его рассуждений.

Семантика S^{ea} дает возможность использовать ее для моделирования знаний, присущих различным субъектам познания без навязывания им какой бы то ни было единой для всех логики, как это обычно бывает при применении логического аппарата к решению любого типа проблем. Принимаемые познавателем логические законы или системы законов должны постулироваться. И если они включаются в состав знания познавателя, то семантика S^{ea} к ним легко адаптируются [6].

---

[10] В мою задачу не входит какая либо характеристика такого рода проблем. Читатель может познакомиться как с самими этими проблемами, так и различными подходами к их решению в [4].

Литература

1. *Войшвилло Е..К.* Философско-методологические аспекты релевантной логики. М.: Изд-во МГУ, 1988.
2. *Зиновьев А.А.* Логика высказываний и теория вывода. М., 1962.
3. *Зиновьев А.А.* Очерки комплексной логики. М.: УРСС. 2000.
4. *Лекторский В.А.* Эпистемология классическая и неклассическая. М., 2001.
5. *Смирнов В.А.* Логические методы научного знания. М.: Наука, 1987.
6. *Сидоренко Е.А.* Релевантная логика, М.: ИФ РАН, 2000.
7. *Сидоренко Е.А.* Логика. Парадоксы. Возможные миры. М.: УРСС, 2002.
8. *Сидоренко Е.А.* Семантика возможных миров: от лейбницевской к юмовской. // Логические исследования. Вып. 3. М.: Наука, 1995. С. 24-37.
9. *Сидоренко Е.А..* Реляционная семантика релевантных исчислений. // Логические исследования, Вып. 3. М.: Наука, 1995. С. 53-71.
10. *Сидоренко Е.А..* Возможные миры как модели знания // Субъект, объект, познание. К 70-летию В.А. Лекторского. М.: Канон+, 2002. С. 704-717.
11. *Ивлев Ю.В.* Модальная логика. М., 1991.

В.А.Степанов

Семантика самореферентности: подход динамических систем[1]

The language admitting the self-reference is constructed. Semantics of language is based on conformity of everyone self-referential sentence the dynamic system associated with it. It is established that on determined logical connectives an estimation of anyone self-referential sentence φ invariant concerning operation of negation:

$$(\forall\varphi)\ \varphi \equiv \sim\varphi.$$

Данное сообщение посвящено проблеме анализа формального языка, допускающего ссылку его предложений на самих себя и включающего всюду определенный предикат истинности. Исторический анализ указывает на наращивание усилий в построении содержательной семантики самореферентных предложений. Как заметил А.С.Карпенко [1], для современного развития логики характерна "структурализация самого истинностного значения". Данная работа целиком лежит в этом русле, рассматривая самореферентные предложения как сложные и замкнутые логические системы и предлагая использовать дискретные динамические системы для анализа их семантики.

1. Язык с самореферентными предложениями

При изложении будем пользоваться так называемыми ***синтаксическими переменными P, Q, R,*** область изменения которых будет состоять из формул определяемого языка.

Введем язык с формульными переменными:

x, y, z – пропозициональные переменные (переменные),

Tr, – предикатный символ, (предикат истинности),

$\leftrightarrow, \neg, \vee, \&$ – логические связки (связки),

S – кванторный символ (квантор самореферентности),

(,)– вспомогательные знаки,

$\sim, \equiv$ – внешние логические связки (в языке семантики).

---

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 03-06-80166.

В качестве предикатных формул нам понадобятся такие:

$$Tr(x);\ \neg Tr(x);\ Tr(x) \vee \neg Tr(x);\ Tr(x) \& \neg Tr(x)$$

Определим самореферентные формулы:
Sa***P****(a)* – самореферентная формула, если
P*(a)* – предикатная формула и
a – пропозициональная переменная;
Sa***P****(a)* читается так: "самореферентная по *a* ***P*** от *a*".
P*(a)* будем называть **ядром** самореферентной формулы Sa***P****(a)*, а Sa - **квантором самореферентности**.

Квантор Sa **связывает** переменную *a* в самореферентной формуле Sa***P****(a)* (в том смысле, что в самореферентную формулу Sa***P****(a)* уже нельзя осуществить корректную подстановку на место переменной *a*).

Через ***P(Q)*** обозначим результат корректной подстановки формулы ***Q*** в формулу ***P****(a)* на место свободной переменной *a*.

2. Определение квантора самореферентности S

В литературе (например, С.Феферман [6]) самореферентным предложением принято считать замкнутую формулу, удовлетворяющую Теореме о неподвижной точке:

$$\varphi \leftrightarrow f(\ulcorner\varphi\urcorner), \tag{2.1}$$

где φ и будет тем самореферентным предложением. Здесь $\ulcorner\bullet\urcorner$ -- функция именования. Для наших целей в качестве функции именования достаточно взять такую:

$$\ulcorner \boldsymbol{P} \urcorner = \boldsymbol{P}, \tag{2.2}$$

т.е. в качестве "имени" выражения ***P*** используется "само" выражение ***P*** (***P*** используется автонимно). Памятуя о том, что функция именования определена нами выражением (2.2), а самореферентное предложение у нас уже описано как Sa***P****(a)*, в нашем языке выражение (2.1) принимает следующий вид:

$$\mathrm{S}a\boldsymbol{P}(a) \leftrightarrow \boldsymbol{P}(\mathrm{S}a\boldsymbol{P}(a)). \tag{2.3}$$

Если правое вхождение формулы Sa***P****(a)* в выражении (2.3) заменить на эквивалентную ей формулу ***P****(*Sa***P****(a))*, то в результате итерации такой замены мы получим следующую последовательность выражений:

$$\begin{aligned} \mathrm{S}a\boldsymbol{P}(a) &\leftrightarrow \boldsymbol{P}(\mathrm{S}a\boldsymbol{P}(a)). \\ &\leftrightarrow \boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\mathrm{S}a\boldsymbol{P}(a))). \\ &\leftrightarrow \boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\mathrm{S}a\boldsymbol{P}(a)))). \end{aligned} \tag{2.4}$$

....

На то, что самореферентные предложения порождают подобную (2.4) бесконечную последовательность, первым, насколько нам известно, обратил внимание Ч.Пирс в своих лекциях 1864-1865 гг. [5]. Можно сказать, что при этом он неявно использовал аксиому самореферентности, которая была сформулирована С.Клини только в 1938 г.

3. Определение операции (внешнего) отрицания

С введением квантора самореферентности появляется возможность различать вхождения знака отрицания в самореферентных формулах:

- **внешнее** вхождение знака $\neg$: отрицание стоит **перед** квантором Sa, например: $\neg \mathrm{S}a\boldsymbol{P}(a)$
- **внутреннее** вхождение знака $\neg$: отрицание стоит **после** квантора Sa в начале подкванторного выражения, например $\mathrm{S}a\neg\boldsymbol{P}(a)$

Возьмем аксиому самореферентности (2.3) и поставим перед левой и правой частями эквивалентности знак отрицания:

$$\neg \mathrm{S}a\boldsymbol{P}(a) \leftrightarrow \neg\boldsymbol{P}(\mathrm{S}a\boldsymbol{P}(a)). \tag{3.1}$$

Эквивалентность при этом не нарушится, а весь комплекс формул из (2.4) при этом приобретет следующий вид:

$$\begin{aligned} \neg \mathrm{S}a\boldsymbol{P}(a) &\leftrightarrow \neg\boldsymbol{P}(\mathrm{S}a\boldsymbol{P}(a)) \\ &\leftrightarrow \neg\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\mathrm{S}a\boldsymbol{P}(a))). \\ &\leftrightarrow \neg\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\mathrm{S}a\boldsymbol{P}(a)))). \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3.2}$$

Заметим, что слева мы имеем **внешнее** вхождение знака отрицания.

4. Определение предика *Tr*

Определим символ *Tr* формулой, представляющей из себя Т-аксиому Тарского:

$$Tr(\ulcorner x \urcorner) \leftrightarrow x. \tag{4.1}$$

Здесь $\ulcorner\bullet\urcorner$ – функция именования. Напомним, что для наших целей в качестве функции именования достаточно взять такую:

$$\ulcorner x \urcorner = x.$$

Тогда выражение (4.1) в нашем языке будет выглядеть так:

$$Tr(x) \leftrightarrow x. \tag{4.2}$$

Здесь переменная x используется в двух разных ролях:

слева – как "имя" переменной x (x используется автонимно); справа – как "сама" переменная x.

5. Еще о кванторе самореферентности S

Квантор самореферентности Sx выражает тот факт, что самореферентная формула S$x$$\boldsymbol{P}(x)$ имеет такую же истинностную оценку (назовем ее +, например), что и формула $\boldsymbol{P}(+)$. В качестве примера самореферентного выражения возьмем написанное ниже предложение, помеченное нами как "*", в котором самореферентность выражается семантически, на уровне понимания смысла высказывания. Тогда формула S$xTr(x)$ призвана синтаксически зафиксировать упомянутое нами самореферентное утверждение "*" (Truth-Teller):

*: "Предложение * истинно",

а формула S$x\neg Tr(x)$ -- утверждение, известное под названием "Лжец" (Liar):

**: "Предложение ** ложно".

Интересно отметить, что в процессе обсуждения настоящего доклада на семинаре, Е.А.Сидоренко заметил, что известная строка из стихотворения Ф.И.Тютчева "SILENTIUM!" ("Молчание!"):

«*Мысль изреченная есть ложь.*» -

является примером самореферентного предложения. В свою очередь А.В.Чагров уточнил, что это предложение еще и аналог предложения «Лжец»! Вероятно, что сам Федор Иванович о существовании подобных обстоятельств в своем творении не подозревал.

6. Семантика предикатных формул

Примем, что множество (6.1) истинностных значений пропозициональных формул нашей логики совпадает с множеством истинностных значений классической логики высказываний и состоит из двух элементов

$$\{1,0\}, \tag{6.1}$$

которые содержательно означают ИСТИНУ и ЛОЖЬ соответственно. Каждая пропозициональная переменная x, y, z нашего языка может принимать одно из этих двух истинностных значений.

Предикатная формула $\boldsymbol{P}(x)$ интерпретируется в нашем случае на какой-то булевой функции $p(x)$, и если пропозициональная переменная x принимает какое-то истинностное значение, то выражение $p(x)$ также принимает какое-то истинностное значение. Таким образом, каждая предикатная формула $\boldsymbol{P}(x)$ нашего языка со свободной переменной x в семантике может рассматриваться как **отображение** p из множества истинностных значений (принимаемых переменной x) в множество истинностных значений (принимаемых выражением $p(x)$):

$$p\colon \{0,1\} \longrightarrow \{0,1\}. \tag{6.2}$$

Очевидно, что в нашем случае возможных различных типов отображений будет всего четыре:

$$p(x)\leftrightarrow 1;\ p(x)\leftrightarrow 0;\ p(x)\leftrightarrow x;\ p(x)\leftrightarrow \neg x. \tag{6.3}$$

Для удобства дальнейших рассуждений повторим здесь конструкцию (2.4), полученную в пункте 2. Вот она:

$$\begin{aligned} \mathrm{S}x\boldsymbol{P}(x) &\leftrightarrow \boldsymbol{P}(\mathrm{S}x\boldsymbol{P}(x)). \\ &\leftrightarrow \boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\mathrm{S}x\boldsymbol{P}(x))). \\ &\leftrightarrow \boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\mathrm{S}x\boldsymbol{P}(x)))). \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{6.4}$$

В правой стороне формул (6.4) бросается в глаза последовательность подстановок в ядро $\boldsymbol{P}(\bullet)$ самореферентной формулы $\mathrm{S}x\boldsymbol{P}(x)$:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{P}(\bullet) \\ &\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\bullet)) \\ &\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\bullet))) \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned} \tag{6.5}$$

изучение которой может представить интерес для анализа порождающего ее самореферентного предложения $\mathrm{S}x\boldsymbol{P}(x)$. В семантике такую последовательность подстановок можно представить в виде композиции отображения p, на котором интерпретируется предикат $\boldsymbol{P}$. Тогда упорядоченное множество выражений (6.5) можно рассматривать как движение по траектории [4] дискретной динамической системы (X,f), где f – некоторое отображение множества X в себя --- полугруппы отображений $\{f^{\circ n}, n\in \mathbf{Z}^{+}\}$, где $f^{\circ n}=f\circ f^{\circ(n-1)}$, n=1,2,.. .

Описанную выше дискретную динамическую систему (X,f) назовем АССОЦИИРОВАННОЙ с самореферентным предложением $\mathrm{S}x\boldsymbol{P}(x)$, если:

1. В качестве множества X выступает множество (6.1) классических истинностных значений $\{0, 1\}$.
2. В качестве отображения f, задающего эволюцию системы, выступает «интерпретация» p предикатной формулы $\boldsymbol{P}(x)$ со

свободной переменной x, являющейся ядром исходного самореферентного предложения S$x\boldsymbol{P}(x)$.

3. В качестве полугрупповой операции o в выражении $f^{on}=fof^{o(n-1)}$ выступает композиция функции p, соответствующая операции подстановки на место свободной переменной x в ядро $\boldsymbol{P}(x)$: $p^{on}(x) = p(p^{o(n-1)}(x))$.

Основной объект изучения в теории динамических систем -- это траектория, или орбита. ТРАЕКТОРИЕЙ динамической системы (X,f), проходящей через точку $x \in X$, называется множество

$$\mathrm{orb}(x)=\{ x, f(x), f^{o2}(x), f^{o3}(x), \ldots\}=\mathrm{U}_{n=0}{}^{\infty} f^{on}(x). \tag{6.6}$$

Тогда ДВИЖЕНИЕМ ПО ТРАЕКТОРИИ ассоциированной динамической системы назовем последовательность точек

$$\begin{aligned} &x_0 \\ &x_1 = p(x_0) \\ &x_2 = p(p(x_0)) \\ &x_3 = p(p(p(x_0))) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{6.7}$$

где x_0 - стартовое значение пропозициональной переменной x. Коротко будем записывать такие движения в виде выражения

$$<p^{o\mathrm{n}}(x),\ n \in \mathbf{Z}^+>, \tag{6.8}$$

где $p^{o\mathrm{n}}(x)$ при n=0 обозначает попросту x_0.

Возможных начальных значений для x_0 два : 1 и 0. Причем ни одно из них не имеет преимуществ с точки зрения стартового значения для траекторий динамической системы. Поэтому мы примем следующее определение:

Определение. Истинностной оценкой EV(S$x\boldsymbol{P}(x)$) атомарной формулы S$x\boldsymbol{P}(x)$ назовем **совокупность движений** (6.7) ассоциированной с ней динамической системы $(\{0,1\}, p(x))$, получающуюся как результат приписывания переменной x_0 в последовательности (6.7) классических истинностных значений 1 и 0 при фиксированном значении других пропозициональных переменных, свободно входящих в ядро $\boldsymbol{P}(x)$, т.е. :

$$\mathrm{EV}(\mathrm{S}x\boldsymbol{P}(x))=_{\mathrm{def}} \{< p^{o\mathrm{n}}(x_0), \mathrm{n}\in \mathrm{Z}^+> \mid x_0 \in \{0,1\} \}. \tag{6.9}$$

Поскольку возможных начальных значений для x_0 два : 1 и 0 (они изображены в самой левой колонке строк (6.10) и (6.11)), постольку и последовательностей в общем случае будет две:

$$x_0=1:\quad 1, f(1), f^{o2}(1), f^{o3}(1), \ldots, f^{o\mathrm{n}}(1), \tag{6.10}$$

$$x_0=0:\quad 0, f(0), f^{o2}(0), f^{o3}(0), \ldots, f^{o\mathrm{n}}(0), \tag{6.11}$$

Все возможные в нашей ситуации случаи отображений $f(x)$ сведены для удобства в Таблицу 1. В ней, в частности, последовательности типа (6.10) и (6.11) изображены в четвертой сверху строке таблицы для различных начальных значений $x_0 \in \{1,0\}$, под ядрами соответствующих типов.

Изобразим графически траектории наших систем на одномерной булевой оси, расположив их в последней строке под ядрами и последовательностями соответствующих типов. В ней ориентированные дуги и замкнутые кольца изображают возможные переходы в траектории динамической системы в процессе итерации.

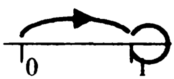
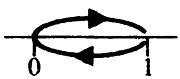
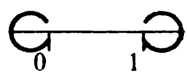
(i)	(ii)	(iii)	(iv)
$S_x(\neg Tr(x) \vee Tr(x))$	$S_x(\neg Tr(x) \mathbin{\&} Tr(x))$	$S_x \neg Tr(x)$	$S_x Tr(x)$
$p(x) \leftrightarrow 1$	$p(x) \leftrightarrow 0$	$p(x) \leftrightarrow \neg x$	$p(x) \leftrightarrow x$
$x_0=1$: 1,1,1,1,... $x_0=0$. 0,1,1,1,...	$x_0=1$: 1,0,0,0,... $x_0=0$: 0,0,0,0,...	$x_0=1$: 0,1,0,1,... $x_0=0$: 1,0,1,0,...	$x_0=1$. 1,1,1,1,... $x_0=0$: 0,0,0,0,...
 T	 F	 A	 E

Таблица 1

На графиках (i), (ii) и (iii) мы видим по одной траектории, причем на графиках (i) и (ii) траектории начинаются в одной точке, потом переходят к другой точке и заканчиваются там циклом с периодом, равным единице, т.е. неподвижной точкой. Эти неподвижные точки являются устойчивыми, так как изменение стартового значения переменной x_0 на соседнее не приводит к изменению характера движения, оно продолжает оставаться на этой же траектории и оканчивается той же самой неподвижной точкой. На графике (iii) траектория также проходит через обе точки и представляет собой цикл длины два. Причем изменение стартового значения x_0 на соседнее не приводит к изменению в характере движения – оно по-прежнему остается на этой единственной траектории.

На графике (iv) мы имеем уже две траектории. Каждая из них представляет собой цикл единичной длины, т.е. неподвижную точку. Но в отличие от устойчивых неподвижных точек графиков (i) и (ii) эти неподвижные точки являются неустойчивыми, так как при изменении стартового значения переменной x_0 на соседнее (т.е. 0 на 1, и наоборот), движение также перескакивает на соседнюю траекторию и там и остается.

Таковы выявленные топологические особенности траекторий получившихся динамических систем. Чтобы отметить близость (но не идентичность!) оценок, доставляемых траекториями, заканчивающимися устойчивыми неподвижными точками 0 и 1, к классическим истинностным значениям 0 и 1, назовём их соответственно F и T. Оценкам, связанным с неустойчивыми неподвижными точками и устойчивым циклом, аналогов в классической логике не существует. Обозначим эти типы истинностных оценок через E (emptiness (пустота)) и A (antinomy (антиномия)) соответственно. Эти новые типы оценок несут в себе не сводимую к классической статике существенную динамику.

Основываясь на сказанном в пункте 3, внешним отрицанием назовем знак отрицания, стоящий перед квантором самореферентности. Особым знаком в синтаксисе внешнее отрицание мы отмечать не будем, но в семантике обозначим его знаком ~. Для определения семантики внешнего отрицания воспользуемся последовательностью эквивалентных выражений (3.2), полученных в пункте 3:

$$\begin{aligned} \neg \mathrm{S}x\boldsymbol{P}(x) &\leftrightarrow \neg \boldsymbol{P}(\mathrm{S}x\boldsymbol{P}(x)). \\ &\leftrightarrow \neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\mathrm{S}x\boldsymbol{P}(x))). \\ &\leftrightarrow \neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\mathrm{S}x\boldsymbol{P}(x)))). \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3.2}$$

Использованная нами ранее последовательность формул (2.4) теперь примет следующий вид :

$$\begin{gathered} \neg \boldsymbol{P}(\bullet) \\ \neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\bullet)) \\ \neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\bullet))) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered} \tag{6.12}$$

Тогда в семантике самореферентной формуле $\neg \mathrm{S}x\boldsymbol{P}(x)$ будет соответствовать последовательность отрицаний композиций булевых функций

$$\begin{gathered} \neg p(x_0) \\ \neg p(p(x_0)) \\ \neg p(p(p(x_0))) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered} \tag{6.13}$$

Это дает основание определить семантику внешнего отрицания ~ через классическое отрицание ¬ следующим выражением

$$\sim < p^{\,o^n}(x_0),\ n \in Z^+ > =_{\text{def}} < \neg p^{\,o^n}(x_0),\ n \in Z^+ >. \qquad (6.14)$$

Отсюда легко видеть, что в семантике внешнее отрицание ~ будет действовать как оператор, заменяющий 1 на 0, а 0 на 1 (ибо ¬0=1, а ¬1=0), в паре последовательностей оценок, которую мы приписали каждой самореферентой формуле.

Для удобства понимания представим наши преобразования в виде Таблицы 2. Результат действия операции отрицания ~ на последовательности оценок исходных формул изображен в строке 3. Набор 0/1-последовательностей оценок для формулы ~T стал совершенно похож на набор 0/1-последовательностей оценок формулы F, а набор 0/1-последовательностей формулы ~F в точности совпадает с набором 0/1-последовательностей формулы T. В этом нет ничего удивительного: отрицание есть отрицание.

Набор последовательностей оценок формулы типа ~A остался точно таким же, как и у формулы типа A. То же самое мы замечаем и для формулы типа ~E: набор ее последовательностей оценок совпадает с набором оценок формулы типа E.

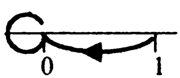
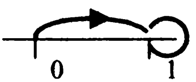
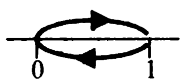
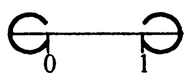
$\sim Sx(\neg Tr(x) \vee Tr(x))$	$\sim Sx(\neg Tr(x)\ \&\ Tr(x))$	$\sim Sx\ \neg Tr(x)$	$\sim Sx\ Tr(x)$
$p(x) \leftrightarrow 1$	$p(x) \leftrightarrow 0$	$p(x) \leftrightarrow \neg x$	$p(x) \leftrightarrow x$
$x_0=1$: 0,0,0,0,... $x_0=0$: 1,0,0,0,...	$x_0=1$: 0,1,1,1,... $x_0=0$: 1,1,1,1,...	$x_0=1$: 1,0,1,0,... $x_0=0$: 0,1,0,1,...	$x_0=1$: 0,0,0,0,... $x_0=0$: 1,1,1,1,...
 ~T (F)	 ~F (T)	 ~A (A)	 ~E (E)

Таблица 2

7. Определение эквивалентности самореферентных формул через топологическую эквивалентность

Как определено в пункте 6, самореферентные формулы интерпретируются нами на движениях по траекториям динамических систем. Поэтому при определении семантики формулы, представляющей собой эквивалентность двух самореферентных формул типа

$$\mathrm{S}x\boldsymbol{P}(x) \leftrightarrow \mathrm{S}y\boldsymbol{Q}(y), \tag{7.1}$$

естественно использовать топологическую эквивалентность наборов траекторий динамических систем, ассоциированных с нашими самореферентными формулами.

В [4] дано определение того, какие два набора траекторий динамических систем можно считать топологически эквивалентными. Для нашего случая это определение можно трансформировать в такое: два набора траекторий можно считать топологически эквивалентными, если можно устроить (гомеоморфное) отображение, при котором:

- устойчивая неподвижная точка одного набора траекторий отображается в устойчивую неподвижную точку другого набора траекторий,
- неустойчивые неподвижные точки одного набора траекторий отображаются в неустойчивые неподвижные точки другого набора траекторий,
- устойчивые циклы одного набора траекторий отображаются в устойчивые циклы другого набора.

Будем обозначать такую эквивалентность значком ≡.

Анализируя наборы траекторий наших атомарных самореферентных формул, можно прийти к следующим выводам:

1. Каждый из четырех наборов траекторий топологически эквивалентен самому себе. Это позволяет поставить в диагональных ячейках таблицы для ≡ единицы "1".
2. Набор траекторий, обозначенный нами как F, топологически эквивалентен набору траекторий T; это позволяет поставить в ячейках на пересечении T и F также единицы "1".
3. Других топологически эквивалентных наборов траекторий среди указанных четырех нет, а потому оставшиеся ячейки в таблице эквивалентности ≡ заполним нулями "0".

Построенная по таким резонам таблица для эквивалентности ≡ выглядит следующим образом:

≡	T	F	A	E
T	1	1	0	0
F	1	1	0	0
A	0	0	1	0
E	0	0	0	1

(7.2)

Основываясь на анализе операции внешнего отрицания, сделанном в пункте 6, эквивалентность ≡ обладает таким важным свойством, как эквивалентность неклассических типов оценок своим отрицаниям:

$$\sim A \equiv A,\ \sim E \equiv E. \tag{7.3}$$

Но применение ее к "классическому" типу оценок приводит к тому, что классические оценки также оказываются неразличимы со своими отрицаниями, т.е. на них выполняются такие же соотношения, что и на неклассических оценках:

$$\sim T \equiv T,\ \sim F \equiv F. \tag{7.4}$$

А потому таблица для внешнего отрицания ~ выглядит так:

X	$\sim X$
T	T
F	F
A	A
E	E

(7.5)

или, после склеивания (в силу их неразличимости) T и F в одну истинностную оценку C – "классическую":

X	$\sim X$
C	C
A	A
E	E

(7.6)

Две последних таблицы для операции отрицания можно записать в одну строчку, сформулировав следующую важную ТЕОРЕМУ:

Теорема. При определенных нами логических связках отрицания ~ и эквивалентности ≡ истинностная оценка **любого** самореферентного предложения φ инвариантна относительно операции отрицания ~:

$$(\forall\varphi)\ \varphi \equiv \sim\varphi. \tag{7.7}$$

Заметим, что наши действия по поиску адекватной семантики для самореферентных предложений можно представить как поиск решения уравнения S*x**P(x)* ↔ ***P(***S*xP(x))* в классе траекторий дискретных двоичных динамических систем.

Литература

1. *Карпенко А.С* Истинностные значения. Что это такое? // Исследова-

ния по неклассическим логикам. М, 1989. С. 38-53.
2. *Степанов В.А.* Использование динамических систем в семантике аутореферентных предложений М.: ВЦ РАН, 1997.
3. *Степанов В.А.* Содержательная семантика самореферентных предложений на базе динамических систем. М.: ВЦ РАН, 2002.
4. *Шарковский А.Н., Коляда С.Ф., Сивак А.Г., Федоренко В.В.* Динамика одномерных отображений. Киев: Наук. думка, 1989.
5. *Emily M.* Pierce's Paradoxical Solution to the Liar's Paradox // NDJFL, Vol. XII. N. 3. 1975.
6. *Feferman S.* Toward useful type-free theories I // The Journal of Symbolic Logic, Vol. 49. 1984. P. 75-111.

В.Х.Хаханян

Интуиционистский вариант для NF[1]

An intuitionistic version of the famous W.Quines «New Foundations», which we call NFI, is suggested. We proved that NFI is equiconsistent with NF[2].

В 1937 г. Куайн (W.Quine) предложил аксиоматическую систему теории множеств, получившую название «Новые основания» (по заголовку работы Куайна, см [1]). С другой стороны, начиная с 1973 г., появляются работы, в которых рассматриваются интуиционистские варианты теорий множеств типа ТТ или ZF (такие теории можно было бы отнести к группе 3 из классификации [3]). В последние 30 лет в ряде работ была предложена достаточно мощная (равнонепротиворечивая с теорией множеств Цермело-Френкеля) аксиоматическая система теории множеств с интуиционистской логикой, обладающая рядом конструктивных свойств: свойством полной экзистенциальности, совместностью с принципами Чёрча, Брауэра и униформизации и т.д. (см. [4], [5]).

В настоящей заметке приводится вариант системы Куайна NFI (именно тот вариант, о котором говорилось в сообщении на семинаре сектора логики и который представляется более естественным, чем вариант из [2]). Используя известную негативную интерпретацию Гёделя, расширенную к теории множеств, см. [6], мы доказываем равнонепротиворечивость системы Куайна и её предлагаемого интуиционистского варианта.

Дадим точную формулировку системы NFI. Язык первого порядка включает один сорт переменных (по множествам), один бинарный предикат $x \in y$ и обычный набор логических связок, кванторов и вспомогательных символов. Формулы строятся стандартным образом. Нелогические принципы: аксиома объёмности и схема аксиом свёртывания по стратифицируемым формулам (формула нашего языка называется стратифицируемой, если она может быть получена из формулы языка простой теории типов

---

[1] NF - система теории множеств «Новые основания» Куайна, см. [1].

[2] Здесь приводится вариант NFI, отличный от варианта из [2], но, конечно, они равнонепротиворечивы.

стиранием типов). К полученной системе добавим следующую аксиому, выводимую в NF:

$DCS^{-1} = x{=}{\approx}y \to (x{=}{\approx}z \to y{=}z)$, где $x{=}{\approx}y \Leftrightarrow \forall u[\neg\neg u \in y \leftrightarrow u \in x]$. Заметим, что в силу стратифицируемости формулы $\neg\neg u \in y$ и схемы аксиом свёртывания для всякого множества y существует множество x такое, что $x{=}{\approx}y$ (сравни с [6]). Конечно, аксиома DCS^{-1} выводима в NF. Теперь дадим синтаксический гёделев *-перевод формул языка NF так, как это определено в [6].

Теорема. $NF \vdash A \Rightarrow NFI \vdash A^*$

$NFU \vdash A \Rightarrow NFUI \vdash A^*$

Здесь NFU и NFUI получаются из NF и NFI соответственно ограничением аксиомы объёмности к непустым множествам.

Следствие. NF непротиворечива относительно NFI

NFU непротиворечива относительно NFUI

Доказательство. Схема аксиом свёртывания имеет вид $\exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow A(z))$, где формула A не содержит y свободно и является стратифицируемой. *-перевод этой схемы имеет вид $\neg\neg\exists y \forall z(\neg\neg z \in y \leftrightarrow A^*(z))$, где A^*- *-перевод формулы A. Индукцией по построению формулы A легко доказывается

Лемма. а) если A - стратифицируемая формула, то A^* - также стратифицируемая формула; б) в интуиционистском исчислении предикатов выводимо $A^* \leftrightarrow \neg\neg A^*$. Применяем теперь схему аксиом свёртывания к формуле A^* и получаем $\exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow A^*(z))$, затем $\exists y \forall z(\neg\neg\, z \in y \leftrightarrow \neg\neg A^*(z))$, затем (пункт б) леммы) $\exists y \forall z(\neg\neg z \in y \leftrightarrow A^*(z))$ и, наконец, двойное отрицание последней формулы.

Аксиома объёмности имеет вид

$\forall u(u \in x \leftrightarrow u \in y) \wedge x \in z \to y \in z$, а её *-перевод таков

$\forall u(\neg\neg u \in x \leftrightarrow \neg\neg u \in y) \wedge \neg\neg x \in z \to \neg\neg y \in z$.

Предположим, что в NFI выводимы оба конъюнктивных члена посылки. Для множеств $\approx x$ и $\approx y$ x и y единственные в силу аксиомы DCS^{-1} и поэтому $\forall u(u \in {\approx}x \leftrightarrow u \in {\approx}y)$ т.е. ${\approx}x{=}{\approx}y$ влечёт $x{=}y$.

Так как $x \in z$ влечёт $y \in z$, то $\neg\neg x \in z$ влечёт $\neg\neg y \in z$, что и завершает доказательство теоремы.

В заключение приведём несколько проблем из данной тематики. Будет ли аксиома бесконечности выводима в NFI? Аналогичный вопрос о выводимости отрицания аксиомы выбора. Для NFUI : будут ли для этой теории верны результаты Йенсена о независимости? Конечно, это неточные формулировки и требуется формальная постановка.

Литература

1. *Quine W.* New foundations for mathematical logic // American Mathematical Monthly, Vol. 44. P.70-80.
2. *Хаханян В.* Система NFI, равнонепротиворечивая с системой Куайна NF // Логические исследования. Вып. 9, М., 2002. С. 245-250.
3. *Гришин В.Н., Драгалин А.Г.* Аксиоматическая теория множеств // Математическая энциклопедия, Т.1. С. 104-109.
4. *Хаханян В.* Непротиворечивость интуиционистской теории множеств с принципами Чёрча и униформизации // Вест. Моск. Ун-та, Сер.1. Математика. Механика. № 5. 1980. С. 3-7.
5. *Myhill J.* Some properties of intuitionistic Zermelo-Fraenkel set theory // Lecture Notes in Mathematics. № 337. 1973. P. 206-231.
6. *Powel W* Extending Godel's negative interpretation to ZF // Journal of Symbolic Logic. Vol. 40, № 2. 1975. P.221-229.

А.В.Чагров, Л.А.Чагрова

О двух видах семантики Крипке для базисной логики А.Виссера[1]

A new kind of Kripke semantics for propositional basic logic **BPL** of A.Visser is introduced.

Базисная логика была введена в [2] как общая основа для определения интуиционистской логики и ее аналога в доказуемостном варианте, подобно тому как модальная логика **K4** может считаться общей основой для определения модальных логик **S4**, являющейся самым известным и исторически первым модальным напарником интуиционистской пропозициональной логики, и логики доказуемости **GL**, для которой в [2] была сформулирована так называемая формальная пропозициональная логика **FPL**, являющаяся «суперинтуиционистским» фрагментом **GL**. Для определенности отметим, что здесь имеется в виду перевод интуиционистского пропозиционального языка в модальный, при котором оператор необходимости навешивается на атомарные формулы (пропозициональные переменные и константу «ложь») и на импликацию. В этом смысле базисная логика **BPL**, изначально определенная в [2] синтаксически, является «суперинтуиционистским» фрагментом модальной логики K4. Этот факт не доказывался и даже не отмечался в [2], поскольку автора больше интересовала логика **FPL**. Однако доказательство погружения **FPL** в **GL** указанным переводом (в [2] рассматриваются на самом деле два перевода, но нас интересует только первый, он выше и описан) без труда переносится на случай погружения **BPL** и **K4**.

Для логики **BPL** в [2] дается семантика типа Крипке, весьма близкая к семантике интуиционистской логики, что избавляет нас от воспроизведения деталей. Укажем лишь (единственное!) отличие: шкалы Крипке **BPL** не обязательно рефлексивны. Для **FPL** семантика получается дополнительным постулированием иррефлексивности и конечности шкал.

---

[1] Работа выполнена при поддержеке РГНФ, грант № 01-03-00403 и частично РФФИ, грант № 00-06-80037.

Исходя из взаимоотношений **BPL** с модальными логиками, точнее, учитывая «устройство» рассматриваемого перевода, разумно, на наш взгляд, внести некоторые изменения в определения семантики Крипке из [2]. Это относится только к части определения истинности атомарных формул при заданной оценке.

В [2] дается следующее определение оценки (оно по существу совпадает с привычным интуиционистским): оценка есть функция f, сопоставляющая каждому миру w шкалы множество переменных $f(w)$ (об истинности которых в этом мире «известно»), причем так, чтобы выполнялось условие наследственности — если из мира w достижим мир v, то $f(w)$ включается в $f(v)$. Так вот, пропозициональная переменная p считается в [2] истинной в данном мире w, если p включено в $f(w)$, а далее истинность формул определяется минимальным образом так, чтобы выполнялись естественные условия на истинность сложных формул: в частности, импликация $\varphi \to \psi$ считается истинной в мире w, если для всякого мира v, достижимого из w, из истинности φ в v следует истинность в v формулы ψ. Таким образом, в силу указанной минимальности мы получаем, в частности, и то, что константа «ложь» ни в одном мире не оказывается истинной.

Наши изменения сводятся к следующему. Прежде всего, константа «ложь» в нашей семантике не является истинной ровно в таких мирах, из которых достижим хотя бы один мир, то есть если из мира ничего не достижимо, то константа «ложь» признается в нем истинной (это так называемые «мертвые» или, по предложению И.А.Горбунова, «слепые» миры, что, кстати, больше соответствует привычному словоупотреблению: xRy часто читают как «мир x видит мир y» или « из мира x виден мир y»). Это вполне соответствует введению так называемых «взрывающихся» миров в интуиционистской семантике, оказавшихся полезными для проведения интуиционистских доказательств полноты для интуиционистских теорий, см. [2]. Далее, пропозициональная переменная p в нашей семантике считается истинной в мире w при оценке f, если всякий достижимый из w мир v таков, что $p \in f(v)$. Это условие соответствует содержательному пониманию отношения $w \models \varphi$ (утверждение φ «следует принять» в ситуации w, если при любом развитии событий φ оказывается справедливым), которое в семантике А.Виссера [2] учтено только при описании истинности импликации.

Будем для краткости называть семантику Крипке из [2] семантикой первого типа, а семантику, которая получается из нее указанными изменениями, семантикой второго типа.

Заметим, прежде всего, что эти семантики по своим свойствам различны. Например, это проявляется в свойствах пропозициональной определимости классов шкал (шкалы в семантике и первого, и второго типов одинаковы, различие «лишь» в том, как оценивать формулы). Простейший пример: любая атомарная формула в семантике первого типа определяет пустое множество шкал, в то время как в семантике второго типа она определяет множество, состоящее из одноэлементной иррефлексивной шкалы. Мы опустим здесь вопросы о более тонких соотношениях проблем определимости в семантиках первого и второго типа.

Если рассматривать стандартную семантику Крипке для интуиционистской логики, то есть семантику частично упорядоченных множеств, то различие между семантиками двух типов стирается, поскольку все миры рефлексивны. Однако, как хорошо известно, интуиционистская логика допускает семантику, основанную на шкалах, содержащих иррефлексивные миры, и даже на иррефлексиных шкалах, то есть шкалах, в которых все (!) миры иррефлексивны; надо лишь следить за тем, чтобы выполнялось условие $\forall w \forall v (wRv \to \exists x\ (wRx \wedge xRv)$, которое, правда, в случае отказа от использования рефлексивных миров лишает возможности иметь финитную аппроксимируемость (разумеется, именно иррефлексивными шкалами). С другой стороны, для логики **FPL** эти два типа семантики кажутся весьма различными.

В [2] при доказательстве теоремы о погружении **FPL** в логику доказуемости использованы две конструкции перестройки моделей (шкал с оценками): из модели **FPL** в модальную и наоборот. Эту конструкцию удается модифицировать для того, чтобы получить семантическую эквивалентность двух типов семантик, выражаемую следующим утверждением.

Теорема 1. *Всякое множество формул, определяемое некоторым классом шкал в семантике первого типа, определимо некоторым классом шкал в семантике второго типа; всякое множество формул, определяемое некоторым классом шкал в семантике второго типа, определимо некоторым классом шкал в семантике первого типа.*

Эта теорема в качестве следствия позволяет утверждать полноту логик **FPL** и **BPL** относительно семантики второго типа, поскольку полнота относительно семантики первого типа в [2] уже доказана. Более того, в [2] доказывалась финитная аппроксимируемость этих логик шкалами в семантике первого типа, а в перестройке моделей и соответствующих шкал при доказательстве теоремы 1 конечные шкалы переходят в конечные. Значит, логики **FPL** и **BPL** финитно аппроксимируемы и в семантике второго типа. Оформим это наблюдение в виде теоремы 2, доказательство которой, впрочем, получается в ходе доказательства теоремы 1.

Теорема 2. *Всякое множество формул, определяемое некоторым классом конечных шкал в семантике первого типа, определимо некоторым классом конечных шкал в семантике второго типа; всякое множество формул, определяемое некоторым классом конечных шкал в семантике второго типа, определимо некоторым классом конечных шкал в семантике первого типа.*

Мы не формулируем здесь конкретные результаты о логиках **FPL** и **BPL**, отмеченные в абзаце перед теоремой 2 по той причине, что их можно извлечь из теорем о погружении в модальные логики **GL** и **K4** и воспользоваться соответствующими свойствами этих логик (полнотой, финитной аппроксимируемостью). Достоинством теорем 1 и 2 является то, что полнота и финитная аппроксимируемость логики в семантиках первого и второго типов эквивалентны для *любых* расширений базисной логики **BPL** и при обосновании этого вовсе не нужно обращаться к модальным напарникам рассматриваемых расширений. Более того, вполне возможно, что не все расширения **BPL** обладают модальными напарниками.

Теперь, для чего введена семантика второго типа? Дело в том, что эта семантика является более близкой к семантике Крипке для модальных логик нежели семантика [2], что дает значительные технические преимущества для дальнейших исследований ввиду технической разработанности «поля» пропозициональных модальных логик. В частности, возникает надежда доказательства теорем типа Блока-Эсакиа, по крайней мере, в частичном виде. Далее, более разумным становится путь формулирования табличных расширений **BPL**, а значит, и решения проблем, связанных с табличностью расширений. Впрочем, перечислять возможные направления исследований, для которых семантика второго типа могла бы быть полезной, можно долго в виду того, что эти исследования по сути только начинаются, хотя самой базисной логике уже более двух десятков лет.

Литература

1. *Драгалин А.Г.* Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. М.: Наука, 1979.
2. *Visser A.* A propositional logic with explicit fixed points // Studia Logica. Vol. 40. 1981. P. 155–175.

В.И.Шалак

Математические методы компьютерного контент-анализа текстов[1]

The article is devoted to basic mathematical methods of content-analysis.

Существует целый ряд заблуждений относительно того, что же такое контент-анализ. Очень часто этот термин дословно переводят на русский язык как "анализ содержания" и считают, что все поняли, что это просто содержательный анализ текстов, их истолкование.

Появление методов контент-анализа было реакцией на возникшую потребность в создании объективных методов анализа текстов, результаты которых не зависели бы ни от личности исследователя, ни от того, где и когда эти исследования проводятся. Т.е. требовалось найти такие методы оценки текстов, которые не вызывали бы разногласий между исследователями и были воспроизводимы в любое время и в любом месте.

Никто не возражает против содержательного анализа текстов, их истолкования и пр. Просто не следует называть это контент-анализом, который изначально задумывался именно как **строгий метод оценки текстов**.

Одним из определений контент-анализа является следующее: "**Контент-анализ – это методика выявления частоты появления в тексте определенных интересующих исследователя характеристик, которая позволяет ему делать некоторые выводы относительно намерений создателя этого текста или возможных реакций адресата.**"[2]

Когда в качестве наиболее объективной оценки текстов избрали частоту появления в нем различных характеристик, казалось, что оптимальное решение найдено. Вскоре поняли, что не все так просто.

Если попросить двух экспертов подсчитать, сколько раз, например, было упомянуто имя президента в конкретном номере конкретной газеты, то скорее всего их ответы совпадут. Причиной расхождений может стать лишь **невнимательность** при подсчете. Но вот если попросить этих же экспертов подсчитать в той же газете количество слов с негативной окраской, то результаты будут явно отличаться. Более того, один и тот же эксперт на одном и том же материале в разные моменты времени даст разные ответы. Причина кроется в **неоднозначности** критериев. Эта проблема стоит настолько остро, что она даже отдельно изучается. Существуют специальные методы оценки надежности результатов ручного контент-анализа, когда можно доверять экспертам, а когда нельзя.

Отдельный вопрос – **трудоемкость** контент-анализа. Имеется интересная методика, которая позволяет по тексту объемом от 80 до 150 слов получить достаточно полный психологический портрет автора. Анализируются в основном грамматические характеристики. На ручной анализ одного текста по той же методике уходит от 4 до 6 часов времени.

Гораздо хуже обстоят дела, когда приходится оценивать большие массивы текстов, поступающих непрерывно. Ручной контент-анализ становится просто невозможным.

Выходом в данной ситуации является разработка компьютерных методов контент-анализа. **Невнимательность** исключена: **неоднозначность** исключена, если критерии приняты; **трудоемкость** решается за счет быстродействия. Именно компьютерным методам контент-анализа текстов и посвящена настоящая статья.

К математическим оценкам текстов в компьютерном контент-анализе можно предъявить ряд требований. Во-первых, эти оценки должны сами по себе иметь хорошее математическое обоснование. Во-вторых, они должны быть просты, понятны и легко интерпретируемы даже людьми далекими от математики. Лишь в этом случае методы контент-анализа получат широкое распространение и применение в гуманитарных исследованиях. В-третьих, они должны допускать удобное наглядное представление не только в виде таблиц чисел, но и в виде графиков и диаграмм. Последнее просто в иной форме выражает требование к удобному интерфейсу компьютерных программ, позволяющему отображать данные как в дискретной, так и в аналоговой форме.

Характеристиками или элементами содержания, по отношению к которым применяется процедура подсчета, могут быть отдельные слова, словосочетания, предложения, абзацы, тексты. При этом сами характеристики никогда не являются самоцелью. Они интересны лишь в той степени, в какой являются индикаторами происходящего во внеязыковой реальности. В этом заключается существеное отличие контент-анализа от методов квантитативной лингвистики, от методов статистического изучения языка.

1. Оценки частот

В контент-анализе самыми бедными по содержанию и в то же время самыми фундаментальными являются простые оценки частот. Примем следующее обозначение

f(c,t) – частота встречаемости характеристики **c** в тексте **t**.

В качестве примера рассмотрим частоту (количество) упоминания фамилии конкретного политика в конкретном СМИ (газете). Если речь идет о частоте упоминания в отдельном номере газеты, то практически никаких выводов сделать из этого нельзя. Совсем другое дело, если отслеживать частоты на протяжении определенного отрезка времени и сопоставлять их с поступками этого политика. Отсюда можно прийти к выводу о том, что в поведении данного политика привлекает внимание журналистов анализируемого издания. Можно подсчитывать частоту упоминания политика не в отдельных номерах газеты, а помесячно, и сопоставлять ее не с поступками, а с регулярно публикуемыми рейтингами политических деятелей. Это явится подходящим материалом для исследования на тему, как влияет и влияет ли частота упоминания политика в СМИ на его рейтинг. Гораздо больше информации даст одновременный подсчет частот упоминания не одного, а нескольких политиков. Появляется возможность сравнивать их между собой. В этом случае, например, корреляция частот может послужить основанием для более глубокого изучения общего в поведении анализируемых политиков.

Отдельные слова как элементы содержания являются частным случаем того, что в контент-анализе называется категорией. **Категория – это множество слов, объединенных вместе по тому или иному признаку**. Так, например, в качестве категории ***ЖИЛЬЕ*** может выступать группа синонимов *{берлога, дом, жилище, жилье, логово, логовище, обиталище, обитель}*. Другими примерами могут быть категории агрессивно окрашенной лексики ***АГРЕССИВНОСТЬ***=*{бить, бушевать, грозить, назло, одолеть, погром, рычать,...}* и позитивно окрашенной лексики ***ПОЗИТИВ***= *{благодарность, бодрый, вкусный, добро, нежный, няня, теплый, шутка, юмор, ясный,...}*. Частота упоминания в тексте некоторой категории подсчитывается как сумма частот входящих в нее слов, т.е. если **K** – категория, то

$$f(K,t)=\Sigma_{w\in K}f(w,t).$$

Логической операцией, лежащей в основе создания категории, является определение через абстракцию. Вовсе не обязательно категория должна задаваться посредством заранее фиксированного списка слов. Иногда гораздо удобнее задать ее операционально. Примером такой категории может быть категория глаголов прошедшего времени. Определение принадлежности к ней будет заключаться не в сопоставлении со списком слов, а в распознавании грамматических признаков глагола прошедшего времени.

Более сложными являются категории, состоящие не просто из отдельных слов, а из целых словосочетаний. Например, категория ***МОРЕ****={Черное море, Средиземное море, Красное море, Балтийское море,...}*.

Контент-анализ с использованием категорий позволяет оценивать тексты на более высоком абстрактном уровне. Результаты, получаемые с их помощью, качественно богаче. Возьмем, например, категории ***ПОЗИТИВ***, ***НЕГАТИВ***, ***АГРЕССИВНОСТЬ***, ***АРМИЯ***, ***ПОЛИТИКА***, ***ЭКОНОМИКА***, ***РАЗВЛЕЧЕНИЯ***, ***ЗАКОН*** и подсчитаем частоты их встречаемости в интересующем нас издании на протяжении нескольких месяцев. Затем сопоставим, подсчитаем корреляцию, с ежемесячными рейтингами этого же издания среди различных социально-демографических групп. Положительные и отрицательные коэффициенты корреляции между частотами отдельных категорий и рейтингами подскажут, статьи какой тематики привлекают или отталкивают читателей той целевой группы, на которую рассчитано издание.

Как было сказано ранее, не только слова или словосочетания являются теми элементами содержания, частота которых может интересовать исследователя. Вместо того, чтобы подсчитывать частоту упоминания фамилии политика, можно подсчитывать частоту предложений, в которых упоминается политик. Очевидно, что в общем случае вторая величина будет меньше первой. Можно подсчитывать частоту абзацев, обладающих определенными признаками. Более крупными элементами являются целые тексты – статьи и книги. Например, подсчет частоты статей различной тематики позволяет делать выводы о редакционной политике издания. Аналогичный подсчет тематики книг, поступающих в научную библиотеку, позволяет судить о тенденциях в развитии науки, перспективных направлениях исследований и т.д.

2. Условные частоты

Простые частоты являются не самой подходящей оценкой текстов. Проблемы с ними могут возникнуть в том случае, если мы захотим сравнить разные по длине тексты. Например, пусть в некотором тексте $\mathbf{t_1}$ длиной в 1000 слов категория ***НЕГАТИВ*** встречается с частотой 20, а в тексте $\mathbf{t_2}$ длиной в 10000 слов - с частотой 100. Является ли пятикратная разница частот достаточным основанием для утверждения, что текст $\mathbf{t_2}$ окрашен более негативно, чем текст $\mathbf{t_1}$? Очевидно, что нет. Для вынесения такого утверждения необходимо сравнивать не простые частоты, а **условные**, т.е. доли которые составляет категория ***НЕГАТИВ*** в первом и втором тексте.

Условную частоту характеристики **c** в тексте t обозначим посредством **pr(c,t)**. Вычисляется она по формуле

pr(c,t)=f(c,t)/L(t), где **L(t)** – длина текста t

В качестве длины текста может быть взято общее количество в нем слов, количество предложений, количество абзацев. Обычно, если характеристика – это отдельное слово или категория слов, то и в качестве длины текста берется количество слов в нем.

В нашем примере **pr(*НЕГАТИВ*,$\mathbf{t_1}$)**=20/1000=0,02 больше, чем **pr(*НЕГАТИВ*,$\mathbf{t_2}$)**=100/10000=0,01. Т.е. более негативно окрашенным является не второй, а первый текст.

Иногда вместо условных частот удобнее использовать оценку процентного содержания. Для этого просто умножают условную частоту на 100 и тем самым получают процентное содержание.

Переход от использования простых частот к условным значительно расширяет сферу применимости методов контент-анализа. Если раньше все наши примеры имели дело с текстами одинаковой длины, то теперь это ограничение снято. Теперь мы можем сравнивать разные по длине статьи, разные по объему издания и пр.

3. Нормы

До сих пор для того, чтобы делать какие-то выводы, нам требовалось оценить как минимум два текста. Затем эти оценки либо сопоставлялись между собой, либо соотносились с некоторыми событиями в реальном мире, и на основании этого делались определенные выводы.

Представим, что перед нами поставлена задача классификации текстов по медицинской и немедицинской тематике. Причем требуется, чтобы это делал не человек, а компьютер. Решение довольно очевидно. Текст должен быть отнесен к медицинским в том случае, если частота встречаемости медицинских терминов в нем существенно выше, чем в обычной речи. Для этого следует сформировать категорию медицинских терминов **Km** и сопоставить ей условную частоту встречаемости в обычной речи **pr(Km,речь)**, которую назовем *нормой для категории* **Km**. При анализе конкретного текста **t** подсчитывается условная частота **pr(Km,t)**. Если она существенно больше нормы **pr(Km,речь)**, то текст **t** относят к числу медицинских. Аналогичная процедура может быть применена для дальнейшей классификации текстов по различным разделам медицины. Достаточно лишь сформировать соответствующие категории и сопоставить им нормы, но уже не на основании обычной речи, а на основании анализа представительной выборки различных медицинских текстов. Задача по формированию норм облегчается тем, что в настоящее время существует довольно много частотных словарей, относящихся к различным сферам человеческой деятельности, и нормы можно извлекать из них. Нормы можно вычислять и для отдельных людей. Они могут оказать весьма полезны, например, для определения душевного состояния человека. Так превышение в речи относительно личной нормы частоты категории ***НЕГАТИВ*** свидетельствует о том, что человек находится в дурном настроении.

Важно подчеркнуть, что понятие нормы всегда относительно. Для сугубо гражданского человека норма частоты употребления агрессивно окрашенной лексики одна, для профессионального военного - другая. Нормы могут меняться не только от одной профессионально определенной группы людей к другой, но и со временем. Причиной тому служат исторические изменения в жизни общества, отмирание старых идей и появление новых, заимствования из других языков, влияние на лексический состав языка таких факторов как общественная мораль и пр.

Более строго понятие нормы можно определить следующим образом. Имеется некоторое множество текстов **T**, которые объединены вместе по определенному признаку. Нас интересует норма характеристики **c** для **T**. Так как множество текстов **T** может быть слишком велико или недоступно целиком, то из него берется представительная конечная выборка **V⊆T** и уже для нее вычисляется условная частота **pr(c,V)**. Это и будет принято в качестве нормы характеристики **c** для **T**, которую мы обозначим посредством **nr(c,T)**. **Норма характеристики с для множества текстов T** - это ожидаемая условная частота ее встречаемости в произвольном тексте, принадлежащем данному множеству. Для представления того, как сильно отличается от ожидаемой частота встречаемости характеристики **c** в конкретном тексте **t∈T**, используются следующие оценки:

pn(c,t,T)=pr(c,t)/nr(c,T) – во сколько раз отличается **pr(c,t)** от **nr(c,T)**

pd(c,t,T)=[[pr(c,t)-nr(c,T)]/nr(c,T)]*100 – на сколько процентов отличается **pr(c,t)** от **nr(c,T)**.

Аналитика в первую очередь интересуют те тексты, для которых оценка **pn(c,t,T)** существенно отличается от 1, или же оценка **pd(c,t,T)** существенно отличается от 0. При этом дополнительного уточнения тербует термин *существенно отличаться*. На помощь приходит аппарат математической статистики. Обычно считают, что характеристика **c** имеет в тексте **t** биномиальное распределение с вероятностью **nr(c,T)**. Пусть реально в тексте **t** характеристика **c** встретилась **pr(c,t)*L(t)** раз в то время как ожидалось **nr(c,T)*L(t)**. Исходя из свойств биномиального распределения легко подсчитать, насколько мала вероятность того, что для произвольного текста t_i абсолютная величина $\mathbf{abs(pr(c,t_i)-nr(c,T))*L(t_i)} \geq \mathbf{abs(pr(c,t)-nr(c,T))*L(t)}$. Обычно, если вычисленная таким образом вероятность не превышает порога 0,05 (или 0,01), считается, что отклонение реальной частоты от ожидаемой существенно, т.е. не является случайным.

На практике гораздо чаще используют оценку, вычисляемую по формуле:

z(c,t,T)=[pr(c,t)-nr(c,T)]/SQRT[pr(c,t)*(1-pr(c,t))/L(t)]

Это разница двух условных частот, нормированная по стандартному отклонению. Ее имеет смысл использовать лишь в том случае, если **pr(c,t)*(1-pr(c,t))*L(t)**≥25. Эта оценка хорошо известна психологам и социологам. Именно с ее помощью обосновываются методы вычисления баллов многих психологических тестов. Если **z(c,t,T)**≥1,96, то мы сразу можем сказать, что вероятность данного события не превышает 0,05. Если же **z(c,t,T)**≥2,58, то вероятность этого события еще меньше и не превышает 0,01. Из формулы видно, что данная оценка прямо пропорциональна корню квадратному из длины текста **t**. Именно поэтому ее можно использовать для определения того, что данное событие не является случайным, но не для оценки того, насколько велико отклонение реальной частоты от ожидаемой. К сожалению, многие психологи и социологи не различают этого и потому их выводы очень далеки от научности. В применении к методам психологического тестирования замечательную критику по этому вопросу дал А.Г.Шмелев[3].

4. Контекстный анализ

Основная идея контекстного анализа заключается в том, что анализу подвергается не весь текст, а лишь некоторая выборка из него, являющаяся контекстом употребления характеристики **c**. Есть много способов задать контекст. Например, для слова **w** в качестве его контекста мы можем взять все предложения (абзацы, статьи, книги), в которых оно встречается. Вместо предложений мы можем считать контекстом по одному или более слов слева и справа от каждого вхождения **w** в текст.

Если текст **t** рассматривать как множество предложений, а предложение **s** рассматривать как множество слов, то контекст категории **C** в тексте **t** можно определить как

$$\mathbf{ctx(C,t)=\{s\text{-}\{w\}|\ w\in C,\ w}\ \text{входит в}\ \mathbf{s,\ s\in t}\}.$$

Выделенный контекст может анализироваться как самостоятельно, так и относительно основного текста. Во втором случае основной текст служит источником норм, которые затем используются при анализе контекста. Т.е. во втором случае для произвольной категории **K** мы интересуемся условной частотой **pr(K,ctx(C,t))** и сравниваем ее с нормой **nr(K,t)**, вычисляемой как **pr(K,t-{C})**, где **t-{C}={s-{w}| w∈C, s∈t}**

Дополнительно к этому мы можем выделить множество слов

col(C,t)={w| pr(w,ctx(C,t)) существенно больше **pr(w,t-{C})}**

В англоязычной литературе по контент-анализу такое множество называется **collocation** категории **C**. Отношение *существенно больше* валидизируется с помощью аппарата математической статистики по аналогии с тем, как это описывалось выше. Множество **col(C,t)** содержит много полезной информации о категории С. Например, **col({змея},речь)** будет содержать такие слова как *яд, кусать, ползать, пресмыкающееся,...*, а в **col({Путин},СМИ)** войдут слова *Владимир, президент, Кремль, Россия,...*.

5. Связи категорий

Мы можем интересоваться не только оценками данного текста по отдельных категориям, но и их взаимосвязями.

Любому тексту **t**, рассматриваемому как последовательность предложений $<s_1,...s_n>$, и категории **C** может быть сопоставлен булев вектор $\mathbf{b(t,C)}=<v_1,...v_n>$, где $v_i=1$, если для некоторого $w \in C$ имеет место $w \in s_i$, и $v_i=0$ в противном случае. На множестве векторов легко определить логические операции. Для двух векторов $\mathbf{b(t,C_i)}=<v_1,...v_n>$ и $\mathbf{b(t,C_j)}=<u_1,...u_n>$ они определяются следующим образом

$$b(t,C_i)\&b(t,C_j)=<\min(v_1,u_1),...,\min(v_n,u_n)>$$ – конъюнкция

$$b(t,C_i) \vee b(t,C_j)=<\max(v_1,u_1),...,\max(v_n,u_n)>$$ – дизъюнкция

$$\neg b(t,C_i)=<1-v_1,...,1-v_n>$$ - отрицание

Затем на множестве векторов можно ввести логические отношения *совместности, противоречия, подчинения* и пр. Очевидно, что таким образом задается некоторая логическая модель предметной области, о которой идет речь в тексте, или же модель когнитивной карты, присущей автору текста. Дальнейшее изучение этих моделей проводится с использованием аппарата классической, многозначной или вероятностной логики высказываний.

Особый интерес представляет анализ и визуализация отношений между категориями с использованием аппарата многомерного шкалирования, кластерного и факторного анализа.

Определим на множестве категорий (булевых векторов, сопоставленных категориям) функцию близости. Для каждого вектора $\mathbf{b(t,C_i)}=<v_1,...v_n>$ вычисляется оценка

$$p_i = \sum v_j/n \quad j=1,\dots,n$$

Тогда коэффициент корреляции для булевых векторов вычисляется следующим образом

$$cor(C_i,C_j) = (p_{i\&j} - p_i*p_j) / sqrt(p_i*(1-p_i)*p_j*(1-p_j)),$$

а функцию близости можно определить как

$$d(C_i,C_j) =1-cor(C_i,C_j)$$

Также в качестве оценки близости двух категорий часто используется метрика Хемминга, определяемая посредством формулы

$$h(C_i,C_j) = p_i + p_j - 2*p_{i\&j}$$

6. Контент-мониторинг

Если анализу подвергается массив упорядоченных во времени текстов, поступивших из одного источника, речь идет уже не о простом контент-анализе, а о контент-мониторинге текстовой информации. В этом случае, появляется дополнительная возможность применить математический аппарат многомерного регрессионного анализа и аппарат анализа временных рядов.

Так, например, контент-мониторинг пресс-релизов РАО ЕЭС позволил обнаружить закономерности, связывающие различные психолингвистические характеристики текстов с последующими биржевыми изменениями курса акций компании. Применение этих же закономерностей к анализу пресс-релизов компании ENRON позволило обнаружить ее неблагополучие задолго до наступившего осенью 2001 года банкротства. То, чего не заметили аудиторы, было обнаружено нами с использованием методов контент-мониторинга.

Другой пример контент-мониторинга связан с анализом пресс-релизов оборонного ведомства США и выявлением индексных показателей, свидетельствующих о подготовке и проведении военных операций.

И последний пример контент-мониторинга - это анализ динамики избирательных кампаний с целью предсказания победителя или внесения в нее необходимых корректив. Внешне неожиданный успех Сергея Глазьева на выборах красноярского губернатора также был предсказан на основании результатов сравнительного контент-мониторинга агитационных материалов лидеров кампании.

7. Шкалированные категории

До сих пор под категорий понималось некоторое множество характеристик, слов или словосочетаний, объединенных вместе по тому или иному признаку. В контент-анализе используются и более сложно устроенные категории, которые могут быть названы *шкалированными*. В них объединены характеристики, каждой из которых дополнительно приписана одна или несколько оценок по заранее фиксированным шкалам.

Так, например, А.Г.Шмелев с коллегами провел многолетние исследования по выявлению лексики, используемой для обозначения различных личностных черт. Было построено многомерное по числу выявленных личностных черт пространство и каждому из используемых слов была сопоставлена точка в этом пространстве. Координаты слова являются его оценками по каждой из шкал (осей) пространства. Всего было выявлено пятнадцать устойчивых шкал – *оценка эмоциональная, оценка интеллектуальная, активность, сила эмоциональная, сила физическая, раздражительность, практичность, нравственная оценка, ригидность, демонстративность, деятельность, скрытность, эгоизм, утонченность, необычность.* Оценка текстов по этим шкалам может заключаться в вычислении средней оценки и сравнении ее с нормой.

Другой известный пример шкалированных категорий – это звукобуквы А.П.Журавлева[4], позволяющие по набору осгудовских шкал оценивать фоносемантический образ русскоязычных текстов и слов.

Заключение

Перечисленные в статье математические методы компьютерного контент-анализа текстов далеко не исчерпывают всего многообразия таких методов. Например, ничего не было сказано о таком важном направлении в контент-анализе, как алгоритмические методы автоматического формирования категорий. Это отдельная и большая тема, которая требует своего подробного рассмотрения. Мы надеемся обратиться к ней в одной из последующих работ.

Практически все упомянутые в данной статье методы реализованы в компьютерной экспертной системе **ВААЛ.** Она существует вот уже десять лет и успела зарекомендовать себя как надежный и удобный инструмент контент-анализа текстов. Много дополнительной информации о системе и о результатах, полученных с ее помощью, можно найти в сети Интернет по адресу **http://www.vaal.ru**.

Литература

1. *Шалак В.И.* Интернет-сайт http://www.vaal.ru.
2. *Федотова Л.Н.* Анализ содержания - социологический метод изучения средств массовой коммуникации. М.: Ин-т социол. РАН, 2001.
3. *Шмелев А.Г.* Психодиагностика личностных черт. СПб.: Речь, 2002.
4. *Журавлев А.П.* Фонетическое значение. Л.: Изд-во ЛГУ, 1974.

Научное издание

ТРУДЫ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО СЕМИНАРА ЛОГИЧЕСКОГО ЦЕНТРА ИНСТИТУТА ФИЛОСОФИИ РАН. Выпуск XVI

Утверждено к печати Ученым советом
Института философии РАН

Отбор статей производится на основе анонимного рецензировани*я*
В авторской редакции
Корректура авторов
Художник *В.К.Кузнецов*

Лицензия ЛР № 020831 от 12.10 98 г

Подписано в печать с оригинал-макета 03.12 02
Формат 60x84 1/16. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл печ л. 8,00 Уч.-изд л. 5,54 Тираж 500 экз Заказ № 040

Оригинал-макет изготовлен в Институте философии РАН
Компьютерный набор авторов
Компьютерная верстка *С.А.Павлов*

Отпечатано в ЦОП Института философии РАН
119992, Москва, Волхонка, 14.