№ 21(1) / 2015

Russian Academy of Sciences
Institute of Philosophy

LOGICAL INVESTIGATIONS

Moscow
2015

№ 21(1) / 2015

Российская академия наук
Институт философии

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Москва
2015

Scientific-Theoretical Journal

Founded by the Institute of Philosophy of RAS in 2014

Issued biannually

ISSN 2074-1472

Научно-теоретический журнал

Учрежден Институтом философии РАН в 2014 г.

Выходит 2 раза в год

ISSN 2074-1472

Table of Contents

Содержание

От редколлегии

Наконец, это знаменательное событие произошло. Впервые в России с этого номера начал издаваться специализированный журнал по логике! И пусть пока только два номера в год — начало положено. Для всех, кто ждал этого момента, появилась реальная возможность погрузиться в удивительный мир логики, который в отличие от всех других наук, беспрестанно рефлексируя, ставит все с большим напряжением один и тот же вопрос: «Что есть логика?» Какая-то непостижимая тайна скрывается в недрах логического универсума, и эта тайна, проявляясь в различных эффектах, каждый раз указывает на нечто принципиально новое, требующее переосмысления статуса самой логики. Неудивительно, что Логика вызывает страстную привязанность и поклонение у ее приверженцев, горькое отторжение и порой глубокое разочарование у бывших адептов и мистический страх у остальных.

Путь к этому журналу был долгим и непростым. Только в 1993 г., благодаря усилиям выдающегося отечественного логика В.А. Смирнова (1931–1996), преодолев огромные трудности, удалось запустить ежегодник «Логические исследования». С 1993 по 2014 гг. было издано 20 выпусков, в которых также публиковались многие известные зарубежные логики. Выпуск 10 содержит библиографию изданных статей с 1 по 10 выпуск, а выпуск 20 — библиографию с 11 по 20 выпуск (на русском и английском языках).

Теперь в истории российской логики начата новая страница, и она несомненно приблизит нас к искомой тайне.

УДК 161.1

В.К. Финн

О неаристотелевском строении понятий

Финн Виктор Константинович
Сектор интеллектуальных информационных систем,
Отделение научных исследований по проблемам информатики,
Всероссийский институт научной и технической информации РАН.
Россия, 125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20.
e-mail: `finn@viniti.ru`

В статье рассматривается строение понятий, отличное от аристотелевской традиции, основанной на онтологии «вещь–свойства». Неаристотелевское строение понятий анализируется на примере процедурных понятий ДСМ-метода автоматического порождения гипотез. Для процедурных понятий предлагается уточнение и расширение треугольника Г. Фреге. Для процедурных понятий треугольник Г. Фреге, образованный интенсионалом (содержанием), экстенсионалом (объемом), дополняется процедурным выражением, преобразующим исходные данные посредством интенсионала в экстенсионал. В статье приводится пример нарушения так называемого «закона обратного соотношения» объема и содержания понятия для понятий ДСМ-метода автоматического порождения гипотез. Формулируются особенности неаристотелевского строения понятий как средств организации знаний, а не «формы мышления». На примере понятий, представляющих ДСМ-рассуждения, демонстрируется отличие их строения от понимания понятий в аристотелевской традиции. В статье обсуждается также проблема преобразования идей в точно характеризуемые понятия.

Ключевые слова: аристотелевская традиция понятий, экстенсионал (объем), интенсионал (содержание), индуктивные методы Д.С. Милля, ДСМ-рассуждения, процедурные понятия, треугольник Г. Фреге

1 Введение

В [15] Э. Кассирер высказал идею о том, что аристотелевская концепция понятий порождена его онтологией «вещь–свойство». Эта онтология, по мнению Э. Кассирера, определила аристотелевскую традицию в характеризации понятий посредством «содержания» и «объема», где под содержанием и объемом понимаются совокупность существенных признаков и множество объектов, ими обладающих, соответственно.

Эта традиция была уточнена и развита логиками Пор-Рояля [4, 16].

Аристотелевская традиция понимания понятий, которая была представлена в учебниках традиционной формальной логики [41], основана на допущениях, формулируемых ниже.

Д1. Понятие есть **форма мышления**.

Д2. Понятие образовано содержанием и объемом, где под **содержанием** и **объемом** понимается совокупность существенных признаков и множество объектов, ими обладающих, соответственно.

Д3. Имеет место Закон обратного соотношения содержания и объема: расширение содержания добавлением новых признаков уменьшает объем, а добавление новых объектов обедняет (уменьшает) содержание [41].

Следует заметить, что основным и широко обсуждаемым типом понятий в аристотелевской традиции является их строение «род–вид». Примерами таких понятий являются **остенсивные** понятия, представляющие данные непосредственного восприятия [46]. Оценка знаний, представимых посредством остенсивных понятий, естественным образом характеризуется аристотелевской теорией истины (теорией соответствия).

Не только common sense знание, но и знание в науках о человеке и обществе весьма часто (а, может быть, преимущественно) используют в рассуждениях и актах коммуникации **идеи**, а не хорошо определимые или хорошо характеризуемые **понятия** [30]. Поэтому возникает естественное стремление рассмотреть строение точно характеризуемых идей, представимых как понятия, в результате преобразования (уточнения) этих идей [30].

Примером уточнения и формализации понятий в аристотелевской традиции является теория формальных понятий, использующая алгебраические решетки [50, 47, 44].

2 Неаристотелевское строение процедурных понятий

Развитие идей и методов научного направления исследований «Искусственный интеллект» (ИИ) породило необходимость формализации как представления знаний для баз фактов и баз знаний, так и автоматизированных рассуждений [19, 48, 31]. В силу того, что главным продуктом ИИ являются интеллектуальные системы, содержащие базы фактов и базы знаний, представление знаний посредством формальных языков стало актуальной проблемой логики интеллектуальных систем [43, 8].

В исследованиях в рамках ИИ выделяют три вида знаний — декларативные, процедурные и концептуальные [32]. Декларативные знания используются для описания фактов и знаний в базах фактов и базах знаний соответственно. Факты представимы посредством атомарных высказываний и их отрицаний, а знания представимы посредством высказываний с кванторами $\forall$ и $\exists$, комбинаций атомарных высказываний, образованных пропозициональными логическими связками, а также посредством задания процедур для преобразования данных. Процедурные знания являются средством реализации алгоритмов, применяемых в Решателе задач интеллектуальных систем. Эти знания используются для осуществления стратегий решения задач, состоящих из комбинаций различных видов рассуждений (в том числе индукции, аналогии, абдукции и дедукции) и вычислений.

Декларативными знаниями являются системы утверждений, характеризующие предметную область и используемую структуру данных (например, булевскую).

Концептуальным знанием для интеллектуальных систем является множество утверждений и определений понятий, выражающих принципы создания этих систем [31, 32]. Это знание является **метатеоретическим**, которым руководствуются создатели интеллектуальных систем.

В настоящей статье нас будет интересовать в основном процедурное знание, используемое в интеллектуальных системах, так как оно выразимо посредством **процедурных понятий, имеющих неаристотелевское строение**. В связи с этим рассмотрим процедурные понятия, применяемые при формализации и усилении индуктивных методов Д.С. Милля [21].

Идеи Д.С. Милля об индуктивных выводах, сформулированные в виде пяти правил — сходства, различия, сходства-различия, остатков и сопутствующих изменений [21], были формализованы в ДСМ-методе автоматического порождения гипотез [31, 1, 36]. Ниже рассмотрим формализацию и усиление индуктивного метода сходства.

Индуктивные методы Д.С. Милля формализуются средствами ДСМ-метода автоматического порождения гипотез (ДСМ-метод АПГ) [1, 31, 36], который является методологией и аппаратом поддержки научных исследований, осуществляемых в интеллектуальных системах. ДСМ-метод имеет семь образующих его компонент — условия применимости, ДСМ-рассуждения, представление знаний в виде открытых квазиаксиоматических теорий (КАТ), метатеоретические исследования ДСМ-рассуждений (в том числе их дедуктивная имитация [1]) и процедурная семантика, распознавание эмпирических закономерностей в базах фактов [34], организация индуктивных процедур посредством алгебраических решеток, интеллектуальные системы, реализующие перечисленные компоненты ДСМ-метода АПГ.

Сформулируем теперь JSM-L — язык как для представления сходства фактов (его дескриптивная функция), так и для извлечения из данных отношения «причины–следствия», а также для приписывания степени правдоподобия порождаемым гипотезам (аргументативная функция JSM-L).

JSM-L

$X; Z; V$ (быть может, с нижними индексами) — переменные для объектов и подобъектов — это переменные сорта 1;

Y, U, W (быть может, с нижними индексами) — переменные для эффектов (множеств свойств) — это переменные сорта 2;

$Q, Q_1, Q_2, \ldots$ — константы (множества свойств), являющиеся значениями переменных Y, U, W и т.д.;

n, m, l, k, r, s (быть может, с нижними индексами) — переменные, значениями которых являются натуральные числа ($n \in \mathbb{N}$)) — это переменные сорта 3;

$-$ (дополнение, разность), $\cap$, $\cup$ — операции алгебры множеств;

$=$ — предикат равенства для термов сортов 1, 2, 3;

$\geq, \leq$ — предикаты для термов сорта 3;

$\subseteq, \subset$ — предикаты включения для множеств (объектов, подобъектов и свойств);

$X \Rightarrow_1 Y$ — предикат «объект X имеет множество свойств Y»;

$V \Rightarrow_2 W$ — предикат «V есть причина W»;

$\neg, \&, \vee, \rightarrow$ — логические связки двузначной логики;

$J_{\bar{\nu}}$ — J-операторы Россера–Тюркетта [49], где $\bar{\nu} = \langle \nu, n \rangle$ или $\bar{\nu} = (\tau, n)$, $\nu \in \{1, -1, 0\}$, $n \in \mathbb{N}$, а 1, -1, 0, τ — типы истинностных значений «фактическая истина», «фактическая ложь», «фактическое противоречие» и «неопределенность» соответственно; а $\langle \nu, n \rangle$ — истинностное значение, где n — степень правдоподобия гипотез, выражающая число применений правил правдоподобного вывода (индукции и аналогии); (τ, n) — множество истинностных значений, определяемых рекуррентным образом: $(\tau, n) = \{\langle 1, n+1 \rangle, \langle -1, n+1 \rangle, \langle 0, n+1 \rangle\} \cup (\tau, n+1)$;

$\forall$, $\exists$ — кванторы всеобщности и существования (соответственно для переменных сортов 1, 2, 3).

Термы и формулы JSM-L определяются стандартным образом, но с существенным добавлением формул и термов и кванторов по кортежам «переменной длины» [25].

При поиске и порождении эмпирических зависимостей в базах фактов (БФ) требуется установить сходство или различие фактов на конечном, но заранее неопределенном множестве примеров. Число таких примеров k, следовательно, является переменной величиной (k называется параметром эмпирической индукции). Это обстоятельство вызывает расширение языка логики предикатов $1^{\underline{\text{ого}}}$ порядка посредством введения формул «переменной длины и кванторов по кортежам» [25]. JSM-L является языком слабой логики предикатов $2^{\underline{\text{ого}}}$ порядка [5], в котором выразимо транзитивное замыкание.

JSM-L является J-определимым языком бесконечно-значной логики с конечным числом типов истинностных значений [2] $(1, -1, 0, \tau)$, которым соответствует четырехзначная логика аргументации [35].

В [10] было установлено, что исходные предикаты ДСМ-метода АПГ для конечных моделей выразимы в логике предикатов $1^{\underline{\text{ого}}}$ порядка, но для моделей произвольной мощности они выразимы в языке слабой логики предикатов $2^{\underline{\text{ого}}}$ порядка (в языке с кванторами по кортежам).

Формулами «переменной длины» JSM-L с кванторами по кортежам являются формулы вида $\exists k \exists X_0 \exists X_1 \ldots \exists X_{k-1} \exists Y_0 \ldots \exists Y_{k-1}$ $(\ldots \mathop{\&}\limits_{i=0}^{k-1} J_{\bar{\nu}}(X \Rightarrow_r Y_i) \,\&\, \ldots)$, $T_1 \cap \cdots \cap T_k = T$, $\mathop{\vee}\limits_{i=1}^{k}(X = X_i)$, $\mathop{\vee}\limits_{i=1}^{k}(Y = Y_i)$, а T_i, T — термы[1].

Рассматриваемая версия ДСМ-метода АПГ основана на процедурной семантике PrSem с булевской структурой данных [36].

Пусть $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$ — исходные множества объектов и свойств соответственно, а $\mathcal{B}_i = \langle 2^{U^{(i)}}, \emptyset, U^{(i)}, -, \cap, \cup \rangle$ — булевы алгебры $(i = 1, 2)$, образующие структуру данных ДСМ-метода АПГ. Предикаты $X \Rightarrow_1 Y$ и $X \Rightarrow_2 Y$ определяются посредством отображений: $\Rightarrow_i$: $2^{U^{(1)}} \times 2^{U^{(2)}} \to V_{in}$, где $i = 1, 2$, а $V_{in} = \{\langle \nu, n \rangle | (\nu \in 1, -1, 0) \& (n \in \mathbb{N})\} \cup \{(\tau, n) | n \in \mathbb{N}\}$, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, а $1, -1, 0, \tau$ — типы истинностных значений; $\langle \nu, n \rangle$ — истинностные значения, где n — их степень правдоподобия, выражающая число применений правил правдоподобного вывода (п.п.в.)[2].

V_{in} — множество **внутренних** (фактических) истинностных значений в смысле Д.А. Бочвара.

[1]Использование многоточия $(\ldots)$ эвристически удобно для представления формул с кванторами по кортежам.

[2]Чем больше n, тем меньше степень правдоподобия гипотез с истинностным значением $\bar{\nu} = \langle \nu, n \rangle$, где $n > 0$.

Посредством t и f обозначим **внешние** истинностные значения двузначной логики «истина» и «ложь» соответственно. $V_{ex} = \{t, f\}$ — множество внешних истинностных значений в смысле Д.А. Бочвара [6].

Формулы $\mathrm{T}_1 \Rightarrow_1 \mathrm{T}_2$ и $\mathrm{T}_1 \Rightarrow_2 \mathrm{T}_2$, где T_1 и T_2 — термы, будем называть внутренними, так как их истинностные значения принадлежат множеству V_{in}.

$J_{\bar{\nu}}(C \Rightarrow_j Q) = \begin{cases} t, & \text{если } v[C \Rightarrow_j Q] = \bar{\nu} \\ f, & \text{если } v[C \Rightarrow_j Q] \neq \bar{\nu} \end{cases}$, где v — функция оценки, а C, Q — соответствующие константы.

Определим также оператор $J_{(\nu,n)}\varphi \rightleftharpoons \bigvee\limits_{i=0}^{n} J_{\langle \nu,i \rangle}\varphi$, где $\nu \in \{1, -1, 0\}$, $\rightleftharpoons$ — «равенство по определению».

Формулы $J_{\bar{\nu}}(\mathrm{T}_1 \Rightarrow_j T_2)$, $J_{(\tau,n)}(\mathrm{T}_1 \Rightarrow_j T_2)$ $(j = 1, 2)$, построенные посредством термов булевых алгебр $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ и отношений $\leq$ или $\geq$, будем называть **внешними** формулами.

Общее определение внешних формул строится индуктивно с использованием логических связок $\neg$, &, $\vee$, $\rightarrow$ и кванторов $\forall$, $\exists$. $V_{ex} = \{t, f\}$ есть область значений внешних формул.

Первая компонента ДСМ-метода АПГ характеризует условия его применимости. Они состоят в следующем:

1) возможность формализовать сходство фактов;

2) существование в базе фактов (БФ) как позитивных фактов ((+)-фактов), так и негативных фактов ((−)-фактов);

3) существование в БФ в неявном виде как позитивных причин, ((+)-причин), так и негативных причин ((−)-причин) изучаемых эффектов.

Для порождения (±)-причин применяются правила правдоподобного вывода 1$^{\underline{\text{ого}}}$ рода (п.п.в.-1). Они являются формализацией и усилением известных индуктивных методов (канонов) Д.С. Милля [21], идеи которых ранее формулировал Д. Гершель.

Формализация индуктивных процедур в ДСМ-методе АПГ основана на трех принципах — принципе адекватности предметной области и индуктивных процедур (**П1**), принципе сходства (**П2**) и принципе синтеза и взаимодействия познавательных процедур (индукции, аналогии и абдукции [36]) (**П3**).

П1. Предварительно распознается и характеризуется одна из трех возможных предметных областей (моделей):

W1 — множество случайных событий («Мир 1»); W2 — множество фактов, содержащих направленные позитивные и негативные влияния (детерминация изучаемых эффектов) («Мир 2»); W3 — множество фактов, содержащее как направленные влияния (детерминации изучаемых эффектов), так и случайные флуктуации, влияющие на результирующий эффект («Мир 3»).

П2. Сходство фактов влечет наличие (отсутствие) изучаемого эффекта и его повторяемость.

П3. ДСМ-рассуждение образовано тремя процедурами — порождением ($\pm$)-причин изучаемых эффектов посредством правил индуктивного вывода миллевского типа, порождением гипотез относительно наличия или отсутствия эффектов посредством аналогии, использующей ($\pm$)-причины (эта процедура является **индуктивным обобщением**) и, наконец, завершением рассуждения принятием гипотез, использующим абдукцию — объяснение начального состояния БФ.

Заметим, что ДСМ-метод АПГ реализует синтез познавательных процедур, соответствующий познавательному процессу — анализ данных (индукция) + предсказание (аналогия) + принятие гипотез посредством объяснения (абдукция).

Таким образом, ДСМ-метод использует три вида знаний — декларативное (описание фактов и гипотез), процедурное (правила вывода) и концептуальное — принципы ДСМ-метода.

Первое правило индуктивного вывода Д.С. Милля, названное им методом сходства [21], формализуется в ДСМ-языке посредством предикатов позитивного и негативного сходства $M^{+}_{a,n}(V,W)$ и $M^{-}_{a,n}(V,W)$ соответственно [36, Первое правило приведено в Приложении].

Определение позитивного предиката сходства $M^{+}_{a,n}(V,W)$ содержит пять обязательных компонент, которые соответствуют условиям применимости ДСМ-метода АПГ и принципам П1 – П3. Этими компонентами являются: (ЭУ) — экзистенциальные условия (существование (+)- и (−)-примеров[3])); (СХ) — условие сходства (σ)-примеров ($\sigma \in +,-$); (ЭЗ) — эмпирическая зависимость, представляющая причинное вынуждение (forcing) изучаемого эффекта; (УИ) — условие исчерпываемости множества сходных примеров, которые являются «родителями» гипотез о (σ)-причинах (оно гарантирует **максимальность** группировки этих примеров); k — нижняя граница числа рассматриваемых (сходных) примеров ($k \geq 2$)[4].

[3]Примерами являются факты и гипотезы (результаты предсказаний).

[4]Параметр k можно увеличивать в ходе препроцессинга.

Приведем соответствующие подформулы для $M^+_{a,n}(V,W)$, где «a» — имя метода сходства[5], n — параметр, представляющий число применений правил правдоподобного вывода ДСМ-рассуждений.

(ЭУ)$^+$ $(J_{(1,n)}(Z_1 \Rightarrow_1 U_1) \& \ldots \& (J_{(1,n)}(Z_k \Rightarrow_1 U_k))$,

(СХ) $(Z_1 \cap \cdots \cap Z_k = V) \& \neg(V = \emptyset)$,

(ЭЗ)$^+$ и (УИ) $\forall X \forall Y((J_{(1,n)}(X \Rightarrow_1 Y) \& (V \subset X)) \to ((W \subseteq Y) \& \neg(W \neq \emptyset) \& (\overset{k}{\underset{i=1}{\vee}} (X = Z_i))))$, где (УИ) есть $(\overset{k}{\underset{i=1}{\vee}} (X = Z_i))$.

Определим предикат $\tilde{M}^+_{a,n}(V,W,k)$, зависящий от параметров k и n, где n выражает число применений правил правдоподобного вывода. n представляет степень правдоподобия порождаемых гипотез с истинностными значениями $\bar{\nu} = \langle \nu, n \rangle$ и множеством возможных истинностных значений (τ, n), где $\nu \in \{1, -1, 0\}$)[6]. Предикат $\tilde{M}^+_{a,n}(V,W,k)$ с параметром n соответствует **итеративному** процессу порождения гипотез ДСМ-методом АПГ.

Для представления и формализации итеративной процедуры используется оператор $J_{(\nu,n)}\varphi \rightleftharpoons \overset{n}{\underset{i=0}{\vee}} J_{\langle \nu, i \rangle}\varphi$, где $\nu \in \{1, -1, 0\}$.

Определим теперь позитивный предикат сходства $M^+_{a,n}(V,W)$, посредством которого формализуется Первое правило индуктивного вывода Д.С. Милля [21].

$M^+_{a,n}(V,W) \rightleftharpoons \exists k \tilde{M}^+_{a,n}(V,W,k)$,

$\tilde{M}^+_{a,n}(V,W,k) \rightleftharpoons \exists Z_1 \ldots Z_k \exists U_1 \ldots U_k (J_{(1,n)}(Z_1 \Rightarrow_1 U_1) \& \ldots \& (J_{(1,n)}(Z_k \Rightarrow_1 U_k) \& (Z_1 \cap \cdots \cap Z_k = V) \& \neg(V = \emptyset) \& \forall X \forall Y ((J_{(1,n)}(X \Rightarrow_1 Y) \& (V \subset X)) \to ((W \subseteq Y) \& \neg(W = \emptyset) \& (\overset{k}{\underset{i=1}{\vee}} (X = Z_i)))) \& (k \geq 2))$.

Таким образом, строение определения $M^+_{a,n}(V,W)$ представимо следующим образом:

$M^+_{a,n}(V,W) \rightleftharpoons \exists k \exists Z_1 \ldots \exists Z_k \exists U_1 \ldots \exists U_k[(\text{ЭУ})^+ \& (\text{СХ}) \& (\text{ЭЗ}^+(\text{УИ})) \& (k \geq 2)]$, где $((\text{ЭЗ})^+(\text{УИ}))$ — эмпирическая закономерность, выражающая отношение «причина V следствия W» и содержащая условие исчерпываемости (УИ) сходных (+)-примеров.

Заметим, что формула, определяющая предикат $M^+_{a,n}(V,W)$, является его **интенсионалом** $\mathrm{Int}(M^+_{a,n}(V,W))$, а индекс «$a$» — его **именем**. Относительно заданной булевской структуры данных $\mathcal{B}_i = \langle 2^{U^{(i)}}, \emptyset, U^{(i)}, -, \cap, \cup \rangle$, где $i = 1, 2$, экстенсионалом $\mathrm{Ext}(M^+_{a,n}(V,W))$ является $\{\langle V, W \rangle | M^+_{a,n}(V,W)\}$ — множество пар $\langle C, Q \rangle$, выполняющих предикат $M^+_{a,n}(V,W)$, который является интенсионалом «a».

[5] Д.С. Милль использует термин «agreement».

[6] Заметим, что чем больше n, тем меньше степень правдоподобия гипотез.

Таким образом, строением понятия предиката позитивного сходства для Первого правила индуктивного вывода Д.С. Милля будет **треугольник Г. Фреге** [39]:

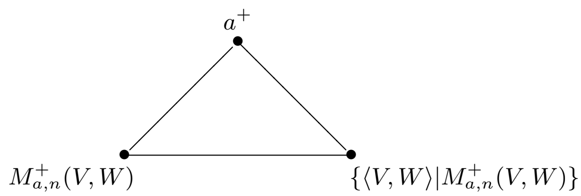

Рис. 1.

Итак, строением понятия позитивного предиката сходства является тройка $\langle \mathrm{a}^+, \mathrm{Int}(M^+_{a,n}(V,W)), \mathrm{Ext}(M^+_{a,n}(V,W))\rangle$. Обратите внимание на тот факт, что $\mathrm{Ext}(M^+_{a,n}(V,W))$, являющийся аналогом идеи «объем понятия», есть бинарное отношение $R^+_a = \{\langle V,W\rangle | M^+_{a,n}(V,W)\}$. Это обстоятельство характеризует один из аспектов неаристотелевского строения понятия, ибо не соответствует аристотелевской онтологии «вещь–свойство»[7].

Замечание 1-2. Рассмотрим процедуру упрощения понятия $M^+_{a,n}(V,W)$ посредством замены $\mathrm{Int}(M^+_{a,n}(V,W))$, заданного соответствующим определением, на множество признаков (свойств) $\mathrm{Simp}(M^+_{a,n}(V,W)) = (\text{ЭУ})^+, (\text{СХ}), (\text{ЭЗ}^+(\text{УИ})), k \geq 2$, состоящего из экзистенционального условия, сходства, эмпирической зависимости с условием исчерпываемости, нижней границы числа сходных (+)-примеров.

Тогда в соответствии с аристотелевской традицией **содержанием** понятия $M^+_{a,n}(V,W)$ будет множество указанных признаков (однако объемом будет бинарное отношение R^+_a).

Для уточнения Первого правила индуктивного вывода Д.С. Милля введем понятие отрицательного предиката сходства $M^-_{a,n}(V,W)$, которое соответствует условиям применимости ДСМ-метода АПГ — существованию (+)- и (−)-примеров изучаемого эффекта и существованию (+)- и (−)-эмпирических зависимостей типа «причина–следствие».

$M^-_{a,n}(V,W) \rightleftharpoons \exists k \tilde{M}^-_{a,n}(V,W,k)$, где

[7] Заметим, что Э. Кассирер в [15] отмечает, что существование отношений не согласуется с аристотелевской традицией.

$\tilde{M}^-_{a,n}(V, W, k) \rightleftharpoons \exists Z_1 \ldots \exists Z_k \exists U_1 \ldots \exists U_k (J_{(-1,n)}(Z_1 \Rightarrow_1 U_1) \& \ldots \& J_{(-1,n)}(Z_k \Rightarrow_1 U_k) \& (Z_1 \cap \cdots \cap Z_k = V) \& \neg(V = \emptyset) \& \forall X \forall Y ((J_{(-1,n)}(X \Rightarrow_1 Y) \& (W \subseteq Y)) \to ((V \subset X) \& (\overset{k}{\underset{i=1}{\vee}} (X = Z_i)))) \& (k \geq 2))$.

Для $\mathrm{Int}(M^-_{a,n}(V, W))$ и $\mathrm{Ext}(M^-_{a,n}(V, W))$ имеется треугольник Г. Фреге

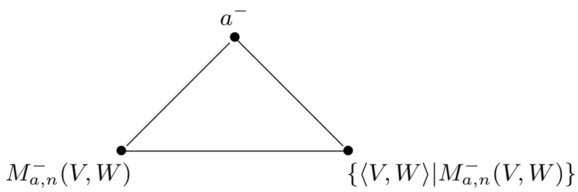

Рис. 2.

Рассмотрим аналогично $\mathrm{Simp}(M^+_{a,n}(V, W))$ $\mathrm{Simp}(M^-_{a,n}(V, W)) = (\text{ЭУ})^-, (\text{СХ}), (\text{ЭЗ}^-(\text{УИ})), k \geq 2$.

$\mathrm{Simp}(M^\sigma_{a,n}(V, W))$, где $\sigma \in \{+, -\}$, есть замена (упрощение) $\mathrm{Int}(M^\sigma_{a,n}(V, W))$ согласно аристотелевской традиции характеризации понятий.

$\mathrm{Simp}(M^\sigma_{a,n}(V, W))$ являются **минимальными** предикатами, реализующими правдоподобные амплиативные выводы[8]. Эти предикаты допускают усиления, которые порождают более информативные $(\pm)$-гипотезы о $(\pm)$-причинах в силу усложнения средств извлечения отношения «причина–следствие», представимые предикатом $V \Rightarrow_2 W$. Из определений $M^\sigma_{a,n}(V, W)$ следует, что на основании обзора примеров с предикатом $X \Rightarrow_1 Y$ посредством распознавания их сходства (СХ) и обнаружения эмпирической зависимости $(\text{ЭЗ})^\sigma$, где $\sigma \in \{+, -\}$, порождается гипотеза о $(\pm)$-причинах, выразимая посредством предиката $V \Rightarrow_2 W$. Эта гипотеза является результатом амплиативного вывода.

Сформулируем некоторое усиление предикатов $M^\sigma_{a,n}(V, W)$, называемое **запретом на контрпримеры**:

$(b)^+$ $\forall X \forall Y (((V \subset X) \& (W \subseteq Y)) \to (J_{(1,n)}(X \Rightarrow_1 Y) \vee J_{(\tau,n)}(X \Rightarrow_1 Y)))$,

$(b)^-$ $\forall X \forall Y (((V \subset X) \& (W \subseteq Y)) \to (J_{(-1,n)}(X \Rightarrow_1 Y) \vee J_{(\tau,n)}(X \Rightarrow_1 Y)))$.

Условие $(b)^+$ означает, что порождаемая посредством правила правдоподобного вывода (индукции) гипотеза $J_{\langle 1,n+1\rangle}(\mathrm{C} \Rightarrow_2 Q)$ на шаге применения ДСМ-рассуждения $n + 1$ такова, что неверно как

[8]Вывод называется амплиативным в смысле Ч.С. Пирса, если его результат не содержится в посылках.

$J_{(-1,n)}(X \Rightarrow_1 Y)\&(V \subset X)\&(W \subseteq Y)$, так и $J_{(0,n)}(X \Rightarrow_1 Y)\&(V \subset X)\&$ $(W \subseteq Y)$.

Аналогичное условие имеет место для $(b)^-$.

Предикаты, усиленные посредством $(b)^+$ и $(b)^-$, определяются следующим образом:

$M^+_{ab,n}(V,W) \rightleftharpoons M^+_{a,n}(V,W)\&(b)^+(V,W)$,

$M^-_{ab,n}(V,W) \rightleftharpoons M^-_{a,n}(V,W)\&(b)^-(V,W)$.

Индексы a^σ, $(\mathrm{a}b)^\sigma$, где $\sigma \in \{+,-\}$, являются именами M^σ — предикатов: $\mathbf{I}^+ = \{a^+, (\mathrm{a}b)^+\}$, $\mathbf{I}^- = \{a^-, (\mathrm{a}b)^-\}$. Сформулируем правила правдоподобного вывода первого рода (п.п.в.-1), формализующие и усиливающие индуктивные методы Д.С. Милля [36] для предикатов с именами x, y, где $x \in \mathbf{I}^+$ и $y \in \mathbf{I}^-$:

$$(\mathrm{I})^+_{(x,y)}\ \frac{J_{(\tau,n)}(V \Rightarrow_2 W), M^+_{x,n}(V,W)\&\neg M^-_{y,n}(V,W)}{J_{\langle 1,n+1\rangle}(V \Rightarrow_2 W)},$$
$$(\mathrm{I})^-_{(x,y)}\ \frac{J_{(\tau,n)}(V \Rightarrow_2 W), M^+_{x,n}(V,W)\&\neg M^-_{y,n}(V,W)}{J_{\langle -1,n+1\rangle}(V \Rightarrow_2 W)},$$
$$(\mathrm{I})^0_{(x,y)}\ \frac{J_{(\tau,n)}(V \Rightarrow_2 W), M^+_{x,n}(V,W)\&\neg M^-_{y,n}(V,W)}{J_{\langle 0,n+1\rangle}(V \Rightarrow_2 W)},$$
$$(\mathrm{I})^\tau_{(x,y)}\ \frac{J_{(\tau,n)}(V \Rightarrow_2 W), M^+_{x,n}(V,W)\&\neg M^-_{y,n}(V,W)}{J_{\langle \tau,n+1\rangle}(V \Rightarrow_2 W)}.$$

Замечание 2-2. Параметр n и операторы $J_{(\nu,n)}$, $J_{(\tau,n)}$, где $\nu \in \{1,-1,0\}$, в определении M-предикатов выражают итеративность процесса порождения гипотез до состояния стабилизации, когда новые гипотезы больше не возникают. Истинностные значения этих гипотез $\bar{\nu} = \langle \nu, n\rangle$, где $n \in \mathbb{N}$, отражают итеративность их порождения, которое является **конструктивным** (устанавливается сходство примеров (СХ) и наличие эмпирической зависимости «причина–следствие» $(\text{ЭЗ})^\sigma$, где $\sigma \in \{+,-\}$).

Конструктивный процесс порождения гипотез о причинах и гипотез о предсказании изучаемых эффектов в базе фактов интеллектуальных систем осуществляется посредством взаимодействия трех познавательных процедур — индукции (порождение гипотез о причинах), аналогии (предсказание изучаемых эффектов) и абдукции (принятие гипотез посредством объяснения начального состояния базы фактов). Таким образом, ДСМ-рассуждение, уточняющее и усиливающее индуктивные методы Д.С. Милля, является **синтезом** индукции, аналогии и абдукции.

Взаимодействие индукции и аналогии образует **конструктивный процесс** порождения гипотез (процедурное преобразование знаний), а абдукция завершает этот процесс. Вывод по аналогии является **индуктивным обобщением** посредством полученных гипотез о $(\pm)$-причинах (связь индукции и аналогии отмечал Д. Гершель [12]).

Определим ниже вывод по аналогии — правила правдоподобного вывода 2$^{\underline{\text{ого}}}$ рода (п.п.в.-2) ([36, ч. I]). П.п.в.-2 использует предикаты $\Pi_n^\sigma(V,W)$, определяемые ниже. $\Pi_n^\sigma(V,W) \rightleftharpoons \tilde{\Pi}_n^\sigma(V,W,k)$, где $\sigma \in \{+,-\}$, а k — параметр, выражающий число порожденных гипотез, представленных формулами $J_{(1,n)}(X_i \Rightarrow_2 Y_i)$, $J_{(-1,n)}(X_i \Rightarrow_2 Y_i)$, которые являются подформулами $\tilde{\Pi}_n^\sigma(V,W,k)$, $i=1,\ldots,k$.

Предикат $\tilde{\Pi}_n^+(V,W,k)$ выражает условие такое, что объект V содержит позитивные причины ((+)-причины) $X_1,\ldots,X_k$ для множеств свойств $Y_1,\ldots,Y_k$ соответственно, а множество свойств W, представляющее изучаемый эффект, покрывается множествами $Y_1,\ldots,Y_k$. Следовательно, $W = Y_1 \cup \cdots \cup Y_k$.

Вторым условием, содержащимся в $\Pi_n^+(V,W)$, является условие такое, что V не содержит ни отрицательных причин Z, ни Z таких, что $J_{(0,n)}(Z \Rightarrow_2 U)$ для любого непустого подмножества U множества W.

$\tilde{\Pi}_n^+(V,W,k) \rightleftharpoons \exists Y_1\ldots Y_k((\mathop{\&}\limits_{i=1}^{k} \exists X_i(J_{(1,n)}(X_i \Rightarrow_2 Y_i)\&(X_i \subset V)))\&(\bigcup\limits_{i=1}^{k} Y_i = W)\&\forall U(((U \subseteq W)\&(U \neq \emptyset)) \to \neg\exists Z((J_{(-1,n)}(Z \Rightarrow_2 U) \vee J_{(0,n)}(Z \Rightarrow_2 U))\&(Z \subset V))))$.

$\Pi_n^-(V,W)$ определяется аналогичным образом.

Предикаты $\Pi_n^0(V,W)$ и $\Pi_n^\tau(V,W)$ определяются следующим образом:

$\Pi_n^0(V,W) \rightleftharpoons \exists X_1\exists Y_1\exists X_2\exists Y_2(J_{(1,n)}(X_1 \Rightarrow_2 Y_1)\&J_{(-1,n)}(X_2 \Rightarrow_2 Y_2)\&\neg(Y_1 \cap Y_2 = \emptyset)\&(X_1 \subset V)\&(X_2 \subset V)\&(Y_1 \subseteq W)\&(Y_2 \subseteq W)) \vee \exists X\exists Y(J_{(0,n)}(X \Rightarrow_2 Y)\&(X \subset V)\&(Y \subseteq W))$,

$\Pi_n^\tau(V,W) \rightleftharpoons \neg(\Pi_n^+(V,W) \vee \Pi_n^-(V,W) \vee \Pi_n^0(V,W))$.

Имеют место утверждения:

$\forall V\forall W((\Pi_n^+(V,W) \to \neg(\Pi_n^-(V,W))$,

$\forall V\forall W((\Pi_n^\sigma(V,W) \to \neg(\Pi_n^0(V,W))$, где $\sigma \in \{+,-\}$.

Правила правдоподобного вывода для аналогии — п.п.в.-2 — формулируются следующим образом:

$$(\mathrm{II})^+ \ \frac{J_{(\tau,n)}(V \Rightarrow_1 W), \Pi_n^+(V,W)}{J_{\langle 1,n+1\rangle}(V \Rightarrow_1 W)},$$

$$(\mathrm{II})^- \ \frac{J_{(\tau,n)}(V \Rightarrow_1 W), \Pi_n^-(V,W)}{J_{\langle -1,n+1\rangle}(V \Rightarrow_1 W)},$$

$$(\mathrm{II})^0 \ \frac{J_{(\tau,n)}(V \Rightarrow_1 W), \Pi_n^0(V,W)}{J_{\langle 0,n+1\rangle}(V \Rightarrow_1 W)},$$

$$(\mathrm{II})^{\tau}\ \frac{J_{(\tau,n)}(V \Rightarrow_1 W), \Pi_n^{\tau}(V,W)}{J_{\langle\tau,n+1\rangle}(V \Rightarrow_1 W)}\ .$$

Формулы $J_{(1,n)}(X_i \Rightarrow_2 Y_i)$ используются для представления сходства (+)-примеров посредством условия (CX) из определения $M^+_{(x,n)}(V,W)$ (аналогично для $M^-_{(y,n)}(V,W)$). Поэтому следствия п.п.в.-2 $J_{(1,n+1)}(V \Rightarrow_1 W)$ имеют сходство с (+)-примерами из имеющейся базы примеров (она является расширением базы фактов). Это сходство с (+)-примерами из базы примеров выразимо посредством (+)-гипотез $J_{(1,n)}(X_i \Rightarrow_2 Y_i)$ (точнее, их реализаций посредством констант C_i и Q_i в $J_{(1,n)}(\mathrm{C}_i \Rightarrow_2 Q_i)$, где $i = 1, \ldots, k$).

Таким образом, $J_{(1,n+1)}(V \Rightarrow_1 W)$ **аналогичен** (+)-примерам, представленным посредством $X \Rightarrow_1 Y$. Следовательно, п.п.в.-2 есть **вывод по аналогии** (аналогичное имеет место и для $\Pi^{\sigma}_n(V,W)$, где $\sigma \in \{-, 0\}$).

Замечание 3-2. В ([1, гл. 2, с. 240–286]) имеет место теорема об обратимости правил правдоподобного вывода (п.п.в.-1 и п.п.в.-2):

$(*)$ $\forall V \forall W (J_{\langle 1,n+1\rangle}(V \Rightarrow_2 W) \leftrightarrow (M^+_{x,n}(V,W) \& \neg M^-_{y,n}(V,W) \& J_{(\tau,n)}(V \Rightarrow_2 W)))$,

$(**)$ $\forall V \forall W (J_{\langle 1,n+1\rangle}(V \Rightarrow_1 W) \leftrightarrow (\Pi^+_n(V,W) \& J_{(\tau,n)}(V \Rightarrow_1 W)))$.

Аналогичные утверждения имеют место для типов истинностных значений -1 (фактическая ложь), 0 (фактическое противоречие) и τ (неопределенность).

Если воспользоваться эквивалентностями (*) и (**) из **Замечания 3-2** и сделать соответствующие замены в предикатах $M^+_{x,n}(V,W)$ и $M^-_{y,n}(V,W)$, где $n \geq 2$, предикатов $\Rightarrow_1$ на предикаты Π^{σ}_{n-1}, где $\sigma \in \{+,-\}$, то получим **процедурные выражения** $[M^+_{x,n}(V,W)]$ и $[M^-_{y,n}(V,W)]$.

Эти процедурные выражения представляют схемы реализаций M-предикатов, которые превращаются в вычислительные процедуры посредством применения алгоритмов установления сходства ($\pm$)-фактов (при $n = 0$) и ($\pm$)-примеров (при ($n > 0$)) [14].

Заменяя в предикатах $\Pi^{\sigma}_n(V,W)$ входящие в них предикаты $\Rightarrow_2$ на соответствующие M-предикаты, согласно утверждению $(*)$ получим процедурные выражения $[\Pi^{\sigma}_n(V,W)]$.

Будем называть тактом ДСМ-рассуждения последовательное применение п.п.в.-1 (индукции) и п.п.в.-2 (аналогии). Тогда рекурсивная процедура ДСМ-рассуждения на Этапе I (до применения абдуктивного принятия гипотез) имеет следующую конструктивную интерпретацию:

Такт 1: $$\frac{M^+_{x,1}(V,W)\&\neg M^-_{y,1}(V,W)}{J_{\langle 1,1\rangle}(V\Rightarrow_2 W)}$$

$$\frac{[\Pi^+_1(X,Y)]}{J_{\langle 1,2\rangle}(X\Rightarrow_1 Y)}$$

Такт 2: $$\frac{[M^+_{x,2}(V,W)]\&[\neg M^-_{y,2}(V,W)]}{J_{\langle 1,3\rangle}(V\Rightarrow_2 W)}$$

$$\frac{[\Pi^+_2(X,Y)]}{J_{\langle 1,4\rangle}(X\Rightarrow_1 Y)}$$

. . . .

Такт n: $$\frac{[M^+_{x,n}(V,W)]\&[\neg M^-_{y,n}(V,W)]}{J_{\langle 1,2n-1\rangle}(V\Rightarrow_2 W)}$$

$$\frac{[\Pi^+_2(X,Y)]}{J_{\langle 1,2n\rangle}(X\Rightarrow_1 Y)},$$

где n — такт стабилизации ДСМ-рассуждения.

Аналогично формулируется конструктивная интерпретация для п.п.в.-1 $(\mathrm{I})^\sigma$ и п.п.в.-2 $(\mathrm{II})^\sigma$ соответственно, где $\sigma\in -,0,\tau$.

Конструктивизацией интенсионала Int процедурного понятия Prconcept будем называть средства реализации Int такие, что их результатом будет экстенсионал Ext для Prconcept. Этими средствами конструктивизации Int являются $[M^+_{x,n}(V,W)]$ и $[M^-_{y,n}(V,W)]$.

Так как экстенсионалами $M^+_{x,n}(V,W)$ и $M^-_{y,n}(V,W)$ являются $\{\langle V,W\rangle | M^+_{x,n}(V,W)\}$ и $\{\langle V,W\rangle | M^-_{y,n}(V,W)\}$ соответственно, где $x\in\mathbf{I}^+$, $y\in\mathbf{I}^-$, то $[M^+_{x,n}(V,W)](\Omega^+_{n-1}) = \mathrm{Ext}(M^+_{x,n}(V,W))$, $[M^-_{y,n}(V,W)](\Omega^-_{n-1}) = \mathrm{Ext}(M^-_{y,n}(V,W))$, где Ω^σ_{n-1} — множество примеров $J_{\langle 1,n-1\rangle}(\mathrm{C}\Rightarrow_1 Q)$ и $J_{\langle -1,n-1\rangle}(\mathrm{C}\Rightarrow_1 Q)$ соответственно, $\sigma\in\{+,-\}$; а $\mathrm{Ext}(M^+_{x,n}(V,W)) = \{\langle V,W\rangle | M^+_{x,n}(V,W)\}$, $\mathrm{Ext}(M^-_{y,n}(V,W)) = \{\langle V,W\rangle | M^-_{y,n}(V,W)\}$.

Напомним, что n — заключительный такт ДСМ-рассуждения[9].

Конструктивизацией процедурных понятий $M^+_{x,n}(V,W)$ и $M^-_{y,n}(V,W)$ будут соответственно процедурные выражения $[M^+_{x,n}(V,W)]$ и $[M^-_{y,n}(V,W)]$. Поэтому естественно дополнить треугольники Г. Фреге, преобразовав их в четырехугольники на Рис. 3.

---

[9]Соотношение процедурных выражений, интенсионалов и экстенсионалов соответствует идее А. Черча о том, что денотат имени есть значение функции F, зависящей от смысла имени: x, y — имена, их Int являются смыслом, а соответствующие процедурные выражения являются функциями [42].

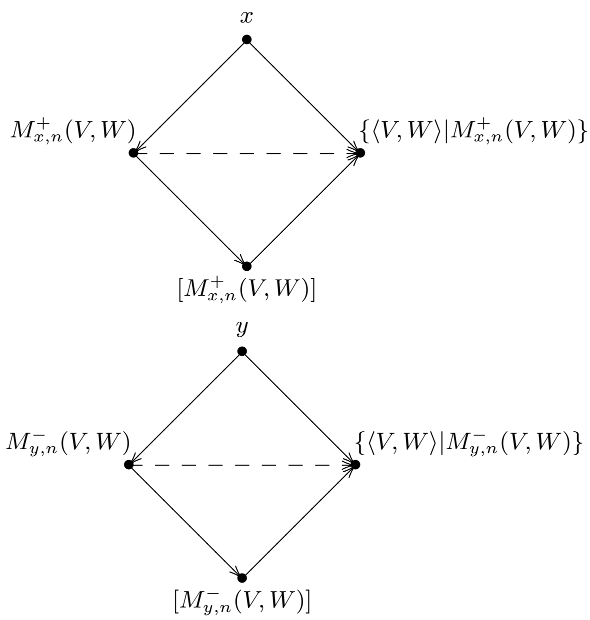

Рис. 3.

Таким образом, предикаты $M^{+}_{x,n}(V,W)$ и $M^{-}_{y,n}(V,W)$ становятся реализуемыми посредством процедурных выражений.

Аналогично могут быть построены соответствующие четырехугольники для предикатов $\Pi^{\sigma}_{n}(V,W)$, где $\sigma \in +,-,0,\tau$, у которых будут $\mathrm{Int}(\Pi^{\sigma}_{n}(V,W)) = \Pi^{\sigma}_{n}(V,W)$, $\mathrm{Ext}(\Pi^{\sigma}_{n}(V,W)) = \{\langle V,W\rangle | \Pi^{\sigma}_{n}(V,W)\}$ и процедурные выражения $[\Pi^{\sigma}_{n}(V,W)]$, являющиеся их конструктивизацией.

Если $\Pi^{\sigma}_{n}(V,W)$ содержат предикаты $X \Rightarrow_2 Y$, порожденные только одной стратегией ДСМ-рассуждения $\mathrm{Str}_{x,y}$ для заданных $M^{+}_{x,n}(V,W)$ и $M^{-}_{y,n}(V,W)$ [36, 27], то их именем будет пара $\langle x,y\rangle$. Тогда получим соответствующие треугольники Г. Фреге и их конструктивизации — четырехугольники на Рис. 4.

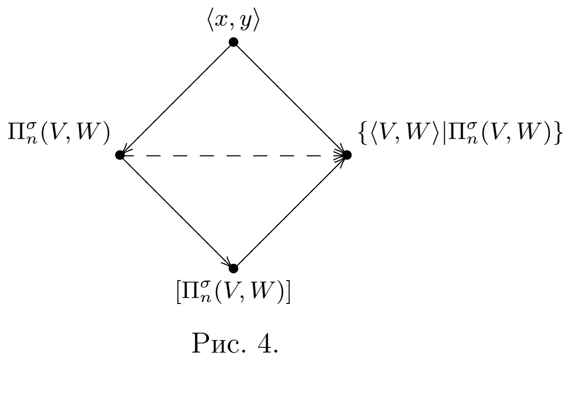

Рис. 4.

Замечание 4-2. Рассмотренные треугольники Г. Фреге и соответствующие четырехугольники являются ориентированными графами с одним помеченным ребром между Int и Ext, которое представляет конструктивное порождение экстенсионала посредством процедурных выражений соответствующих интенсионалов.

Замечание 5-2. Если преобразовать интенсионалы M-предикатов посредством их **упрощения**, введя **признаки** (атрибуты) — (ЭУ), (СХ), (ЭЗ) и (УИ), k, то соответствующие четырехугольники, лишенные конструктивизации (процедурных выражений), преобразуются в треугольники Г. Фреге. Однако в этих треугольниках Int представлен множеством признаков, а не описанием, содержащим возможность эффективной конструктивизации для порождения Ext. Без такой конструктивизации невозможна реализация **процедурных** понятий.

Понятие правдоподобного вывода $1^{\underline{\text{ого}}}$ рода (п.п.в.-1), реализующего формализации и усиления индуктивных методов вывода Д.С. Милля, представимо посредством синтеза понятий M^+-предикатов и M^--предикатов, которые соответствуют условиям применимости ДСМ-метода АПГ — существованию (+)- и (−)-фактов.

П.п.в.-1 (формализации индуктивных методов Д.С. Милля) в ДСМ-методе АПГ соответствуют четыре правила вывода $(\mathrm{I})^+$, $(\mathrm{I})^-$, $(\mathrm{I})^0$ и $(\mathrm{I})^\tau$. Каждое из этих правил $(\mathrm{I})^\sigma$ является процедурным понятием, образованным синтезом соответствующих M-предикатов и их отрицаний. Поэтому рассматриваются также Int и Ext отрицаний M^+- и M^--предикатов: $\neg M^+_{x,n}(V,W)$ и $\neg M^-_{y,n}(V,W)$.

Таким образом, возникают ориентированные графы, которые посредством синтеза понятий M-предикатов и их отрицаний представляют процедурные понятия правил индуктивного вывода.

Именами этих понятий будут $x\&\neg y$, $\neg x\& y$, $x\& y$ и $\neg x\&\neg y$ соответственно для правил $(\mathrm{I})^+_{x,y}$, $(\mathrm{I})^-_{x,y}$, $(\mathrm{I})^0_{x,y}$ и $(\mathrm{I})^\tau_{x,y}$, которые порождают гипотезы с оценками $\langle 1, n+1\rangle$, $\langle -1, n+1\rangle$, $\langle 0, n+1\rangle$ и $(\tau, n+1)$.

На Рис. 5 представлено понятие, соответствующее правилу $(\mathrm{I})^+_{x,y}$, интенсионалом которого является $M^+_{x,n}(V,W)\&\neg M^-_{y,n}(V,W)$, а экстенсионалом — $\{\langle V,W\rangle | M^+_{x,n}(V,W)\&\neg M^-_{y,n}(V,W)\}$.

Введем обозначения, используемые в Рис. 5.

$\mathrm{Int}(M^+_x) = M^+_{x,n}(V,W)$,

$\mathrm{Ext}(M^+_x) = \{\langle V,W\rangle | M^+_{x,n}(V,W)\}$,

$\mathrm{Int}(\neg M^-_y) = \neg M^-_{y,n}(V,W)$,

$\mathrm{Ext}(\neg M^-_y) = \{\langle V,W\rangle | \neg M^-_{y,n}(V,W)\}$,

$[M^+_x] = [M^+_{x,n}(V,W)]$,

$[\neg M_y^-] = [\neg M_{y,n}^-(V,W)]$,
$\mathrm{Int}(M_x^+ \& \neg M_y^-) = \mathrm{Int}(M_{x,n}^+(V,W) \& \neg M_{y,n}^-(V,W))$,
$\mathrm{Ext}(M_x^+ \& \neg M_y^-) = \mathrm{Ext}(M_{x,n}^+(V,W) \& \neg M_{y,n}^-(V,W))$,
$[M_x^+] \& [\neg M_y^-] = [M_{x,n}^+(V,W) \& \neg M_{y,n}^-(V,W)]$.

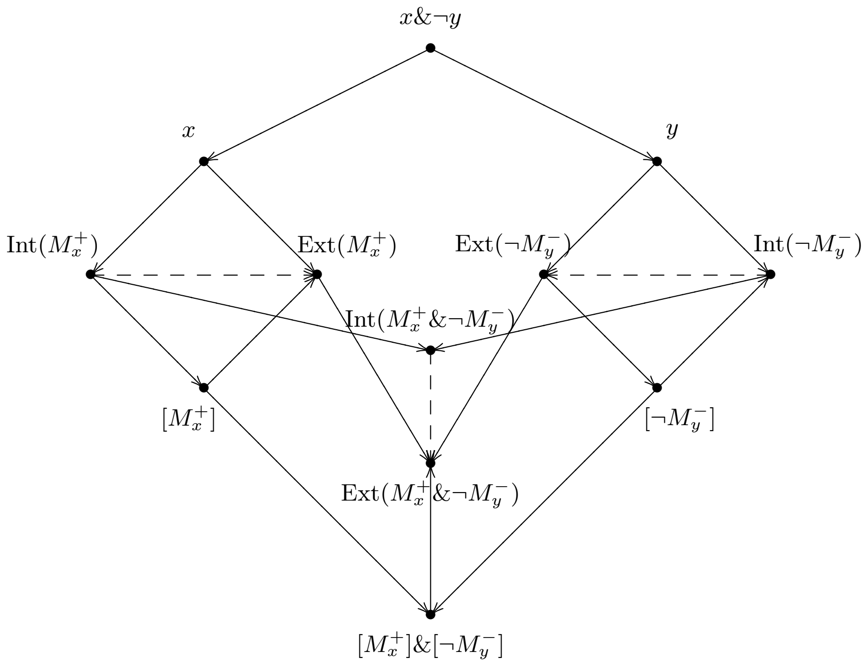

Рис. 5.

Аналогично представляются понятия с именами $\neg x \& y$, $x \& y$ и $\neg x \& \neg y$ для п.п.в.-1 $(\mathrm{I})_{x,y}^-$, $(\mathrm{I})_{x,y}^0$ и $(\mathrm{I})_{x,y}^\tau$ соответственно.

Таким образом, на Рис. 5 изображен синтез понятий $M_{x,n}^+(V,W) \& \neg M_{y,n}^-(V,W)$, образующих $(\mathrm{I})_{x,y}^+$ для стратегии ДСМ-рассуждений $\mathrm{Str}_{x,y}$ [36, 27].

Замечание 6-2. Ядром процедурных понятий М-предикатов будут ориентированные графы вида, представленного на Рис. 6:

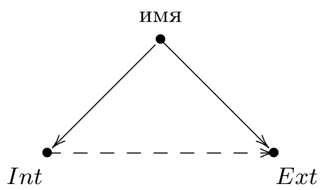

Рис. 6.

Аналогично представимы ядра для процедурных понятий П-предикатов, выражающих выводы по аналогии.

Таким образом, треугольники Г. Фреге являются ядрами процедурных понятий.

3 Нарушение «закона» обратного соотношения объема и содержания понятий

Термины «интенсионал» и «экстенсионал» были введены в комментариях к переводу книги Р. Карнапа «Значение и необходимость» [7] вместо «объема» и «содержания» понятий соответственно.

Для процедурных понятий (как будет показано ниже) расширение интенсионала может не порождать уменьшения экстенсионала. Закон же обратного соотношения интенсионала и экстенсионала требует такого уменьшения экстенсионала [41], что всегда утверждалось в курсах традиционной (аристотелевской) логики [41, 11].

Рассмотрим фрагмент процедурной семантики ДСМ-метода АПГ [36, 27] $\mathrm{Pr\,Sem} = \langle \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \Rightarrow_1, M^+_{a,n}(V,W), M^+_{ab,n}(V,W), M^-_{ab,n}(V,W), M^-_{a,n}(V,W)\rangle$, где $B_1 = \mathcal{B}_i = \langle 2^{U^{(i)}}, \emptyset, U^{(i)}, -, \cap, \cup\rangle$ — булевы алгебры, $i = 1, 2$.

Пусть $U^{(1)} = \{A, B, C, D, G, K, L, M, N, P, Q, S\}$, $U^{(2)} = \{l, p, q, m, g\}$.

Определим $X \Rightarrow_1 Y$ и $X \Rightarrow_2 W$, задав множество элементарных высказываний с J-оператором Ω_0 и Δ_1 соответственно, образующих диаграмму модели.

Ради удобства записи подмножества $U^{(1)}$ и U^2 будем представлять словами в алфавите $U^{(1)} \cup U^{(2)}$, полагая при этом коммутативность в словах — $AB = BA$ и $pq = qp$. Таким образом, $ABPQ = \{A, B, P, Q\}$.

Положим теперь $\Omega_0 = \{J_{\langle 1,0\rangle}(ABPQ \Rightarrow_1 pq), J_{\langle 1,0\rangle}(ABMN \Rightarrow_1 pql), J_{\langle -1,0\rangle}(CNSP \Rightarrow_1 mg), J_{\langle -1,0\rangle}(CNDG \Rightarrow_1 mg), J_{\langle \tau,0\rangle}(\mathrm{AB}L \Rightarrow_1 pq), J_{\langle \tau,0\rangle}(CNMK \Rightarrow_1 mg)\}$, $\Delta_1 = \{J_{\langle 1,1\rangle}(AB \Rightarrow_2 pq), J_{\langle -1,1\rangle}(CN \Rightarrow_2$

$mg)\}$, $\Omega_1 = \{J_{\langle 1,2\rangle}(ABL \Rightarrow_1 pq), J_{\langle -1,2\rangle}(CNMK \Rightarrow_1 mg)\}$, $\Delta_0 = \{J_{\langle \tau,0\rangle}(AB \Rightarrow_2 pq), J_{\langle \tau,0\rangle}(CN \Rightarrow_2 mg)\}$.

Замечание 1-3. Множество элементарных высказываний $\Delta_0 \cup \Omega_0 \cup \Delta_1 \cup \Omega_1$ является **непротиворечивым**, так как $J_{(\tau,0)}(ABL \Rightarrow_1 pq)$ и $J_{(\tau,0)}(CNMK \Rightarrow_1 mg)$ не противоречат $J_{\langle 1,2\rangle}(ABL \Rightarrow_1 pq)$, $J_{\langle -1,2\rangle}(CNMK \Rightarrow_1 mg)$ соответственно $J_{(\tau,0)}(ABL \Rightarrow_1 pq)$ и $J_{(\tau,0)}(CNMK \Rightarrow_1 mg)$, так как $(\tau,1) = \{\langle 1,2\rangle, \langle -1,2\rangle, \langle 0,2\rangle\} \cup (\tau,2)$.

Таким образом, диаграммой модели является $\Gamma = \Delta_0 \cup \Omega_0 \cup \Delta_1 \cup \Omega_1$.

$\mathrm{Ext}(M^+_{a,0}(V,W)) = \{\langle V,W\rangle | M^+_{a,0}(V,W)\} = \{\langle AB,pq\rangle\}$, $\mathrm{Ext}(M^-_{a,0}(V,W)) = \{\langle V,W\rangle | M^-_{a,0}(V,W)\} = \{\langle CN,mg\rangle\}$, $\mathrm{Int}(M^+_{a,0}(V,W)) = M^+_{a,0}(V,W)$, $\mathrm{Int}(M^-_{a,0}(V,W)) = M^-_{a,0}(V,W)$, $\mathrm{Int}(\neg M^-_{a,0}(V,W)) = \neg M^-_{a,0}(V,W)$.

Из определений $M^+_{a,n}(V,W)$ и $M^-_{a,n}(V,W)$ следует, что $M^+_{a,0}(AB,pq) = t$ и $M^-_{a,0}(AB,pq) = f$, где t и f — истинностные значения двузначной логики.

Рассмотрим условие запрета на контрпримеры $b^+(V,W)$ и $b^+(AB,pq)$:

$b^+(AB,pq) = ((AB \subset ABPQ)\&(pq \subseteq pq)) \to (J_{\langle 1,0\rangle}(ABPQ \Rightarrow_1 pq) \vee J_{(\tau,0)}(ABPQ \Rightarrow_1 pq))\&((AB \subset ABMN)\&(pq \subseteq pql)) \to (J_{\langle 1,0\rangle}(ABMN \Rightarrow_1 pql) \vee J_{(\tau,0)}(ABPQ \Rightarrow_1 pq)) = t$.

Так как $M^+_{ab,n}(V,W) \rightleftharpoons M^+_{a,n}(V,W)\&(b)^+(V,W)$, то $M^+_{ab,0}(AB,pq) = t$. И $\mathrm{Ext}(M^+_{ab,0}(V,W)) = \{\langle AB,pq\rangle\}$.

Таким образом, $\mathrm{Ext}(M^+_{a,0}(V,W)) = \mathrm{Ext}(M^+_{ab,0}(V,W)) = \{\langle AB,pq\rangle\}$, но их интенсионалы $\mathrm{Int}(M^+_{a,0}(V,W))$ и $\mathrm{Int}(M^+_{ab,0}(V,W))$ **не эквивалентны**, так как истинны утверждения: $\forall V \forall W(M^+_{ab,n}(V,W) \to M^+_{a,n}(V,W))$, $\neg\forall V\forall W(M^+_{a,n}(V,W) \to M^+_{ab,n}(V,W))$, где $M^+_{ab,n}(V,W) \leftrightarrow M^+_{a,n}(V,W)\&(b)^+(V,W)$.

Следовательно, **процедурные понятия** $M^+_{a,n}(V,W)$ **и** $M^+_{ab,n}(V,W)$ **имеют неэквивалентные интенсионалы, но равные экстенсионалы**. Это означает нарушение «закона» обратного соотношения экстенсионала и интенсионала [41]: $\neg(\mathrm{Int}(M^+_{a,n}(V,W)) \leftrightarrow \mathrm{Int}(M^+_{ab,n}(V,W)))$, но $\mathrm{Ext}(M^+_{a,n}(V,W)) = \mathrm{Ext}(M^+_{ab,n}(V,W))$.

Аналогично установим нарушение этого «закона» для процедурных понятий правил индуктивного вывода (п.п.в.-1).

Рассмотрим п.п.в. $(\mathrm{I})^+_{ab,a}$ и $(\mathrm{I})^+_{a,a}$ для предикатов $M^+_{ab,a}(V,W)$, $M^-_{ab,a}(V,W)$ и $M^+_{a,a}(V,W)$, $M^-_{a,a}(V,W)$ соответственно.

Так как $[M^+_{x,n}(V,W)]\&[\neg M^-_{y,n}(V,W)]\Omega_n = \{\langle V,W\rangle | M^+_{x,n}(V,W)\& \neg M^-_{y,n}(V,W)\} = \mathrm{Ext}(M^+_{a,0}(V,W)\&\neg M^-_{a,0}(V,W))$, то $\mathrm{Ext}(M^+_{a,0}(V,W)\& \neg M^-_{a,0}(V,W)) = \Delta^+_1$, где $\Delta^+_1 = \{J_{\langle 1,1\rangle}(AB \Rightarrow_2 pq)\}$ получено применением $(\mathrm{I})^+_{a,a}$ к Ω_0.

Но также $\mathrm{Ext}(M^+_{ab,0}(V,W)\&\neg M^-_{a,0}(V,W)) = \Delta^+_1$, где Δ^+_1 получено применением $(\mathrm{I})^+_{ab,a}$ к Ω_0. Очевидно, что $M^+_{a,n}(V,W)\&\neg M^-_{a,n}(V,W)$ и $M^+_{ab,n}(V,W)\&\neg M^-_{ab,n}(V,W)$ не эквивалентны, а следовательно, $\mathrm{Int}(M^+_{a,n}(V,W)\&\neg M^-_{a,n}(V,W))$ и $\mathrm{Int}(M^+_{ab,n}(V,W)\&\neg M^-_{ab,n}(V,W))$ различны.

Так как п.п.в.-1 $(\mathrm{I})^+_{a,a}$ и $(\mathrm{I})^+_{ab,a}$ имеют один и тот же экстенсионал Δ^+_1, то и п.п.в.-2 (правила вывода по аналогии) $(\mathrm{II})^+_{a,a}$ и $(\mathrm{II})^+_{ab,a}$ имеют *равные* экстенсионалы $\Omega^+_1 = \{J_{\langle 1,2\rangle}(ABL \Rightarrow_1 pq)\}$[10], а их интенсионалы (предикаты $\Pi^+_{a,a}(V,W)$ и $\Pi^+_{ab,a}(V,W)$) не эквивалентны. Чтобы установить это, достаточно сравнить их процедурные выражения, порождающие предикаты $X \Rightarrow_2 Y$.

Подобные опровергающие примеры «закона» обратного соотношения экстенсионала и интенсионала можно построить и для других стратегий ДСМ-метода АПГ, содержащих индуктивные методы различия и сходства–различия [27].

Замечание 2-3. Обратим внимание на сохранение нарушения «закона» обратного соотношения экстенсионала и интенсионала и для **упрощения** понятий, когда $\mathrm{Int}(M^+_{x,n}(V,W))$ заменяется на множество признаков $\mathrm{Simp}(M^+_{x,n}(V,W)) = \{(\text{ЭУ})+, (\text{СХ}), \text{ЭЗ}^+(\text{УИ}), k \geq 2\}$. Аналогичное имеет место и для $\mathrm{Int}(M^-_{y,n}(V,W))$.

Рассматриваемый эффект обусловлен тем, что интенсионал определяет процедуру, представленную рекурсивным процедурным выражением, а оно порождает экстенсионал. Совпадение же экстенсионалов для различных интенсионалов возможно из-за особенностей исходных данных процедур — множества Ω_0.

В [27] отмечалось, что в определения M-предикатов входит предикат $X \Rightarrow_1 Y$ такой, что $\Rightarrow_1$: $2^{U^{(1)}} \times 2^{U^{(2)}} \to V_{in}$, где $V_{in} = \{\langle \nu, n\rangle | (\nu \in \{1,-1,0\})\&(n \in \mathbb{N})\} \cup \{(\tau, n) | n \in \mathbb{N}\}$, а множества $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$ заданы. Если не фиксировать эти множества в определении $X \Rightarrow_1 Y$, то интенсионалы M-предикатов называются **абстрактными** (или общими) **интенсионалами**. Если же фиксированы $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$, то интенсионалы M-предикатов называются **конкретными** или **реализациями**

[10] Аналогичные рассуждения могут быть сделаны и для Ω^-_1 и $(\mathrm{I})^-_{a,a}$ и $(\mathrm{I})^-_{ab,a}$ и п.п.в.-2.

интенсионалов. Аналогично определяются **абстрактные** (или **общие**) **экстенсионалы**. **Экземпляр** понятия образован тройкой ⟨имя, конкретный интенсионал, конкретный экстенсионал⟩.

Сформулируем теперь важный тезис: **абстрактный интенсионал понятия равносилен знанию всех возможных его конкретных экстенсионалов**.

Таким образом, имеются абстрактные и конкретные треугольники Г. Фреге и четырехугольники для процедурных понятий, а пара конкретных Int и Ext для некоторого имени представляют экземпляр понятия, ему соответствующий. Смыслом же процедурных понятий естественно считать интенсионал и его конструктивизацию. В рассмотренном выше случае это $\mathrm{Int}(M^+_{x,n}(V,W))$ и $[M^+_{x,n}(V,W)]$. Заметим, что $[M^+_{x,n}(V,W)]$ порождает $\mathrm{Ext}(M^+_{x,n}(V,W))$.

4 Характеризация понятий с неаристотелевским строением

В настоящем разделе расширим знания о природе понятий с неаристотелевским строением. Сначала перечислим некоторые виды таких понятий.

1. Простым примером являются понятия, вводимые индуктивными определениями — например, понятие формулы в языках исчислений математической логики.

2. Важными примерами процедурных понятий являются различные уточнения идеи алгоритма — например, машины А. Тьюринга, машины Э. Поста и нормальные алгоритмы А.А. Маркова [17].

3. Примером непроцедурных понятий с неаристотелевским строением являются неявные определения понятия множества в различных аксиоматических системах теории множеств [40].

4. Детально рассматриваемыми процедурными понятиями в данной статье являются понятия ДСМ-метода АПГ: M-предикаты, П-предикаты, правила правдоподобного вывода (п.п.в.-1 — для индукции и п.п.в.-2 — для аналогии), ДСМ-рассуждение.

Общей характеризацией всех этих примеров понятий является то, что они — **средства организации знаний**, а не **форма мышления** как это утверждается в [11]. Сформулируем особенности понятий с неаристотелевским строением. Таковыми являются:

(1) ядро понятия — треугольник Г. Фреге;

(2) конструктивизация понятия (для процедурных понятий) — четырехугольник, который есть расширение ядра;

(3) синтез понятий — образование понятия из некоторых компонент;

(4) основание понятия — множество утверждений, характеризующих его экстенсионал;

(5) упорядочение релевантных понятий по их логической силе (для интенсионалов) и по отношению включения (для экстенсионалов);

(6) контакты понятий — перечень понятий, использующих данное понятие (представимых в некотором тезаурусе [20] или онтологии [18]);

(7) развитие понятия за счет его контактов и расширения экстенсионала (для открытых понятий, изменяемых посредством обучения на примерах[11].

Рассмотрим особенности строения неаристотелевских понятий на примере понятий ДСМ-метода АПГ [1, 36, 27].

Особенности (1) и (2) представлены ядрами понятий — интенсионалами $\mathrm{Int}(M^+_{x,n}(V,W))$, $\mathrm{Int}(\neg M^+_{x,n}(V,W))$, $\mathrm{Int}(M^-_{y,n}(V,W))$, $\mathrm{Int}(\neg M^-_{y,n}(V,W))$; $\mathrm{Int}(\Pi^\sigma_n(V,W))$, где $\sigma \in \{+,-,0,\tau\}$, а также соответствующими процедурными выражениями $[M^+_{x,n}(V,W)]$, $[\Pi^\sigma_n(V,W)]$ и т.д.

Эти ядра представимы треугольниками Г. Фреге, а их конструктивизации — соответствующими четырехугольниками.

Согласно [42] экстенсионал есть значение функции, заданной интенсионалом. Для процедурных понятий эта зависимость Ext от Int реализуется посредством процедурных выражений, расширяющих треугольник Г. Фреге до четырехугольника, в частности: $[M^+_{x,n}(V,W)]\Omega_n = \{\langle V,W\rangle | M^+_{x,n}(V,W)\}$, где Ω_n — представление позитивных примеров на n-ом такте ДСМ-рассуждений (примеры являются реализациями формулы $J_{(1,n)}(X \Rightarrow_1 Y)$).

(3) Синтез понятий есть важное проявление продуктивного мышления [9].

[11] Развитие понятий методологически может быть охарактеризовано как результат роста знания в смысле эволюционной эпистемологии К.Р. Поппера [24].

В ДСМ-методе АПГ имеются три синтеза понятий. Первым синтезом является образование правила индуктивного вывода посредством предикатов $M^{+}_{x,n}(V,W)$ и $M^{-}_{y,n}(V,W)$ (четыре их возможные комбинации — $(I)^{\sigma}_{xy}$, где $\sigma \in \{+,-,0,\tau\}$). Этот синтез иллюстрируется на Рис. 5. Вторым синтезом является образование такта ДСМ-рассуждения посредством комбинации правил $1^{\underline{\text{ого}}}$ рода (индукции) и правил $2^{\underline{\text{ого}}}$ рода (аналогии), которые образуют итеративный процесс до его стабилизации. Этот синтез объединяет п.п.в.-1 и п.п.в.-2, формулируемые посредством предикатов $M^{+}_{x,n}(V,W)$, $M^{-}_{y,n}(V,W)$ и $\Pi^{\sigma}_{n}(V,W)$, соответственно $(\sigma \in \{+,-,0,\tau\})$.

Наконец, имеется третий синтез — завершение ДСМ-рассуждения посредством принятия порожденных гипотез применением **абдукции** [26, 45, 36][12].

Схема абдуктивного принятия гипотез Ч.С. Пирса

D — множество фактов
H — множество гипотез
$E(H,D)$ — предикат «H объясняют D»

Всякая гипотеза h, $h \in H$, является правдоподобной.

В ДСМ-рассуждении эта идея Ч.С. Пирса формализуется посредством п.п.в.-1 (индукции), порождающих гипотезы о ($\pm$)-причинах H_2 (они представлены предикатами $V \Rightarrow_2 W$), и п.п.в.-2 (аналогии), порождающих предсказания (они представлены предикатами $X \Rightarrow_1 Y$). Абдуктивное же принятие гипотез основано на полной или частичной выполнимости аксиом каузальной полноты АКП$^{(+)}$ и АКП$^{(-)}$, характеризующих предметную область — модель, соответствующую условиям применимости ДСМ-метода АПГ:

АКП$^{(+)}$ $\forall X \forall Y \exists V (J_{\langle 1,0\rangle}(X \Rightarrow_1 Y) \to \exists n (J_{\langle 1,n\rangle}(V \Rightarrow_2 Y) \& (V \subset X) \& (V \neq \emptyset)))$,

АКП$^{(-)}$ $\forall X \forall Y \exists V (J_{\langle -1,0\rangle}(X \Rightarrow_1 Y) \to \exists n (J_{\langle -1,n\rangle}(V \Rightarrow_2 Y) \& (V \subset X) \& (V \neq \emptyset)))$.

АКП$^{(+)}$ выражает следующее утверждение: для всякого позитивного факта ($n = 0$), представимого формулой $J_{\langle 1,0\rangle}(X \Rightarrow_1 Y)$, найдется гипотеза ДСМ-рассуждения, порожденная на шаге и представимая формулой $J_{\langle 1,n\rangle}(V \Rightarrow_2 Y)$ ($n > 0$) такая, что $(V \subset X) \& \neg(V = \emptyset)$.

Посредством АКП$^{(+)}$ и АКП$^{(-)}$ формализуется акт принятия гипотез $H = H_1 \cup H_2$, где H_1 — множество гипотез о ($\pm$)-причинах, а H_2 —

---

[12] Определение абдукции, формализующее идею Ч.С. Пирса о том, что абдукция есть средство **принятия** порожденных гипотез, содержится в [36, ч. I].

множество гипотез-предсказаний. Таким образом, конструктивно уточняется схема Ч.С. Пирса и предикат $\mathrm{E}(H_1, \Omega_0)$, где Ω_0 — множество исходных фактов, представимых посредством предиката $X \Rightarrow_1 Y$.

(4) Основанием понятия ДСМ-рассуждения, а следовательно, понятий M-предикатов и правил правдоподобного вывода п.п.в.-1 (индукции) и п.п.в.-2 (аналогии) являются структура данных (булевы алгебры $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$) и рассмотренные выше аксиомы каузальной полноты АКП$^{(+)}$ и АКП$^{(-)}$. Их соединение образует квазиаксиоматические теории (КАТ), состоящие из процедурных аксиом, аксиом окончания ДСМ-рассуждения, аксиом АКП$^{\sigma}$, аксиом булевых алгебр и правил вывода $(\mathrm{I})^{\sigma}$, $(\mathrm{II})^{\sigma}$ $(\sigma \in \{+,-\})$ и правил вывода двузначной логики [36, ч. II, § 3].

КАТ $\mathfrak{I} = \langle \Sigma, \Sigma', \mathfrak{R} \rangle$, где — Σ есть открытое множество аксиом, содержащее перечисленные выше аксиомы, Σ' — открытое множество фактов и порождаемых гипотез. Заметим, что Σ лишь частично характеризует предметную область, а $\Sigma' = \bigcup\limits_{n=1}^{s} \Sigma'_n$ есть объединение состояний предметной области Σ'_n, s — номер последнего состояния предметной области для проводимого исследования.

Процедурные аксиомы представляют п.п.в.-1 и п.п.в.-2, например:

$A_1^{(+)}$ $\forall V \forall W ((J_{(\tau,n)}(V \Rightarrow_2 W) \& M^+_{x,n} \& \neg M^-_{y,n}(V < W)) \rightarrow J_{\langle 1,n+1 \rangle}(V \Rightarrow_2 W))$,

$A_2^{(+)}$ $\forall X \forall Y ((J_{(\tau,n)}(X \Rightarrow_1 Y) \& \Pi^+_n(X,Y)) \rightarrow J_{\langle 1,n+1 \rangle}(X \Rightarrow_2 Y))$.

Аксиомы булевых алгебр $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$, процедурные аксиомы и аксиомы окончания ДСМ-рассуждений образуют аксиоматическую теорию, которая осуществляет **дедуктивную имитацию ДСМ-рассуждений** [3].

В [3] установлена непротиворечивость этой аксиоматической теории, образующей дедуктивную имитацию ДСМ-рассуждений, а также единственность ее модели и обратимость правил правдоподобного вывода п.п.в.-1 и п.п.в.-2. Таким образом, понятия ДСМ-метода АПГ — M-предикаты, П-предикаты, правила правдоподобного вывода и само ДСМ-рассуждение имеют корректное основание, представленное в метатеоретических построениях. Однако добавление АКП$^{(\sigma)}$ может порождать **противоречивую теорию**, что требует применения процедур распознавания противоречивости и вычисления функционалов, выражающих степень противоречивости множеств порожденных гипотез, что необходимо при распознавании эмпирических закономерностей в базах фактов интеллектуальных систем [34, 13, 36, ч. II].

Заметим, что процедурные аксиомы характеризуют M- и П-предикаты и правила правдоподобного вывода, а АКП$^{(\sigma)}$ характеризуют предметную область, уточняя и формализуя условия применимости ДСМ-рассуждений. Аксиомы же $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ характеризуют как предметную область, так и выразительные средства для M- и П-предикатов.

(5) Предикаты $M^{+}_{x,n}(V,W)$ и $M^{-}_{y,n}(V,W)$, а также их отрицания сравнимы как по логической силе, так и по отношению включения множеств порождаемых гипотез. Естественно, что упорядочение по отношению выводимости применимо к интенсионалам, а отношение включения применимо к экстенсионалам. Поэтому имеются два типа алгебраических решеток — решетки Int и решетки Ext [27]. В [27] рассмотрены решетки, порождаемые предикатами методов сходства, различия, сходства–различия с возможным добавлением условий запрета на контрпримеры. Установлено, что эти решетки являются дистрибутивными. Таким образом, правила правдоподобного вывода п.п.в.-1 (для индукции) представимы произведениями соответствующих решеток.

Таким образом, М-предикаты и соответствующие им правила вывода **упорядочены** как системы понятий, что делает возможным их сравнение и систематизированное применение в стратегиях ДСМ-рассуждений. Интересен также тот факт, что решетки интенсионалов и решетки экстенсионалов **не являются изоморфными** (это характерно для процедурных понятий).

(6) Контакты понятий не являются особенностью только процедурных понятий. Эти контакты представимы в тезаурусах [20]. Контакты возникают для понятий любых видов, как **остенсивных**, так и **дискурсивных**, которыми являются процедурные понятия языков науки и технологий. Дискурсивными понятиями являются понятия, выразимые посредством систематических терминологий и используемые в рациональных рассуждениях. Разумеется, что все понятия, выраженные в языках науки, дискурсивны. Возможными средствами представления контактов понятий являются современные компьютерные онтологии [18], посредством которых реализуем информационный поиск знаний.

Внутренними контактами понятий ДСМ-метода АПГ являются упомянутые выше три синтеза, а внешними контактами являются понятие сходства, понятие интеллектуальной системы, понятие процедуры (алгоритма), понятие индукции, аналогии и абдукции, открытой теории, дедуктивной имитации, фальсификации порождаемых кандидатов в гипотезы, понятие истинностного значения, понятие многозначной логики. Ясно, что **полный** перечень возможных контактов понятий является творческим актом с последующими коррекциями.

(7) Важной особенностью научных понятий является их развитие — появление на их основе новых интенсионалов и соответствующих расширений экстенсионалов. Развитием понятий ДСМ-метода АПГ является введение понятия **эмпирической закономерности (ЭЗК)** [34, 36, ч. II]. Эмпирической закономерностью является некоторая регулярность, сохраняющаяся в последовательностях вложенных баз фактов. Это сохранение регулярности характеризуется сохранением истинностных значений гипотез (точнее, их типом — «1», «-1»: фактические «истина» и «ложь») и степенью непротиворечивости различных массивов гипотез при данном расширении. Если степень противоречивости есть 0, то обнаружен **эмпирический закон**, если степень противоречивости $\leq 0,2$, то обнаружена **эмпирическая тенденция** [34].

Обнаруженные ЭЗК пополняют множество аксиом Σ квазиаксиоматической теории, являющейся основанием понятий ДСМ-метода АПГ, что означает развитие этих понятий посредством нового понятия ЭЗК.

Этот процесс в точности соответствует схеме роста знания в эволюционной эпистемологии К.Р. Поппера: P1 – TT – EE – P2, где P1 — проблема, TT — пробная теория, EE — ее проверка и коррекция, а P2 — новая возникшая проблема [24]. В ДСМ-методе TT соответствует КАТ, EE — ее коррекция, а P2 — обнаружение ЭЗК (как заключительный акт knowledge discovery), добавляемое к КАТ (расширение Σ), что означает появление новой проблемы и ее использование для оценки порождаемых гипотез [36, ч. II].

Еще один аспект в развитии понятий ДСМ-метода АПГ связан с изменением дескриптивной и аргументативной функций языка JSM-L, используемого для представления декларативных знаний и процедур.

Первым изменением правил вывода для индукции (п.п.в.-1) является введение предикатов для обратного ДСМ-метода АПГ, в котором приоритетом является **сходство эффектов** (Y), а не сходство их носителей (X), которые представимы предикатом $X \Rightarrow_1 Y$ [13].

Вторым изменением правил вывода является ситуационное расширение ДСМ-метода АПГ посредством предикатов $P(X, Y, S)$ и $R(\langle V, S' \rangle, W)$ — «X обладает Y в ситуации S» и «$\langle V, S' \rangle$ есть причина W», где $S' \subseteq S$ [38].

Первая и вторая версия изменений ДСМ-метода применимы при интеллектуальном анализе социологических данных.

Третьим изменением понятий ДСМ-метода АПГ является так называемый обобщенный ДСМ-метод, в котором M-предикаты сходства заменяются на предикат $T(V, \mathcal{X}, W)$ — «V — причина W при отсутствии тормозов из множества $\mathcal{X}$» [33].

Четвертым изменением правил вывода является ДСМ-метод с отношением порядка на M-предикатах [28] (на их интенсионалах), что соответствует организации ДСМ-процедур посредством дистрибутивных решеток [27]. Эта версия ДСМ-метода более адекватна его реализации посредством **упорядоченной системы** его понятий.

Рассмотренное неаристотелевское строение понятий (на примере понятий ДСМ-метода АПГ) связано с характерными особенностями процедур, которые они выражают.

1. Интенсионалы этих понятий и их экстенсионалы связаны **конструктивной** функциональной зависимостью, представимой в конструктивизации ядра понятий.

2. Правила вывода п.п.в.-1 и п.п.в.-2 являются **амплиативными**, порождающими новое знание.

3. Эти правила имеют предрасположение к **фальсификации** результатов, что согласуется с критерием демаркации [29].

4. Понятия ДСМ-метода, представляющие правила вывода п.п.в.-1 и п.п.в.-2, имеют в результате вывода гипотезы такие, что они обладают истинностными значениями $\overline{\nu} = \langle \nu, n \rangle$, которые являются оценками высказываний или посредством теории соответствия или теории когерентности [23]. Первая теория истины применима к п.п.в.-2, так как возможна прямая верификация для предиката $X \Rightarrow_1 Y$, теория же когерентности применима к п.п.в.-1, так как гипотезы о ($\pm$)-причинах, представленные посредством предиката $V \Rightarrow_2 W$, имеют лишь косвенную проверку посредством принятия гипотез, порожденных п.п.в.-2.

5. Взаимодействие п.п.в.-1 и п.п.в.-2 осуществляется **рекурсивной** процедурой посредством синтеза предикатов $M^{+}_{x,n}(V, W)$, $M^{-}_{y,n}(V, W)$ (и их отрицаний) и предикатов $\Pi^{\sigma}_{n}(V, W)$, где $\sigma \in \{+, -, 0, \tau\}$. Причем эта процедура реализует одновременно **аргументацию** при порождении гипотез с предикатом $V \Rightarrow_2 W$ (для п.п.в.-1) и с предикатом $X \Rightarrow_1 Y$ (для п.п.в.-2). Факты из исходного множества Ω_0 (для $X \Rightarrow_1 Y$) и результаты п.п.в.-2 являются

аргументами для порождения гипотез посредством п.п.в.-1, а результаты п.п.в.-1 являются аргументами для порождения гипотез посредством п.п.в.-2.

Замечание 1-4. **Типы** истинностных значений порождаемых гипотез в ДСМ-рассуждении 1, -1, 0, τ являются истинностными значениями четырехзначной логики аргументации $A^{(4)}_{4,2}$ с двумя выделенными истинностными значениями «1» и «-1» [35].

5 О преобразовании идей в понятия

В [30] обсуждалась проблема преобразования неясных или плохо характеризуемых идей в хорошо характеризуемые понятия, уточняющие интенции, которые подразумеваются в этих идеях. Выше были упомянуты известные случаи уточнения идей алгоритма и множества. В этом разделе будут упомянуты уточнения идей, преобразуемых в понятия ДСМ-метода АПГ.

1. Первым примером преобразования идей методов (канонов) индуктивного вывода сходства, различия, сходства–различия, остатков и сопутствующих изменений [21] является их формализация посредством M-предикатов и П-предикатов [29]. Эта формализация, как было показано выше, использует конструктивизацию ядер соответствующих понятий M-предикатов и п.п.в.-1 (для всех вариантов методов Д.С. Милля [29]). Пример строения понятия п.п.в.-1 $(\mathrm{I})^{+}$ представлен на Рис.5. Кроме того, используется конструктивизация ядер понятий П-предикатов и п.п.в.-2, где конструктивизация соответствующих ядер понятий представлена на Рис.4. $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle$ — имя П-предикатов.

Декларативные аксиомы $\forall V \forall W (J_{(\tau,n)}(V \Rightarrow_1 W) \& \Pi^{\sigma}_{n}(V,W)) \rightarrow J_{\langle 1,n+1\rangle}(V \Rightarrow_1 W))$,

$$\text{где } \nu = \begin{cases} 1, \text{если } \sigma = + \\ -1, \text{если } \sigma = - \\ 0, \text{если } \sigma = 0 \\ \tau, \text{если } \sigma = \tau, \end{cases}$$

выражают индуктивные обобщения посредством гипотез, полученных посредством п.п.в.-1, использующих предикат $V \Rightarrow_2 W$ (V — причина W).

2. Вторым примером преобразования идеи в понятие является формализация абдукции как средства принятия гипотез, порожденных посредством п.п.в-1 (индукции) и п.п.в-2 (аналогии, которая является ин-

дуктивным обобщением). Такое преобразование идеи абдукции формализует и уточняет это идею Ч.С. Пирса ([36, ч. I]).

3. В [36] и [37] представлено уточнение проблемы индукции посредством введения понятия «естественнонаучной проблемы индукции», которое реализуется использованием ДСМ-рассуждений как синтеза индукции, аналогии и абдукции [36].

4. Четвертым примером преобразования идеи в понятие является характеризация открытой теории как квазиаксиоматической теории (КАТ) $\mathfrak{I} = \langle \Sigma, \Sigma', \mathfrak{R} \rangle$, где Σ и Σ' — открытые множества аксиом и фактов и гипотез соответственно, а $\mathfrak{R}$ — множество правил правдоподобного и достоверного вывода. Представление и организация знаний посредством КАТ является одной из компонент ДСМ-метода АПГ, применяемого в интеллектуальных системах. Открытость же множеств Σ и Σ' создает возможность машинного обучения в автоматическом или интерактивном режимах этих компьютерных систем.

Таким образом, КАТ является возможным уточнением (и преобразованием) идеи «открытой эмпирической теории» в понятие «квазиаксиоматической теории» для интеллектуальных систем.

5. Пятым примером преобразования идеи в понятие является уточнение и характеризация идеи «эмпирической закономерности» (ЭЗК) [34, 36, ч. II]. Идея ЭЗК связана с распознаванием регулярностей на последовательностях расширяющихся множеств фактов, которые выразимы посредством существенных параметров в языках представления знаний.

Формализация ЭЗК в ДСМ-методе АПГ состоит как в установлении степени противоречивости множеств гипотез в расширяемых их последовательностях, так и распознавании сохранения типов истинностных значений порождаемых гипотез. Эти два условия уточняют и формализуют явление регулярности, существенность же параметров устанавливается посредством абдукции (точнее: абдуктивной сходимости [36]).

Посредством $\Delta(p)$ и $\Omega(p)$ обозначаются множества гипотез, представимые посредством предикатов $V \Rightarrow_2 W$ и $X \Rightarrow_1 Y$ соответственно, где p — номер расширения базы фактов. Степень противоречивости множеств порождаемых гипотез $\Delta(p)$, $\Delta(q)$ и $\Omega(p)$, $\Omega(q)$ определяется посредством функционалов $f^\sigma(p,q)$ и $F^\sigma(p,q)$ соответственно, где $\sigma \in \{+,-,0\}$ $f^\sigma(p,q) = 0$ и $F^\sigma(p,q) = 0$ характеризуют **эмпирический закон**, а $f^\sigma(p,q) \leq 0,2$ и $F^\sigma(p,q) \leq 0,2$ — **эмпирическую тенденцию** [34].

Условие сохранения истинностных значений представимо посредством утверждения:

$\exists V \exists W \exists n \exists m \forall p \forall q(((p < q) \& (J_{\langle 1,n \rangle}(V \Rightarrow_2 W) \in \Delta^+(p))) \to (J_{\langle 1,m \rangle}(V \Rightarrow_2 W) \in \Delta^+(q)))$, где $\Delta^+(p) \subset \Delta(p)$.

Аналогично формулируются утверждения для $\Delta^-(p)$, а для $\Omega^\sigma(p)$, где $\sigma \in \{+, -\}$, $J_{\langle 1,n \rangle}(X \Rightarrow_1 Y) \in \Omega^+(p)$, $J_{\langle -1,n \rangle}(X \Rightarrow_1 Y) \in \Omega^-(p)$.

Эти утверждения пополняют квазиаксиоматическую теорию, являющуюся основанием процедурных понятий ДСМ-метода АПГ, будучи средством их **развития**.

6. Шестым примером преобразования идеи в понятие является определение формальных понятий [50, 47, 44]. Рассматриваются **контексты**, которые есть тройки $\langle G, M, I \rangle$, где G и M — множества, $I \subseteq G \times \mathrm{M}$, G — множество объектов, М — множество атрибутов. Тогда **понятием** является пара $\langle A, B \rangle$, где $A \subseteq G$ и $B \subseteq M$, $A^{'} = \{m | (m \in M) \& \forall g((g \in A) \supset gIm)\}$, $B^{'} = \{g | (g \in G) \& \forall m((m \in M) \supset gIm)\}$, $A^{'} = B$, $B^{'} = A$.

A — объем (экстенсионал) формального понятия, а B — его содержание (интенсионал).

В [47] средствами теории формальных понятий выражаются аналоги M-предикатов и П-предикатов ДСМ-метода для формализации соответствующих процедур индукции и аналогии для позитивных и негативных примеров. Фактически это означает некоторое **развитие** формальных понятий. Современная теория формальных понятий является формализацией аристотелевской традиции, основанной на онтологии «вещь–свойство» [15].

Следует обратить внимание на простоту строения понятий в аристотелевской традиции, что соответствует онтологии «вещь–свойство», отображаемой в строении понятий посредством заданного объема (множества объектов) и множества признаков (атрибутов, свойств), характеризующих элементы объема. Поэтому возможным уточнением идеи является преобразование ее в понятие с аристотелевским строением, которое затем преобразуется в понятие с неаристотелевским строением, например, посредством конструктивизации ядра понятия, то есть, расширения треугольника Г. Фреге до соответствующего четырехугольника, реализующего процедуры порождения конкретного экстенсионала посредством интенсионала.

Подобные преобразования характерны для дискурсивных понятий, если задан язык представления знаний и сформулированы процедуры порождения экстенсионала посредством интенсионала. Это означает ответ на вопрос Ч.С. Пирса [22]: Как сделать наши идеи ясными? Преобразование идей в понятия является процессом **организации знаний** с использованием Мира 3 К.Р. Поппера [23].

Таким образом, допущения, на которых основана аристотелевская традиция понимания понятий, не адекватны практике научного исследования: понятия не являются формой мышления (опровержение **Д1**), так как они — средства организации знаний, интенсионалы (содержания) дискурсивных понятий имеют организацию, отличную от задания множества признаков (опровержение **Д2**); закон обратного соотношения содержания и объема (**Д3**) не имеет места для процедурных понятий (это было продемонстрировано для понятий ДСМ-метода АПГ).

Кроме того, экстенсионалы понятий могут выражать **отношения**, а не сингулярные объекты (для M-предикатов это отношения R_x^+, R_y^-, а для п.п.в.-1 — отношения $R_x^+ \cap -R_y^-$, $-R_x^+ \cap R_y^-$, $R_x^+ \cap R_y^-$, $-R_x^+ \cap -R_y^-$, где «$-$» — операция дополнения алгебры множеств).

Организация знаний у понятий с неаристотелевским строением, как было показано выше, имеет нетривиальную реализацию, включающую ядро понятия, его конструктивизацию, и **сферу понятия**, образованную основанием понятия, упорядочением множества понятия, связанных с ядром рассматриваемого понятия, его контакты и средства развития понятий. Понятия с неаристотелевским строением широко распространены в сфере науки, медицины и управления.

Изучение строения понятий, как дискурсивных, так и остенсивных, является необходимым для создания средств представления знаний и формулирования теорий (в том числе открытых) в науках о человеке и обществе, которые нуждаются в применении точных рассуждений и развитии экспериментальных исследований.

— • —

В заключение заметим, что синтез понятий, установление их оснований, упорядочение понятий, образующее их систему [27], выявление контактов понятий, развитие понятий и, наконец, преобразование неясных идей в точно характеризуемые понятия являются необходимыми средствами эволюции рационального знания.

Литература

[1] ДСМ-метод автоматического порождения гипотез: Логические и эпистемологические основания / Под общей редакцией О.М. Аншакова. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009.

[2] *Аншаков О.М., Скворцов Д.П., Финн В.К.* Об аксиоматизируемости многозначных логик, связанных с формализацией правдоподобных рассуждений // Логические исследования. М.: Наука, 1993. Вып. 1. С. 222–247.

[3] *Аншаков О.М., Скворцов Д.П., Финн В.К.* О дедуктивной имитации некоторых вариантов ДСМ-метода автоматического порождения гипотез // ДСМ-метод автоматического порождения гипотез: логические и эпистемологические основания. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. С. 240–286.

[4] *Арно А., Николь П.* Логика, или искусство мыслить. Харьков: Litera Nova, 2009.

[5] *Барвайс Д.* Введение в логику первого порядка. Справочная книга по математической логике. Ч. I: Теория моделей. М.: Наука, 1983.

[6] *Бочвар Д.А.* Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления. Математический сборник. Т.4. Вып. 2. 1938. С. 287–308.

[7] *Бочвар Д.А., Лахути Д.Г., Финн В.К.* Комментарии // Карнап Р. Значение и необходимость. Исследование по семантике и модальной логике. Биробиджан: ИП «ТРИВИУМ», 2000. С. 361–368.

[8] *Вагин В.Н., Головина Е.Ю., Загорянская А.А., Фомина М.В.* Достоверный и правдоподобный вывод в интеллектуальных системах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.

[9] *Вертгеймер М.* Продуктивное мышление. М.: ПРОГРЕСС, 1987.

[10] *Виноградов Д.В.* Формализация правдоподобных рассуждений в логике предикатов 1-ого порядка // Научно-техническая информация. Сер. 2. № 11. 2000. С. 17–20.

[11] *Войшвилло Е.К.* Понятие как форма мышления. М.: Издательство Московского университета, 1989.

[12] *Гершель Дж.* Философия естествознания. Издание второе. М.: «ЛИБРОКОМ», 2011.

[13] *Гусакова С.М., Михеенкова М.А., Финн В.К.* О логических средствах автоматизированного анализа мнений // Автоматическое порождение гипотез в интеллектуальных системах. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. Гл. 3. С. 446–484.

[14] *Забежайло М.И., Ивашко В.Г., Кузнецов С.О., Михеенкова М.А., Хазановский К.П., Аншаков О.М.* Алгоритмические и программные средства ДСМ-метода автоматического порождения гипотез // Научно-техническая информация. Сер. 2. № 10. 1987. С. 1–13.

[15] *Кассирер Э.* Познание и действительность. Понятие субстанции и понятие функции. М.: ГНОЗИС, 2006.

[16] *Котарбиньский Т.* Лекции по истории логики. XII. Логика Пор-Рояля. XIII. Логика Пор-Рояля (продолжение) // Котарбиньский Т. Избранные произведения. М.: Издательство иностранной литературы, 1963. С. 424–433.

[17] *Криницкий Н.А.* Аналитическая теория алгоритмов. М.: «Физматлит», 1994.

[18] *Лапшин В.А.* Онтологии в компьютерных системах. М.: Научный мир, 2010.

[19] *Люгер Д.Ф.* Искусственный интеллект. Москва; Санкт-Петербург; Киев, 2003.

[20] *Мастерман М.* Тезаурус в синтаксисе и семантике // Математическая лингвистика. М.: Издательство «МИР». 1964, С. 160–176.

[21] *Милль Д.С.* Система логики силлогистической и индуктивной. Издание пятое. М.: ЛЕНАНД, 2011.

[22] *Пирс Ч.С.* Как сделать наши идеи ясными // Пирс Ч.С. Избранные произведения. М.: ЛОГОΣ, 2000. С. 266–295.

[23] *Поппер К.Р.* Объективное знание. Эволюционный подход. М.: Эдиториал УРСС, 2002.

[24] *Поппер К.Р.* Эволюционная эпистемология // Эволюционная эпистемология и логика социальных наук. Карл Поппер и его критики / Общая редакция В.Н. Садовского. М.: Эдиториал УРСС, 2000. С. 57–74.

[25] *Скворцов Д.П.* О некоторых способах построения логических языков с кванторами по кортежам // Семиотика и информатика. Вып. 20. 1983. С. 102–126.

[26] *Финн В.К.* Абдукция / Энциклопедия эпистемологии и философии науки. М.: КАНОН+, 2009. С. 8–9.

[27] *Финн В.К.* Дистрибутивные решетки индуктивных процедур // Научно-техническая информация. Сер. 2. № 11. 2014. С. 1–30.

[28] *Финн В.К.* ДСМ-метод автоматического порождения гипотез с отношением порядка / ДСМ-метод автоматического порождения гипотез: логические и эпистемологические основания. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. Ч. I. Гл. 1. С. 166–191.

[29] *Финн В.К.* Индуктивные методы Д.С. Милля в системах искусственного интеллекта // Искусственный интеллект и принятие решений. Ч. I. № 3. 2010. С. 3–21; Ч. II. № 4. 2010. С. 14–40.

[30] *Финн В.К.* Искусственный интеллект: Методология, применения, философия. М.: КРАСАНД., 2011. Ч. II. Гл. 3: Интеллектуальные системы и общество: идеи и понятия. С. 137–167.

[31] *Финн В.К.* Искусственный интеллект: Методология, применения, философия. М.: КРАСАНД. 2011.

[32] *Финн В.К.* Об интеллектуальном анализе данных // Новости искусственного интеллекта. 2004. № 3. С. 3–18.

[33] *Финн В.К.* Об обобщенном ДСМ-методе автоматического порождения гипотез // ДСМ-метод автоматического порождения гипотез: логические и

эпистемологические основания. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. Ч. I. Гл. 2. С. 192–213.

[34] *Финн В.К.* Об определении эмпирических закономерностей посредством ДСМ-метода автоматического порождения гипотез // Искусственный интеллект и принятие решений. 2010. № 4. С. 41–48.

[35] *Финн В.К.* Стандартные и нестандартные логики аргументации // Логические исследования. Вып. 13. М.: Наука, 2006. С. 158–189.

[36] *Финн В.К.* Эпистемологические основания ДСМ-метода автоматического порождения гипотез // Научно-техническая информация. Сер. 2. Ч. I. № 9. 2013. С. 1–29; Ч. II. № 12. 2013. С. 1–26.

[37] *Финн В.К.* Эпистемологические принципы порождения гипотез // Вопросы философии. 2014. №2. С. 83–95.

[38] *Финн В.К., Михеенкова М.А.* О ситуационном расширении ДСМ-метода автоматического порождения гипотез // Автоматическое порождение гипотез в интеллектуальных системах. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. Гл. 2. С. 428–445.

[39] *Фреге Г.* О смысле и значении // Готлоб Фреге. Логика и логическая семантика. М.: АСПЕКТ ПРЕСС, 2000. С. 215–229.

[40] *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. Издательство «МИР», 1966.

[41] *Челпанов Г.И.* Учебник логики. М.: Издательская группа «ПРОГРЕСС», 1994. Глава IV. Содержание и объем понятий. С. 24–31.

[42] *Черч А.* Введение в математическую логику. М.: Издательство иностранной литературы, 1960. Введение. 03. Функции. Стр. 27.

[43] *Anshakov O., Gergely T.* Cognitive Reasoning. A Formal Approach. Springer-Verlag: Berlin–Heidelberg, 2010.

[44] *Davey B.A., Priestley H.A.* Introduction to Lattices and Order. Second edition. Cambridge University Press, 2002. 3: Formal concept analysis. P. 65–84.

[45] Abductive Inference: Computation, Philosophy, Technology / Eds. J.R. Josephson, S.G. Josephson. Cambridge: University Press, 1994.

[46] *Körner S.* Conceptual thinking. A Logical inquiry. Cambridge: The University of Bristol at the University Press, 1955.

[47] *Kuznetsov S.O.* Galois Connection in Data Analysis: Contributions from the Soviet Era and Modern Russian Research // Ganter B., Stumme G., Wille R. (Eds.) Formal Concept Analysis. Foundations and Applications. Springer-Verlag. Berlin – Heidelberg, 2005. P. 196–225.

[48] *Nilsson N.I.* Artificial Intelligence: A New Synthesis. San Francisco, California: Morgan Kaufmann Publishers, Inc. 1998.

[49] *Rosser B., Turquette A.R.* Many-Valued Logics. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1958.

[50] *Wille R.* Formal Concept Analysis as Mathematical Theory of Concepts and Concept Hierarchies // Ganter B., Stumme G., Wille R. (Eds.) Formal Concept Analysis. Foundations and Applications. Springer-Verlag. Berlin – Heidelberg, 2005. P. 1–33.

V.K. Finn

On the Non-aristotelian Concept Structure

Finn Viktor Konstantinovich
Department of intelligent information systems, Branch of research in informatics,
All Russian Institute for Scientific and Technical Information,
Russian Academy of Sciences.
Usievicha 20, A-190, Moscow, 125190, Russian Federation.
e-mail: `finn@viniti.ru`

This article deals with the structure of concepts, different from Aristotelian tradition based on the ontology "thing–property". Non-aristotelian concept structure is analyzed on the example of procedural concepts of the JSM-method of automatic hypotheses generation. For procedural concepts a refinement and a widening of G. Frege's triangle are proposed. For the procedural concepts Frege's triangle formed by intension (content), extension (scope) is supplemented with the procedural proposition which transforms the initial data by means of the intension into the extension. In the paper is also given an example of the violation of the so called "law of the inverse relation" between the scope and the content of a concept for the concepts of the JSM-method of automatic hypotheses generation. Formulated are the specialties of the construction of non-aristotelian concepts as means of organization of knowledge, not "forms of thought". The example of concepts representing the JSM-reasonings demonstrates the difference of their structure from the understanding of concepts within the aristotelian tradition. The problem of development of ideas into concepts allowing exact characterization is also discussed.

Keywords: Aristotelian tradition of concepts, extension (scope), intension (content), J.S. Mill's inductive methods, JSM-reasoning, procedural concepts, G. Frege's triangle

References

[1] *DSM-metod avtomaticheskogo porozhdeniya gipotez: Logicheskie i epistemologicheskie osnovaniya* [JSM-method of the automatic hypothesis generation: Logical and epistemological foundations], ed. O.M. Anshakov, Moscow: «LIBROKOM» Publ., 2009. (In Russian)

[2] Anshakov, O.M., Skvortsov, D.P., Finn, V.K. "Ob aksiomatiziruemosti mnogoznachnykh logik, svyazannykh s formalizatsiei pravdopodobnykh rassuzhdenii" [On the axiomatizability of the multi-valued logics linked with the formalization of the plausible reasonings], *Logicheskie issledovaniya* [Logical Investigations], Moscow: Nauka Publ., 1993, V.1, pp. 222–247. (In Russian)

[3] Anshakov, O.M., Skvortsov, D.P., Finn, V.K. "O deduktivnoi imitatsii nekotorykh variantov DSM-metoda avtomaticheskogo porozhdeniya gipotez" [On the deductive imitation of some variants of the JSM-method of the authomatic hypothesis generation], *DSM-metod avtomaticheskogo porozhdeniya gipotez: logicheskie i epistemologicheskie osnovaniya* [JSM-method of the

automatic hypothesis generation: Logical and epistemological foundations], Moscow: «LIBROKOM» Publ., 2009, pp. 240–286. (In Russian)

[4] Arno, A., Nikol', P. *Logika ili iskusstvo myslit'* [Logic or the art of thinking], Kharkov: Litera Nova Publ., 2009. (In Russian)

[5] Barwise, J. *Vvedenie v logiku pervogo poryadka. Spravochnaya kniga po matematicheskoi logike. Chast' I. Teoriya modelei* [Introduction to the first order logic. Reference book on the mathematical logic. Part I. Model theory], Moscow: Nauka Publ., 1983. (In Russian)

[6] Bochvar, D.A. "Ob odnom trekhznachnom ischislenii i ego primenenii k analizu paradoksov klassicheskogo rasshirennogo funktsional'nogo ischisleniya" [On one three-valued calculus and its application to the analysis of the paradoxes of the classical extended functional calculus], *Matematicheskii sbornik*, V.4, Issue 2, 1938, pp. 287–308. (In Russian)

[7] Bochvar, D.A., Lakhuti, D.G., Finn, V.K. "Kommentarii" [Commentary], Karnap R. *Znachenie i neobkhodimost'. Issledovanie po semantike i modal'noi logike* [Meaning and Necessity: A Study in Semantics and Modal Logic] Birobidzhan: «TRIVIUM» Publ., 2000, pp. 361–368. (In Russian)

[8] Vagin, V.N., Golovina, E.Yu., Zagoryanskaya, A.A., Fomina, M.V. *Dostovernyi i pravdopodobnyi vyvod v intellektual'nykh sistemakh* [Reliable and plausible inference in the intellectual systems] Moscow: FIZMATLIT Publ., 2008. (In Russian)

[9] Wertheimer, M. *Produktivnoe myshlenie* [Productive thinking], Moscow: PROGRESS Publ., 1987. (In Russian)

[10] Vinogradov, D.V. "Formalizatsiya pravdopodobnykh rassuzhdenii v logike predikatov 1-ogo poryadka" [Formalization of the plausible reasonings in 1st order predicate logic], *Nauchno-tekhnicheskaya informatsiya. Seriya 2* [Scientific-technical information. Series 2], №11, 2000, pp. 17–20. (In Russian)

[11] Voishvillo, E.K. *Ponyatie kak forma myshleniya* [Concept as the form of thinking], Moscow: Moscow St. Univ. Publ., 1989. (In Russian)

[12] Herschel, J. *Filosofiya estestvoznaniya. Izdanie vtoroe* [Philosophy of the natural science. Second edition] Moscow: «LIBROKOM» Publ., 2011. (In Russian)

[13] Gusakova, S.M., Mikheenkova, M.A., Finn, V.K. "O logicheskikh sredstvakh avtomatizirovannogo analiza mnenii" [On the logical tools for the automated analysis of opinions], *Avtomaticheskoe porozhdenie gipotez v intellektual'nykh sistemakh* [Automatic hypothesis generation in intellectual systems], Moscow: «LIBROKOM» Publ., 2009, chapter 3, pp. 446–484. (In Russian)

[14] Zabezhailo, M.I., Ivashko, V.G., Kuznetsov, S.O., Mikheenkova, M.A., Khazanovskii, K.P., Anshakov, O.M. "Algoritmicheskie i programmnye sredstva DSM-metoda avtomaticheskogo porozhdeniya gipotez" [Algorhythmic and program tools of the JSM-method of authomatic hypothesis generation], *Nauchno-tekhnicheskaya informatsiya. Seriya 2* [Scientific-technical information. Series 2], №10, 1987, pp. 1–13. (In Russian)

[15] Cassirer, E. *Poznaniya i deistvitel'nost'. Ponyatie substantsii i ponyatie funktsii* [Substance and function], Moscow: GNOZIS Publ., 2006. (In Russian)

[16] Kotarbiński, T. "Lektsii po istorii logiki. XII. Logika Por-Royalya. XIII. Logika Por-Royalya (prodolzhenie)" [Lectures on the history of logic. XII. Port-Royal Logic. XIII. Port-Royal Logic (continued)], Kotarbiński T, *Izbrannye proizvedeniya* [Selected works], Moscow: Izdatel'stvo inostrannoi literatury Publ., 1963, pp. 424–433. (In Russian)

[17] Krinitskii, N.A. *Analiticheskaya teoriya algoritmov* [Analytical theory of algorithms], Moscow: «Fizmatlit» Publ., 1994. (In Russian)

[18] Lapshin, V.A. *Ontologii v komp'yuternykh sistemakh* [Ontologies in computer systems], Moscow: Nauchnyi mir Publ., 2010. (In Russian)

[19] Luger, G.F. *Iskusstvennyi intellekt* [Artificial intelligence], Moscow – Saint-Petersburg – Kiev, 2003. (In Russian)

[20] Masterman, M. "Tezaurus v sintaksise i semantike" [The thesaurus in syntax and semantics], *Matematicheskaya lingvistika* [Mathematical linguistics], Moscow: «MIR» Publ., 1964, pp. 160–176. (In Russian)

[21] Mill, J.S. *Sistema logiki sillogisticheskoi i induktivnoi. Izdanie pyatoe* [A System of Logic, Ratiocinative and Inductive. Fifth Edition], Moscow: LENAND Publ., 2011. (In Russian)

[22] Peirce, C.S. "Kak sdelat' nashi idei yasnymi" [How to Make Our Ideas Clear], Peirce C.S. *Izbrannye proizvedeniya* [Selected works], Moscow: LOGOΣ Publ., 2000, pp. 266–295. (In Russian)

[23] Popper, K.R. *Ob"ektivnoe znanie. Evolyutsionnyi podkhod* [Objective Knowledge: An Evolutionary Approach], Moscow: URSS Publ., 2002. (In Russian)

[24] Popper, K.R. "Evolyutsionnaya epistemologiya" [Evolutionary epistemology], *Evolyutsionnaya epistemologiya i logika sotsial'nykh nauk. Karl Popper i ego kritiki* [Evolutionary epistemology and logic of the social sciences. Karl Popper and his critics], ed. V.N. Sadovskii, Moscow: URSS Publ., 2000, pp. 57–74. (In Russian)

[25] Skvortsov, D.P. "O nekotorykh sposobakh postroeniya logicheskikh yazykov s kvantorami po kortezham" [On some ways of construction of the logical languages with quantifiers on sequences]. *Semiotika i informatika* [Semiotics and informatics], Issue 20, 1983, pp. 102–126. (In Russian)

[26] Finn, V.K. "Abduktsiya" [Abduction], *Entsiklopediya epistemologii i filosofii nauki* [Enciclopedia of epistemology and philosophy of science], Moscow: KANON+ Publ., 2009, pp. 8–9. (In Russian)

[27] Finn, V.K. "Distributivnye reshetki induktivnykh protsedur" [Distributive lattices of inductive procedures]. *Nauchno-tekhnicheskaya informatsiya. Seriya 2* [Scientific-technical information. Series 2], № 11, 2014, pp. 1–30.(In Russian)

[28] Finn, V.K. "DSM-metod avtomaticheskogo porozhdeniya gipotez s otnosheniem poryadka" [JSM-method of automatic hypothesis generation with the order relation], *DSM-metod avtomaticheskogo porozhdeniya gipotez: logicheskie i epistemologicheskie osnovaniya* [JSM-method of the automatic hypothesis generation: Logical and epistemological foundations], Moscow: «LIBROKOM» Publ.. 2009, Part I, Chapter 1, pp. 166–191. (In Russian)

[29] Finn, V.K. "Induktivnye metody D.S. Millya v sistemakh iskusstvennogo intellekta" [The inductive methods of J.S. Mill in the systems of artificial intelligence], *Iskusstvennyi intellekt i prinyatie reshenii* [Artificial intelligence and decision-making], Part I, № 3, 2010, pp. 3–21; Part II, № 4, 2010, pp. 14–40. (In Russian)

[30] Finn, V.K. *Iskusstvennyi intellekt: Metodologiya, primeneniya, filosofiya* [Artificial intelligence: Methodology, applications, philosophy], Moscow: KRASAND Publ., 2011, Part II, Chapter 3. "Intellektual'nye sistemy i obshchestvo: idei i ponyatiya" [Intellectual systems and society: ideas and concepts], pp. 137–167.(In Russian)

[31] Finn, V.K. *Iskusstvennyi intellekt: Metodologiya, primeneniya, filosofiya* [Artificial intelligence: Methodology, applications, philosophy], Moscow: KRASAND Publ., 2011 (In Russian)

[32] Finn, V.K. "Ob intellektual'nom analize dannykh" [On the intellectual data analysis], *Novosti iskusstvennogo intellekta* [News of artificial intelligence], № 3, 2004, pp. 3–18. (In Russian)

[33] Finn, V.K. "Ob obobshchennom DSM-metode avtomaticheskogo porozhdeniya gipotez" [On the generalized JSM-method of authomatic hypothesis generation], *DSM-metod avtomaticheskogo porozhdeniya gipotez: logicheskie i epistemologicheskie osnovaniya* [JSM-method of the automatic hypothesis generation: Logical and epistemological foundations], Moscow: «LIBROKOM» Publ., 2009, Part I, Chapter 2, pp. 192–213. (In Russian)

[34] Finn, V.K. "Ob opredelenii empiricheskikh zakonomernostei posredstvom DSM-metoda avtomaticheskogo porozhdeniya gipotez" [On the definition of empirical regularities by means of the JSM-method of the automatic hypothesis generation], *Iskusstvennyi intellekt i prinyatie reshenii* [Artificial intelligence and decision-making], № 4, 2010, pp. 41–48. (In Russian)

[35] Finn, V.K. "Standartnye i nestandartnye logiki argumentatsii" [Standard and non-standard logics of argumentation], *Logicheskie issledovaniya* [Logical investigations], Issue 13, Moscow: Nauka Publ., 2006, pp. 158–189. (In Russian)

[36] Finn, V.K. "Epistemologicheskie osnovaniya DSM-metoda avtomaticheskogo porozhdeniya gipotez" [Epistemological foundations of the JSM-method of the automatic hypothesis generation], *Nauchno-tekhnicheskaya informatsiya. Seriya 2* [Scientific-technical information. Series 2], Part I, №9, 2013, pp. 1–29; Part II, №12, 2013, pp. 1–26. (In Russian)

[37] Finn, V.K. “Epistemologicheskie printsipy porozhdeniya gipotez” [Epistemological priciples of hypothesis generation], *Voprosy filosofii* [Problems of philosophy], №2, 2014, pp. 83–95. (In Russian)

[38] Finn, V.K., Mikheenkova M.A. “O situatsionnom rasshirenii DSM-metoda avtomaticheskogo porozhdeniya gipotez” [On the situational extension of the JSM-method of automatic hypothesis generation], *Avtomaticheskoe porozhdenie gipotez v intellektual'nykh sistemakh* [Automatic hypothesis generation in intellectual systems], Moscow: «LIBROKOM» Publ., 2009, Chapter 2, pp. 428–445. (In Russian)

[39] Frege, G. “O smysle i znachenii” [On sense and reference], Gottlob Frege, *Logika i logicheskaya semantika* [Logic and logical semantics], Moscow: ASPENT PRESS Publ., 2000, pp. 215–229. (In Russian)

[40] Fraenkel, A.A., Bar-Hillel, Y. *Osnovaniya teorii mnozhestv* [Foundations of Set Theory], «MIR» Publ., 1966. (In Russian)

[41] Chelpanov, G.I. *Uchebnik logiki* [Textbook on logic], Moscow: «PROGRESS» Publ., 1994, Chapter IV. “Soderzhanie i ob"em ponyatii” [Scope and content of concepts], pp. 24–31. (In Russian)

[42] Church, A. *Vvedenie v matematicheskuyu logiku* [Introduction to Mathematical Logic], Moscow: Izdatel'stvo inostrannoi literatury Publ., 1960, Introduction, 03, “Funktsii” [Functions], p. 27. (In Russian)

[43] Anshakov, O., Gergely, T. *Cognitive Reasoning. A Formal Approach*, Springer-Verlag: Berlin-Heidelberg, 2010.

[44] Davey, B.A., Priestley, H.A. *Introduction to Lattices and Order. Second edition*, Cambridge University Press, 2002, “3. Formal concept analysis”, pp. 65–84.

[45] *Abductive Inference: Computation, Philosophy, Technology*, eds. J.R. Josephson, S.G. Josephson, Cambridge: University Press, 1994.

[46] Körner, S. *Conceptual thinking. A Logical inquiry*, Cambridge: The University of Bristol at the University Press, 1955.

[47] Kuznetsov, S.O. “Galois Connection in Data Analysis: Contributions from the Soviet Era and Modern Russian Research”. *Formal Concept Analysis. Foundations and Applications*, eds. Ganter B., Stumme G., Wille R., Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005, pp. 196–225.

[48] Nilsson, N.I. *Artificial Intelligence: A New Synthesis*, San Francisco, California: Morgan Kaufmann Publishers, Inc. 1998.

[49] Rosser, B., Turquette, A.R. *Many-Valued Logics*, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1958.

[50] Wille, R. “Formal Concept Analysis as Mathematical Theory of Concepts and Concept Hierarchies”, *Formal Concept Analysis. Foundations and Applications*, eds. Ganter B., Stumme G., Wille R., Springer-Verlag: Berlin Heidelberg, 2005, pp. 1–33.

УДК 162.2

В.И. Маркин

Силлогистика как логика антиобъемов терминов

Маркин Владимир Ильич
Кафедра логики, философский факультет, МГУ им. М.В. Ломоносова.
Россия, 119991, Москва, ГСП-1, Ломоносовский проспект, д. 27, корп. 4.
e-mail: vladimirmarkin@mail.ru

Для двух систем силлогистики (фундаментальной и традиционной) предлагаются нестандартные переводы в исчисление предикатов. Данные переводы позволяют трактовать эти силлогистические теории как логики антиобъемов субъектов и предикатов категорических высказываний. Согласно первому переводу, SaP означает, что антиобъем термина S включается в антиобъем термина P, SeP означает, что антиобъемы терминов S и P не содержат общих элементов, SiP означает, что пересечение антиобъемов S и P непусто, SoP означает, что антиобъем термина S не включается в антиобъем термина P. Второй перевод для любой силлогистической формулы A содержит дополнительную предпосылку о непустоте антиобъемов терминов, входящих в A. Доказано, что эти переводы погружают указанные силлогистики в классическое исчисление предикатов.

Ключевые слова: силлогистика, исчисление предикатов, погружающая операция, объемы и антиобъемы терминов

Обычно силлогистику трактуют как теорию правильных рассуждений, основанную на отношениях между объемами общих терминов, выступающих в роли субъектов и предикатов категорических высказываний. Силлогистические теории, как правило, строятся в языке, содержащем четыре силлогистические константы: a, i, e, o, каждая из которых фиксирует некоторое отношение между объемом субъекта и объемом предиката соответствующего высказывания. Так, в фундаментальной силлогистике константа a рассматривается в качестве знака отношения включения объема субъекта в объем предиката, константа i как знак отношения совместимости терминов высказывания по объему (непустоты пересечения объемов), константа e представляет отношение несовместимости, а o — отношение невключения. В других силлогистических теориях могут накладываться дополнительные ограничения на пустоту или непустоту объемов терминов. В частности, в традиционной силлогистике принимается исходная предпосылка о непустоте всех общих терминов, т.е. при решении вопроса, является ли некоторая формула законом этой теории, исходят из предположения, что все термины, содержащиеся в ней, репрезентируют непустые множества.

Данная интерпретация категорических высказываний в *фундаментальной силлогистике* находит свое адекватное отражение в широко известном переводе * силлогистических формул в язык классического одноместного исчисления предикатов:

$$\begin{array}{ll} SaP^* = \forall x(Sx \supset Px), & SeP^* = \forall x(Sx \supset \neg Px), \\ SiP^* = \exists x(Sx \wedge Px), & SoP^* = \exists x(Sx \wedge \neg Px), \\ (\neg A)^* = \neg A^*, & (A \nabla B)^* = A^* \nabla B^*, \end{array}$$

где ∇ есть бинарная пропозициональная связка.

Класс законов позитивного фрагмента фундаментальной силлогистики формализует аксиоматическая система **ФС**, которая дедуктивно эквивалентна исчислению, предложенному Дж. Шефердсоном [10, p. 144]. Схемами аксиом **ФС** являются:

Ф0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний,
Ф1. $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$,
Ф2. $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$,
Ф3. $SeP \supset PeS$,
Ф4. SaS,
Ф5. $SiP \supset SiS$,
Ф6. $SoP \supset SiS$,
Ф7. $SiP \equiv \neg SeP$,
Ф8. $SoP \equiv \neg SaP$,

а единственным правилом вывода – *modus ponens*.

Доказано [5, с. 18-27], что перевод * погружает силлогистику **ФС** в классическое исчисление предикатов.

Позитивный фрагмент *традиционной силлогистики* формализуется известным аксиоматическим исчислением Я. Лукасевича [4]. Дедуктивно эквивалентная ему система получается за счет добавления к системе **ФС** новой схемы аксиом $SaP \supset SiP$ (схемы аксиом **Ф5** и **Ф6** становятся при этом излишними).

В.А. Смирнов [7] предложил иную аксиоматизацию силлогистики Лукасевича. Построенное им исчисление **C4** содержит следующие силлогистические схемы аксиом:

A1. $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$,
A2. $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$,
A3. $SeP \supset PeS$,
A4. $SaP \supset SiP$,
A5. $SiP \supset SaS$,
A6. SiS,
A7. $SiP \equiv \neg SeP$,
A8. $SoP \equiv \neg SaP$.

Силлогистика **С4** погружается в классическое одноместное исчисление предикатов посредством перевода Θ, предложенного М.Н. Бежанишвили и Л.И. Мчедлишвили [1]:

$$\Theta(A) = (\exists x S_1 x \wedge ... \wedge \exists x S_n x) \supset A^*,$$

где $S_1, ..., S_n$ – все силлогистические термины в составе формулы A. Перевод Θ как раз и выражает принимаемую в традиционной силлогистике предпосылку о непустоте общих терминов.

Известно, что для некоторых систем позитивной силлогистики существуют неэквивалентные друг другу адекватные переводы в классическое одноместное исчисление предикатов. Однако все рассматриваемые обычно переводы категорических высказываний SaP, SeP, SiP и SoP являются *стандартными* в следующем смысле: они представляют собой булевы комбинации формул языка логики предикатов, причем одной из обязательных составляющих для перевода SaP является формула $\forall x(Sx \supset Px)$, для перевода SeP – формула $\forall x(Sx \supset \neg Px)$, для перевода SiP – формула $\exists x(Sx \wedge Px)$, для перевода SoP – формула $\exists x(Sx \wedge \neg Px)$. Другими составляющими этих переводов могут быть формулы типов $\exists x Sx$ и $\exists x \neg Sx$, соответствующие утверждениям о непустоте и о неуниверсальности терминов.

Далее мы предложим нестандартные (в указанном смысле) переводы, погружающие в исчисление предикатов позитивные фрагменты фундаментальной и традиционной силлогистик.

Для системы фундаментальной силлогистики **ФС** адекватным является следующий нестандартный перевод $^{\otimes}$:

$$\begin{array}{ll}
SaP^{\otimes} = \forall x(Px \supset Sx), & SeP^{\otimes} = \forall x(Sx \vee Px), \\
SiP^{\otimes} = \exists x(\neg Sx \wedge \neg Px), & SoP^{\otimes} = \exists x(Px \wedge \neg Sx), \\
(\neg A)^{\otimes} = \neg A^{\otimes}, & (A \nabla B)^{\otimes} = A^{\otimes} \nabla B^{\otimes}.
\end{array}$$

Согласно данному переводу, константа a рассматривается как знак отношения включения объема предиката в объем субъекта, константа o – как знак отсутствия объемного включения предиката в субъект, константа e – как знак универсальности объединения объемов субъекта и предиката, константа i – как знак неуниверсальности такого объединения.

Вместе с тем, этот перевод позволяет интерпретировать силлогистические константы не только как знаки отношений между *объемами* субъекта и предиката, но и как знаки определенных отношений между их *антиобъемами.*

Поскольку формула $\forall x(Px \supset Sx)$ эквивалентна в классической логике предикатов формуле $\forall x(\neg Sx \supset \neg Px)$, $^{\otimes}$-перевод SaP утверждает, что антиобъем субъекта включается в антиобъем предиката. Формула $\forall x(Sx \vee Px)$ эквивалентна формуле $\forall x(\neg Sx \supset \neg\neg Px)$, а следовательно, SeP в соответствии с переводом $^{\otimes}$ трактуется как утверждение о несовместимости антиобъемов S и P (всё, что входит в антиобъем S, не входит в антиобъем P). $^{\otimes}$-перевод SiP содержит информацию о совместимости антиобъемов S и P (непустоте пересечения антиобъемов субъекта и предиката), а перевод SoP эквивалентен формуле $\exists x(\neg Sx \wedge \neg\neg Px)$, то есть константа o понимается здесь как знак отсутствия включения антиобъема S в антиобъем P.

Таким образом, перевод $^{\otimes}$ задает стандартную трактовку силлогистических констант a, i, e, o, но не применительно к объемам субъектов и предикатов соответствующих категорических высказываний, а применительно к их антиобъемам!

Для обоснования тезиса о том, что фундаментальная силлогистика может рассматриваться как логика антиобъемов субъектов и предикатов высказываний (в указанном выше смысле), необходимо доказать, что перевод $^{\otimes}$ погружает систему **ФС** в классическое исчисление предикатов.

Данное утверждение можно обосновать средствами исчисления предикатов, сличая переводы * и $^{\otimes}$ и используя правило подстановки вместо предикатных символов и правило эквивалентной замены. Мы же будем вести доказательство, оставаясь «внутри» силлогистики и опираясь на результаты, изложенные в малоизвестной работе И.И. Ганиянца и В.И. Маркина [3]. В ней были построены системы, исходными константами которых, наряду с a и o, являются не i и e, а новые, нестандартные константы «исчерпываемости» (u) и «неисчерпываемости» (j) предметной области объемами субъекта и предиката. В языке этой силлогистики помимо SaP и SoP имеются две новых разновидности элементарных формул – SuP и SjP. SuP может быть прочитана так: «Всякий объект есть S или P», а SjP – как: «Некий объект не есть ни S, ни P». Высказывания подобных типов впервые были исследованы А. Де Морганом [9].

Первое исчисление силлогистического типа в языке с константами a, u, j, o – система **ФУ** – кроме классических тавтологий и правила *modus ponens* содержит аксиомы следующих типов:

У1. $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$, **У5**. $SjP \supset SjS$,
У2. $(MaP \wedge SuM) \supset SuP$, **У6**. $SoP \supset PjP$,

У3. $SuP \supset PuS$, **У7**. $SjP \equiv \neg SuP$,
У4. SaS, **У8**. $SoP \equiv \neg SaP$.

Исчисление **ФУ** так же, как и система фундаментальной силлогистики **ФС**, является подсистемой обобщенной фундаментальной силлогистики **ОФС**, которая построена и проанализирована в работе [6] и содержит в качестве исходных силлогистические константы a, i, e, o, u, j.

Для системы **ФУ** в [3] предложен следующий адекватный перевод $^{\odot}$ в язык классического исчисления предикатов:

$$\begin{array}{ll} SaP^{\odot} = \forall x(Px \supset Sx), & SuP^{\odot} = \forall x(Sx \vee Px), \\ SjP^{\odot} = \exists x(\neg Sx \wedge \neg Px), & SoP^{\odot} = \exists x(Sx \wedge \neg Px), \\ (\neg A)^{\odot} = \neg A^{\odot}, & (A \nabla B)^{\odot} = A^{\odot} \nabla B^{\odot}. \end{array}$$

Функция $^{\odot}$ погружает систему **ФУ** в исчисление предикатов (подробное доказательство содержится в дипломной работе И.И. Ганиянца, оно аналогично доказательству погружаемости **ФС** в исчисление предикатов посредством перевода *, представленному в [5, с. 18–27]).

Силлогистики **ФС** и **ФУ** названы в [3] *зеркальными*. Смысл этого отношения состоит в следующем. Если в любой теореме системы **ФС** заменить все подформулы вида SaP на PaS, подформулы вида SoP на PoS, подформулы вида SeP на SuP, а подформулы вида SiP на SjP, то полученная формула окажется доказуемой в **ФУ**. При обратной замене подформул в любой теореме системы **ФУ** мы получим формулу, доказуемую в **ФС**.

В более точных терминах, необходимо рассмотреть два перевода: перевод τ_1 из множества формул системы **ФС** в множество формул системы **ФУ** и перевод τ_2 из множества формул системы **ФУ** в множество формул системы **ФС**:

$$\begin{array}{ll} \tau_1(SaP) = PaS, & \tau_2(SaP) = PaS, \\ \tau_1(SoP) = PoS, & \tau_2(SoP) = PoS, \\ \tau_1(SeP) = SuP, & \tau_2(SuP) = SeP, \\ \tau_1(SiP) = SjP, & \tau_2(SjP) = SiP, \\ \tau_1(\neg A) = \neg\tau_1(A), & \tau_2(\neg A) = \neg\tau_2(A), \\ \tau_1(A \nabla B) = \tau_1(A) \nabla \tau_1(B), & \tau_2(A \nabla B) = \tau_2(A) \nabla \tau_2(B). \end{array}$$

Несложно показать, что τ_1-перевод любой аксиомы **ФС** доказуем в **ФУ**, а также то, что если $\tau_1(A \supset B)$ и $\tau_1(A)$ являются теоремами **ФУ**, то и $\tau_1(B)$ доказуема в **ФУ**. Следовательно, для любой формулы A языка **ФС** верно: если A доказуема в **ФС**, то $\tau_1(A)$ доказуема в **ФУ**.

Аналогичным образом демонстрируется справедливость следующего утверждения: для любой формулы A языка **ФУ** верно: если A доказуема в **ФУ**, то $\tau_2(A)$ доказуема в **ФС**.

Кроме того, индукцией по длине формулы A языка **ФС** можно доказать, что $\tau_2(\tau_1(A)) = A$. А индукцией по длине формулы A языка **ФУ** можно доказать, что $\tau_1(\tau_2 A) = A$. Поэтому формула $A \equiv \tau_2(\tau_1(A))$ является теоремой **ФС** для любой A языка этой системы, а формула $A \equiv \tau_1(\tau_2(A))$ является теоремой **ФУ** для любой A ее языка.

Все сказанное выше, согласно известному критерию погружаемости одного исчисления в другое, предложенному В.А. Смирновым [8, с. 159], означает, что τ_1 погружает систему **ФС** в **ФУ**, а τ_2 погружает систему **ФУ** в **ФС**.

Теперь мы в состоянии доказать метатеорему о погружаемости фундаментальной силлогистики **ФС** в исчисление предикатов посредством нестандартного перевода $^{\otimes}$:

Теорема 1. *Функция* $^{\otimes}$ *погружает систему* ***ФС*** *в классическое одноместное исчисление предикатов.*

Доказательство. Выше было отмечено, что перевод τ_1 погружает силлогистику **ФС** в **ФУ**, а перевод $^{\odot}$ – систему **ФУ** в классическое исчисление предикатов. Отсюда следует, что **ФС** погружается в исчисление предикатов посредством композиции функций $^{\odot}$ и τ_1. То есть для любой формулы A языка **ФС** верно: A доказуема в **ФС**, если и только если формула $\tau_1(A)^{\odot}$ доказуема в исчислении предикатов.

Покажем далее, что $\tau_1(A)^{\odot} = A^{\otimes}$ для любой формулы A языка **ФС**. Рассуждение ведем возвратной индукцией по числу пропозициональных связок в формуле A. Допустим, что для любой формулы B с меньшим, чем у A, количеством связок верно: $\tau_1(B)^{\odot} = B^{\otimes}$. Осуществим разбор шести случаев в зависимости от вида формулы A.

(1) A есть SaP.

$\tau_1(SaP)^{\odot} = PaS^{\odot} = \forall x(Px \supset Sx) = SaP^{\otimes}$.

(2) A есть SiP.

$\tau_1(SiP)^{\odot} = SjP^{\odot} = \exists x(\neg Sx \wedge \neg Px) = SiP^{\otimes}$.

(3) A есть SeP.

$\tau_1(SeP)^{\odot} = SuP^{\odot} = \forall x(Sx \vee Px) = SeP^{\otimes}$.

(4) A есть SoP.

$\tau_1(SoP)^{\odot} = PoS^{\odot} = \exists x(Px \wedge \neg Sx) = SoP^{\otimes}$.

(5) A есть $\neg B$. Согласно определениям функций τ_1 и $^{\odot}$, $\tau_1(\neg B)^{\odot} = (\neg\tau_1(B))^{\odot} = \neg(\tau_1(B))^{\odot}$. Поскольку B содержит меньше связок, чем A, по индуктивному допущению имеем: $\tau_1(B)^{\odot} = B^{\otimes}$. Тогда $\neg\tau_1(B)^{\odot} = \neg B^{\otimes}$. А по определению функции $^{\otimes}$, $\neg B^{\otimes} = (\neg B)^{\otimes}$. Таким образом, $\tau_1(\neg B)^{\odot} = (\neg B)^{\otimes}$.

(6) A есть $B \triangledown C$. Согласно определениям функций τ_1 и $^{\odot}$, $\tau_1(B \triangledown C)^{\odot} = (\tau_1(B) \triangledown \tau_1(C))^{\odot} = \tau_1(B)^{\odot} \triangledown \tau_1(C)^{\odot}$. Поскольку B и C содержат меньше связок, чем A, по индуктивному допущению имеем: $\tau_1(B)^{\odot} = B^{\otimes}$ и $\tau_1(C)^{\odot} = C^{\otimes}$. Тогда $\tau_1(B)^{\odot} \triangledown \tau_1(C)^{\odot} = B^{\otimes} \triangledown C^{\otimes}$. А по определению функции $^{\otimes}$, $B^{\otimes} \triangledown C^{\otimes} = (B \triangledown C)^{\otimes}$. Таким образом, $\tau_1(B \triangledown C)^{\odot} = (B \triangledown C)^{\otimes}$.

Итак, произвольная формула A доказуема в системе **ФС**, если и только если $\tau_1(A)^{\odot}$ доказуема в исчислении предикатов, и при этом $\tau_1(A)^{\odot} = A^{\otimes}$. Отсюда следует, что для любой формулы A языка **ФС** верно: A доказуема в **ФС**, если и только если формула $A^{\otimes}$ доказуема в исчислении предикатов. Иными словами, $^{\otimes}$ есть перевод, погружающий **ФС** в классическое одноместное исчисление предикатов. □

Предложим теперь нестандартный перевод Λ в исчисление предикатов для другой силлогистической теории – силлогистики Лукасевича (системы **С4**), которая формализует позитивный фрагмент традиционной силлогистики:

$$\Lambda(A) = (\exists x \neg S_1 x \wedge ... \wedge \exists x \neg S_n x) \supset A^{\otimes},$$

где $S_1, ..., S_n$ – все силлогистические термины в формуле A.

Перевод Λ позволяет истолковывать систему **С4** как логику антиобъемов субъектов и предикатов категорических высказываний в том же самом ключе, что и перевод $^{\otimes}$ применительно к силлогистике **ФС**. Действительно, Λ определяется через $^{\otimes}$, который интерпретирует силлогистические константы как знаки отношений между антиобъемами терминов категорических высказываний, а экзистенциальный префикс $\Lambda(A)$ – формула $\exists x \neg S_1 x \wedge ... \wedge \exists x \neg S_n x$ – выражает предпосылку о непустоте антиобъемов всех терминов силлогистической формулы A.

Для доказательства адекватности перевода Λ силлогистике Лукасевича рассмотрим другое исчисление силлогистического типа в языке с исходными константами a, u, j, o, сформулированное в работе [3]. Исчисление **С4У** наряду с классическими тавтологиями и правилом *modus ponens* содержит аксиомы следующих типов:

Л1. $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$, **Л5**. $SjP \supset SaS$,
Л2. $(MaP \wedge SuM) \supset SuP$, **Л6**. SjS,

Л3. $SuP \supset PuS$, **Л7**. $SjP \equiv \neg SuP$,
Л4. $SaP \supset SjP$, **Л8**. $SoP \equiv \neg SaP$.

Исчисление **С4У**, как и **С4**, является подсистемой обобщенной традиционной силлогистики **ОС4**, содержащей в качестве исходных силлогистические константы a, i, e, o, u, j [6].

Системы **С4** и **С4У** являются зеркальными, то есть перевод τ_1 погружает систему **С4** в **С4У**, а τ_2 погружает систему **С4У** в **С4**. Кроме того, силлогистика **С4У** погружается в классическое одноместное исчисление предикатов посредством следующего перевода Ξ:

$$\Xi(A) = (\exists x \neg S_1 x \wedge ... \wedge \exists x \neg S_n x) \supset A^{\odot},$$

где $S_1, ..., S_n$ – все силлогистические термины в составе формулы A. Доказательство осуществлено в дипломной работе И.И. Ганиянца, оно основано на методе, использованном в [2, с. 93–95] при доказательстве погружаемости системы **С4** в исчисление предикатов посредством перевода Θ.

Эти результаты позволяют обосновать справедливость следующего метаутверждения:

Теорема 2. *Функция Λ погружает систему* ***С4*** *в классическое одноместное исчисление предикатов.*

Доказательство. Поскольку τ_1 погружает силлогистику **С4** в **С4У**, а перевод Ξ – систему **С4У** в классическое исчисление предикатов, постольку **С4** погружается в исчисление предикатов посредством композиции функций Ξ и τ_1. То есть для любой формулы A стандартного силлогистического языка верно: A доказуема в **С4**, если и только если формула $\Xi(\tau_1(A))$ доказуема в исчислении предикатов.

Согласно определению Ξ, $\Xi(\tau_1(A)) = (\exists x \neg S_1 x \wedge ... \wedge \exists x \neg S_n x) \supset \tau_1(A)^{\odot}$, где $S_1, ..., S_n$ – все силлогистические термины в составе формулы $\tau_1(A)$. При доказательстве предыдущей метатеоремы было показано, что $\tau_1(A)^{\odot} = A^{\otimes}$ для любой формулы A стандартного языка. Поэтому $\Xi(\tau_1(A)) = (\exists x \neg S_1 x \wedge ... \wedge \exists x \neg S_n x) \supset A^{\otimes}$. Но, по определению перевода Λ, $\Lambda(A) = (\exists x \neg S_1 x \wedge ... \wedge \exists x \neg S_n x) \supset A^{\otimes}$, где $S_1, ..., S_n$ – все силлогистические термины в составе формулы A. Несложно убедиться в том, что множества силлогистических терминов в составе формул A и $\tau_1(A)$ совпадают для любой формулы A. Поэтому $\Xi(\tau_1(A)) = \Lambda(A)$, то есть Λ представляет собой композицию переводов Ξ и τ_1.

Из сказанного выше вытекает, что для любой формулы A стандартного силлогистического языка верно: A доказуема в **С4**, если и только если формула $\Lambda(A)$ доказуема в исчислении предикатов. Таким образом, Λ есть перевод, погружающий **C4** в классическое одноместное исчисление предикатов. $\square$

Итак, мы показали, что две широко известные системы позитивной силлогистики – фундаментальная и традиционная – могут быть истолкованы не только как «логики объемов», но и как «логики антиобъемов» субъектов и предикатов категорических высказываний. Подобное истолкование, опирающееся на нестандартные переводы силлогистических формул в язык классической логики предикатов, может быть осуществлено и для других систем позитивной силлогистики.

Литература

[1] *Бежанишвили М.Н., Мчедлишвили Л.И.* Позитивная силлогистика и логика предикатов // Логика Аристотеля. Тбилиси: Изд-во Тбилисского университета, 1985. С. 36–46.

[2] *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Силлогистические теории. М.: Прогресс-Традиция, 2010. 334 с.

[3] *Ганиянц И.И., Маркин В.И.* Силлогистики с константой исчерпываемости // Международная конференция «Развитие логики в России: итоги и перспективы». М.: Логос, 1997. С. 56–59.

[4] *Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М.: Изд-во иностранной литературы, 1959. 312 с.

[5] *Маркин В.И.* Силлогистические теории в современной логике. М.: Издательство МГУ, 1991. 96 с.

[6] *Маркин В.И.* Обобщенная позитивная силлогистика // Логические исследования. 1999. Вып. 6. С. 241–258.

[7] *Смирнов В.А.* Адекватный перевод утверждений силлогистики в исчисление предикатов // Актуальные проблемы логики и методологии науки. Киев: Наукова думка, 1980.

[8] *Смирнов В.А.* Логические методы анализа научного знания. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 264 с.

[9] *De Morgan A.* Formal Logic or the Calculus of Inferense, Nesessary, and Probable. London: Taylor and Walton, 1847. 336 p.

[10] *Shepherdson J.C.* On the Interpretation of Aristotelian Syllogistic // Journal of Symbolic Logic. 1956. Vol. 21 (2). P. 137–147.

V.I. Markin

Syllogistic Theory as Logic of Anti-extensions of Terms

Markin Vladimir Ilyich
Department of Logic, Faculty of Philosophy, Lomonosov Moscow State University.
Lomonosovsky prospekt 27-4, GSP-1, Moscow, 119991, Russian Federation.
e-mail: vladimirmarkin@mail.ru

For two syllogistics (fundamental and traditional) we define nonstandard translations into the predicate calculus. These translations make it possible to treat syllogistic theories as logics of anti-extensions of the subjects and the predicates of categorical statements. In compliance with the first translation, SaP means that anti-extension of S is included in anti-extension of P, SeP means that anti-extensions of S and P don't contain common elements, SiP means that the intersection of anti-extensions of S and P is nonempty, SoP means that anti-extension of S is not included in anti-extension of P. For arbitrary syllogistic formula A, the second translation includes additionally the precondition that anti-extensions of all the terms in A are nonempty. It is proved that these two syllogistics are embedded into the classical predicate calculus under the given translations.

Keywords: syllogistic, predicate calculus, embedding function, extensions and anti-extensions of terms

References

[1] Bezhanishvili, M.N., Mchedlishvili, L.I. "Pozitivnaja sillogistika i logika predmetov" [Positive syllogistic and logic of objects], *Logika Aristotelja* [Aristotle's logic]. Tbilisi: Izdatel'stvo tbilisskogo universiteta, 1985. pp. 36–46. (In Russian)

[2] Bocharov, V.A., Markin, V.I. *Sillogisticheskie teorii* [Syllogistic theories]. M.: Progress-Tradicija, 2010. 336 p. (In Russian)

[3] Ganijanc, I.I., Markin, V.I. "Sillogistiki s konstantoj ischerpyvaemosti" [Syllogistic with the exhaustive constant], Mezhdunarodnaja konferencija "Razvitie logiki v Rossii: itogi i perspektivy". M.: Logos, 1997. pp. 56–59. (In Russian)

[4] Lukasevich, Ja. *Aristotelevskaja sillogistika s tochki zrenija sovremennoj formal'noj logiki* [Aristotelian syllogistic in terms of modern formal logic]. M.: Izdatel'stvo inostrannoj literatury, 1959. 312 p. (In Russian)

[5] Markin, V.I. *Sillogisticheskie teorii v sovremennoi logike* [Syllogistic theories in modern logic]. M.: Izdatel'stvo MGU, 1991. 96 p. (In Russian)

[6] Markin, V.I. "Obobshhennaja pozitivnaja sillogistika" [Generalized positive syllogistic], *Logicheskie issledovanija* [Logical Investigations]. M.: Nauka, 1999, vol. 6, pp. 241–258. (In Russian)

[7] Smirnov, V.A. "Adekvatnyj perevod utverzhdenij sillogistiki v ischislenie predikatov" [Adequate translation syllogistic statements in predicate calculus], *Aktual'nye problemy logiki i metodologii nauki* [Actual problems of logic and methodology of science]. Kiev: Naukova dumka, 1980. (In Russian)

[8] Smirnov, V.A. *Logicheskie metody analiza nauchnogo znanija* [Logical methods of analysis of scientific knowledge]. M.: Jeditorial URSS, 2002. 264 p. (In Russian)

[9] De Morgan, A. *Formal Logic or the Calculus of Inferense, Nesessary, and Probable*. London: Taylor and Walton, 1847. 336 p.

[10] Shepherdson, J.C. "On the Interpretation of Aristotelian Syllogistic", *Journal of Symbolic Logic*, 1956, vol. 21 (2), pp. 137–147.

УДК 161.2

В.И. Шалак

Синтаксическая интерпретация категорических атрибутивных высказываний

Шалак Владимир Иванович
Сектор логики, Институт философии РАН.
Россия, 119991, Москва, ул. Волхонка, 14, строение 5.
e-mail: shalack@gmail.com

В статье предложен новый вид моделей для категорических атрибутивных высказываний. Эти модели могут быть названы синтаксическими, поскольку субъекту и предикату высказываний сопоставляются не экстенсионалы, а синтаксические определения, посредством которых эти термины вводятся в употребление. Построенные модели свободны от онтологических допущений. Связь между субъектом и предикатом интерпретируется не в терминах теоретико-множественных отношений между экстенсионалами, а в терминах логических отношений между дефиниенсами определений. Доказаны теоремы непротиворечивости и полноты фундаментальной силлогистики относительно синтаксических моделей.

Ключевые слова: атрибутивное высказывание, силлогистика, определение, понятие, аналитичность, модель

События рубежа XIX–XX вв., связанные с проблемами оснований математики, изменили основной тренд развития логики. Фреге-Расселовский подход начал свою победную поступь. Вопросы, дискутируемые ранее в рамках традиционной логики, отошли на дальний план, хотя далеко не на все из них были получены приемлемые ответы. Интерпретация атрибутивных высказываний в терминах одноместного исчисления предикатов и его моделей была признана удовлетворительной и в определенном смысле «закрывала» традиционную логику как самостоятельную область исследований. Вопреки этому логики-философы продолжают обращаться к проблематике традиционной логики. Как ни странно, но даже в такой исследованной вдоль и поперек области еще можно обнаружить много интересного.

Обратимся к моделям простых позитивных категорических атрибутивных высказываний и напомним их стандартную интерпретацию.

1 Язык

Определение 1. Исходные символы языка

1. $S, P, M, Q, R, N, \ldots$ — символы общих имен;
2. a, e, i, o — силлогистические константы.

Определение 2. Формулы

1. Если S и P — символы общих имен, то SaP, SeP, SiP, SoP — формулы.
2. Ничто другое формулой не является.

2 Экстенсиональные модели

Определение 3. *Экстенсиональной моделью* для простых категорических атрибутивных высказываний будем называть пару $\mathbf{M} = \langle D, \varphi \rangle$, где

1. D — непустое множество индивидов;
2. φ — функция, определенная на множестве символов общих имен и сопоставляющая каждому из них некоторое подмножество $\varphi(P) \subseteq D$.

В фундаментальной силлогистике (ФС) *истинность атрибутивных высказываний в экстенсиональной модели* $\mathbf{M}$ определяется следующим образом:

E.1 $\mathbf{M} \models SaP \Longleftrightarrow \varphi(S) \subseteq \varphi(P)$

E.2 $\mathbf{M} \models SeP \Longleftrightarrow \varphi(S) \cap \varphi(P) = \emptyset$

E.3 $\mathbf{M} \models SiP \Longleftrightarrow \varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \emptyset$

E.4 $\mathbf{M} \models SoP \Longleftrightarrow \varphi(S) \setminus \varphi(P) \neq \emptyset$

Формула A *общезначима*, если и только если она истинна в каждой модели $\mathbf{M}$.

Именно такого понимания категорических атрибутивных высказываний придерживается Д. Гильберт в работе [2, с. 73–80]. При этом интересно сделанное им замечание *«Наше отклонение от Аристотеля ... оправдывается потребностями математических применений логики, где класть в основу аристотелево понимание было бы нецелесообразно»* [2, с. 79].

Очевидно, что при такой интерпретации атрибутивных высказываний формулы вида SaS будут *общезначимыми* и *аналитически* истинными. Высказывания других видов могут быть истинными лишь в конкретных моделях, что соответствует их *эмпиричности*. Для установления значения таких высказываний в конкретных моделях необходимо знать объемы общих имен субъекта и предиката и иметь возможность установить характер отношения между ними. Теоретически это возможно, но как на практике применить эту теорию к высказыванию *«Все люди животные»* или *«Все кентавры имеют человеческую голову»*?

Кроме самих высказываний нас интересует и отношение следования между ними. Аксиоматизировать его можно разными способами. В настоящее время наиболее популярен подход с использованием логики высказываний. Для этого к исходным символам языка добавляют связки логики высказываний и расширяют определение понятия формулы. Затем принимают все аксиомы и правила вывода логики высказываний и добавляют к ним ряд специальных аксиом, относящихся к атрибутивным высказываниям. Понятие вывода соответствует понятию вывода в логике высказываний. Все это достаточно хорошо освещено в литературе [1] и потому не требует подробного изложения.

При таком подходе класс общезначимых формул ФС может быть аксиоматизирован следующим образом:

A.0 Схемы аксиом классического исчисления высказываний.

A.1 $(MaP \,\&\, SaM) \supset SaP$

A.2 $(MeP \,\&\, SaM) \supset SeP$

A.3 $SeP \supset PeS$

A.4 SaS

A.5 $SiP \supset SiS$

A.6 $SoP \supset SiS$

A.7 $SiP \equiv \neg SeP$

A.8 $SoP \equiv \neg SaP$

Единственное правило вывода — *modus ponens.*

Доказательство полноты можно найти в работе [1, с. 66–76].

Знаку общего имени может быть поставлено в соответствие понятие. Это нашло отражение в логической литературе, когда, говоря о субъекте и предикате атрибутивного высказывания, употребляют термин *понятие*, а не *общее имя.* С каждым понятием помимо объема мы связываем содержание как некоторую совокупность признаков, посредством которых выделяем мыслимые в понятии предметы. Благодаря этому появляется возможность анализировать связь между субъектом и предикатом атрибутивного высказывания не только с точки зрения *объема* понятия, но и с точки зрения его *содержания*, т.е. интенсионально. На это обращал внимание еще Лейбниц.

«Действительно, говоря: „Всякий человек есть животное“, я хочу этим сказать, что все люди находятся в числе всех животных, но одновременно я имею в виду, что идея животного включена в идею человека. Животное содержит больше индивидов, чем человек, но человек содержит больше идей или формальных определений. Животное содержит больше экземпляров, человек — больше степеней реальности; у первого больше объем, у второго больше содержание. Поэтому мы вправе сказать, что все учение о силлогизме можно доказать на основании учения de continente et contento (о содержащем и содержимом), которое отлично от учения о целом и части» [6, т. 2, с. 501–502].

Аналогичные мысли можно встретить и у И. Канта, когда он рассуждает о различии между аналитическими и синтетическими суждениями [4, с. 37–38, 132].

Строгое уточнение интенсиональной интерпретации атрибутивных высказываний было дано В. Маркиным в работах [1, 7, 8, 9].

3 Интенсиональные модели

Определение 4. *Итенсиональной* моделью для простых категорических атрибутивных высказываний будем называть четверку $\mathbf{I} = \langle L, \Pi, H, \pi \rangle$, где

1. L — непустое множество литералов $\{p_1, \sim p_1, p_2, \sim p_2, \dots\}$, представляющих положительные и отрицательные признаки. Литерал без знака «$\sim$» является положительным признаком, а литерал с этим знаком — отрицательным при знаком;

2. Π — множество всех непустых подмножеств L (множество содержаний всех понятий);

3. H — множество всех непустых непротиворечивых подмножеств L, т.е. не содержащих одновременно p_i и $\sim p_i$ для некоторого i (множество всех непротиворечивых содержаний понятий).

4. π — функция, определенная на множестве символов общих имен и сопоставляющая каждому из них некоторое содержание понятие $\pi(P) \in \Pi$.

В фундаментальной силлогистике (ФС) *значимость атрибутивных высказываний в интенсиональной модели* **I** определяется следующим образом:

I.1 $\mathbf{I} \models SaP \Longleftrightarrow \pi(P) \subseteq \pi(S)$ или $\pi(S) \notin H$

I.2 $\mathbf{I} \models SeP \Longleftrightarrow \pi(S) \cup \pi(P) \notin H$

I.3 $\mathbf{I} \models SiP \Longleftrightarrow \pi(S) \cup \pi(P) \in H$

I.4 $\mathbf{I} \models SoP \Longleftrightarrow \pi(P) \setminus \pi(S) \neq \emptyset$ и $\pi(S) \in H$

Формула A *интенсионально общезначима*, если и только если она значима в каждой интенсиональной модели **I**. Доказательство полноты можно найти в работе [1, с. 310–321].

Обратим внимание на то, что В. Маркин говорит не об истинности формул в модели, а об их значимости. Если придерживаться корреспондентской теории истинности, то из значимости высказывания SiP в интенсиональной модели вовсе не обязательно следует его истинность, поскольку значимость в данном случае означает всего лишь совместную непротиворечивость содержаний понятий S и P, что является всего лишь *необходимым* условием истинности в корреспондентском смысле. В то же время интенсиональная значимость высказывания SaP является *достаточным* условием его истинности в корреспондентском смысле.

Поскольку значимость высказываний в интенсиональных моделях устанавливается без обращения к объемам понятий, они все являются *аналитическими*.

Предложенные В. Маркиным интенсиональные модели очень интересны и важны с историко-философской точки зрения, поскольку являются строгим уточнением идей, высказанных в разные эпохи разными философами. К сожалению, эти модели не получили должного отклика и развития в работах других логиков. Хотелось бы подчеркнуть, что именно результаты Маркина послужили толчком для построения предлагаемых ниже синтаксических моделей категорических атрибутивных высказываний.

Содержания понятий, с помощью которых устанавливается связь субъекта и предиката высказываний в интенсиональных моделях, не даны нам от Бога, а являются искусственными конструктами, посредством которых мы выделяем и связываем с общим именем мыслимые совокупности объектов. При этом мыслимые объекты вовсе не должны обладать реальным существованием. Простейшими примерами таких понятий являются понятия *Кентавра*, *Пегаса* или *Олимпийского бога*. Мы мыслим их исключительно интенсионально посредством набора признаков, составляющих содержание понятия. Но откуда берутся в содержании понятия эти признаки?

Ответ лежит на поверхности. Этому служат операции определения. Если вынести за скобки мотивацию принятия того или иного определения, сама эта операция является исключительно синтаксической. Приняв на уровне языка определение *«Человек — это двуногое и бесперое животное»*, мы на уровне содержания связали с общим именем Человек два положительных признака *Животное*, *Двуногое* и один отрицательный — *Не покрытый перьями*. После этого общеутвердительное высказывание *«Все люди — животные»* становится аналитически истинным. Доказательство его аналитической истинности может быть проведено исключительно синтаксически, опираясь лишь на определения общих имен без каких-либо ссылок на содержания понятий. Это наблюдение и было положено в основу построения синтаксических моделей категорических атрибутивных высказываний.

Общеутвердительное высказывание SaP синтаксически значимо, если и только если из дефиниенса определения субъекта S можно дедуцировать дефиниенс определения предиката P.

Общеотрицательное высказывание SeP синтаксически значимо, если и только если дефиниенсы определений субъекта S и предиката P несовместимы друг с другом.

Частноутвердительное высказывание SiP синтаксически значимо, если и только если дефиниенсы определений субъекта S и предиката P совместимы друг с другом.

Частноотрицательное высказывание SoP синтаксически значимо, если и только если дефиниенс определения субъекта S совместим с отрицанием дефиниенса определения предиката P.

4 Синтаксические модели

Определение 5. *Синтаксической* моделью для простых атрибутивных высказываний будем называть пятерку $\mathbf{S} = \langle L, C, F, \vdash, \delta \rangle$, где

1. L — непустое множество исходных символов для представления признаков $\{p_1, p_2, \ldots\}$;
2. C — множество связок. Пусть это будет привычный набор $\{\wedge, \vee, \sim\}$;
3. F — множество всех формул логики высказываний в языке с исходными символами $L \cup C$;
4. $\vdash$ — отношение выводимости на F, в качестве которого возьмем отношение выводимости классической логики высказываний;
5. δ — функция, определенная на множестве символов общих имен и сопоставляющая каждому из них некоторую формулу $\delta(P) \in F$ (дефиниенс явного определения общего имени P).

Напомним некоторые из свойств отношения выводимости классической логики высказываний.

C.1 $A \vdash A$

C.2 $\Gamma, A, B, \Delta \vdash C \implies \Gamma, B, A, \Delta \vdash C$

C.3 $\Gamma, A, A, \Delta \vdash C \implies \Gamma, A, \Delta \vdash C$

C.4 $\Gamma, A, \Delta \vdash C \implies \Gamma, A, B, \Delta \vdash C$

C.5 $\Gamma \vdash A;\ A, \Delta \vdash B \implies \Gamma, \Delta \vdash B$

C.6 $\Gamma, A, B, \Delta \vdash C \implies \Gamma, A \wedge B, \Delta \vdash C$

C.7 $\Gamma, A \wedge B, \Delta \vdash C \implies \Gamma, A, B, \Delta \vdash C$

C.8 $\Gamma \vdash A;\ \Gamma \vdash B \implies \Gamma \vdash A \wedge B$

C.9 $\Gamma \vdash A \wedge B \implies \Gamma \vdash A$

C.10 $\Gamma \vdash A \wedge B \implies \Gamma \vdash B$

C.11 $\Gamma, A, \sim A \vdash B$

В последующем изложении факт существования для некоторой формулы A выводимости $\Gamma \vdash A \wedge \sim A$ будем обозначать посредством $\Gamma \vdash \mathbf{f}$.

В фундаментальной силлогистике (ФС) *значимость атрибутивных высказываний в синтаксической модели* $\mathbf{S}$ определяется следующим образом:

S.1 $\mathbf{S} \models SaP \iff \delta(S) \vdash \delta(P)$

S.2 $\mathbf{S} \models SeP \iff \delta(S), \delta(P) \vdash \mathbf{f}$

S.3 $\mathbf{S} \models SiP \iff \delta(S), \delta(P) \nvdash \mathbf{f}$

S.4 $\mathbf{S} \models SoP \iff \delta(S) \nvdash \delta(P)$

Формула A *синтаксически общезначима*, если и только если она значима в каждой синтаксической модели $\mathbf{S}$.

Покажем, что синтаксические модели являются адекватными для фундаментальной силлогистики.

Теорема 1. ***Теорема непротиворечивости.*** *Всякая теорема фундаментальной силлогистики значима в каждой синтаксической модели.*

Доказательство.

Пусть нам дана синтаксическая модель $\mathbf{S} = \langle L, C, F, \vdash, \delta \rangle$. Проверим, что каждая из аксиом фундаментальной силлогистики значима в ней.

A.1 $(MaP \,\&\, SaM) \supset SaP$

1. $\delta(M) \vdash \delta(P)$ - допущение
2. $\delta(S) \vdash \delta(M)$ - допущение
3. $\delta(S) \vdash \delta(P)$ - из 1, 2 по С.5

A.2 $(MeP \,\&\, SaM) \supset SeP$

1. $\delta(M), \delta(P) \vdash \mathbf{f}$ - допущение
2. $\delta(S) \vdash \delta(M)$ - допущение
3. $\delta(S), \delta(P) \vdash \mathbf{f}$ - из 1, 2 по С.5

A.3 $SeP \supset PeS$

1. $\delta(S), \delta(P) \vdash \mathbf{f}$ - допущение
2. $\delta(P), \delta(S) \vdash \mathbf{f}$ - из 1 по C.2

A.4 SaS

1. $\delta(S) \vdash \delta(S)$ - по C.1

A.5 $SiP \supset SiS$

1. $\delta(S), \delta(P) \nvdash \mathbf{f}$ - допущение
2. $\delta(S), \delta(S) \vdash \mathbf{f}$ - допущение от противного
3. $\delta(S) \vdash \mathbf{f}$ - из 2 по C.3
4. $\delta(S), \delta(P) \vdash \mathbf{f}$ - из 3 по C.4
5. противоречие - 1, 4

A.6 $SoP \supset SiS$

1. $\delta(S) \nvdash \delta(P)$ - допущение
2. $\delta(S), \delta(S) \vdash \mathbf{f}$ - допущение от противного
3. $\delta(S) \vdash \mathbf{f}$ - из 2 по C.3
4. $\delta(S) \vdash A \wedge \sim A$ - из 3 по определению $\mathbf{f}$
5. $A, \sim A \vdash \delta(P)$ - C.11
6. $A \wedge \sim A \vdash \delta(P)$ - из 5 по C.6
7. $\delta(S) \vdash \delta(P)$ - из 4, 6 по C.5
8. противоречие - 1, 7

A.7 $SiP \equiv \neg SeP$ - пункты 2, 3 определения значимости в синтаксической модели.

A.8 $SoP \equiv \neg SaP$ - пункты 1, 4 определения значимости в синтаксической модели.

Все аксиомы логики высказываний значимы в синтаксической модели, а *modus ponens* сохраняет это свойство.

□

Теорему о полноте фундаментальной силлогистики относительно синтаксических моделей докажем методом Хенкина.

Обычным образом любое непротиворечивое множество формул мы можем расширить до максимального ФС-непротиворечивого Δ, обладающего свойствами:

M.1 Δ содержит все теоремы ФС.

M.2 Δ замкнуто относительно *modus ponens*.

M.3 $\neg A \in \Delta \Longleftrightarrow A \notin \Delta$.

M.4 $A\&B \in \Delta \Longleftrightarrow A \in \Delta$ и $B \in \Delta$.

M.5 $A \vee B \in \Delta \Longleftrightarrow A \in \Delta$ или $B \in \Delta$.

M.6 $A \supset B \in \Delta \Longleftrightarrow A \notin \Delta$ или $B \in \Delta$.

Поскольку для доказательства теоремы полноты нам понадобится рассматривать максимально непротиворечивые множества, полученные в результате расширения конечных множеств формул, примем, что множество исходных символов общих имен конечно.

Для максимально ФС-непротиворечивого множества Δ определим каноническую синтаксическую модель $\mathbf{S}_\Delta = \langle L, C, F, \vdash, \delta_\Delta \rangle$ следующим образом.

Определение 6.

1. L будет состоять из символов общих имен языка $\{S, P, M, Q, R, N, \dots\}$.
2. $C = \{\wedge, \vee, \sim\}$.
3. F — множество всех формул логики высказываний в языке с исходными символами $L \cup C$.
4. $\vdash$ — классическое отношение выводимости на F.
5. δ_Δ определим следующим образом. Пусть $\Omega_Q = \{T : QaT \in \Delta\} \cup \{\sim T : QeT \in \Delta\}$. Обозначим посредством $\Omega_{Q\wedge}$ элементарную конъюнкцию всех элементов Ω_Q. Поскольку мы ограничились языком с конечным набором символов общих имен, эта конъюнкция конечна. Тогда $\delta_\Delta(Q) = \Omega_{Q\wedge}$. Это определение в значительной степени опирается на идеи В. Маркина для канонических интенсиональных моделей.

Поскольку для любого общего имени S нашего языка формула SaS является теоремой ФС и принадлежит каждому максимальному ФС-непротиворечивому множеству Δ, т.е. $S \in \Omega_S$, то $\delta_\Delta(S)$ всегда определена.

Единственным нетривиальным шагом в доказательстве теоремы о полноте является следующая лемма.

Лемма 1. *Для произвольного максимального ФС-непротиворечивого множества* Δ *и произвольной формулы* A *верно, что* $A \in \Delta \Longleftrightarrow \boldsymbol{S}_\Delta \models A$.

Доказательство.

Рассмотрим четыре базисных случая.

I. A есть SaP

Докажем $SaP \in \Delta \Longrightarrow \mathbf{S}_\Delta \models SaP$

1. $SaP \in \Delta$	- допущение
2. $T \in \Omega_P$	- допущение
3. $PaT \in \Delta$	- из 2 по определению δ_Δ
4. $(PaT \,\&\, SaP) \supset SaT$	- A.1
5. $SaT \in \Delta$	- из 1, 3, 4 по M.2, M.4
6. $T \in \Omega_S$	- из 5 по определению δ_Δ
7. $\sim T \in \Omega_P$	- допущение
8. $PeT \in \Delta$	- из 7 по определению δ_Δ
9. $(PeT \,\&\, SaP) \supset SeT$	- A.2
10. $SeT \in \Delta$	- из 1, 8, 9 по M.2, M.4
11. $\sim T \in \Omega_S$	- из 10 по определению δ_Δ
12. $\delta_\Delta(S) \vdash \delta_\Delta(P)$	- из 1, 2-6, 7-11 по C.8, C.9
13. $S_\Delta \models SaP$	- из 12 по S.1

Докажем $\mathbf{S}_\Delta \models SaP \Longrightarrow SaP \in \Delta$

1. $\mathbf{S}_\Delta \models SaP$	- допущение
2. $\delta_\Delta(S) \vdash \delta_\Delta(P)$	- из 1 по S.1
3. $\delta_\Delta(S) \nvdash \mathbf{f}$	- допущение
4. $\Omega_{S\wedge} \vdash \Omega_{P\wedge}$	- из 2
5. $\Omega_P \subseteq \Omega_S$	- из 3, 4 по C.8, C.9
6. $PaP \in \Delta$	- A.4, M.1
7. $P \in \Omega_P$	- из 6 по определению Ω_P
8. $P \in \Omega_S$	- из 5, 7
9. $SaP \in \Delta$	- из 8 по определению Ω_S
10. $\delta_\Delta(S) \vdash \mathbf{f}$	- допущение
11. $\Omega_{S\wedge} \vdash \mathbf{f}$	- из 10 по определению $\delta_\Delta(S)$
12. $T \in \Omega_S$, $\sim T \in \Omega_S$	- из 11 для некоторого T
13. $SaT \in \Delta$, $SeT \in \Delta$	- из 12 по определению Ω_S

14. $(SeT \supset TeS) \in \Delta$ - A.3, M.1
15. $TeS \in \Delta$ - из 14, M.2
16. $(TeS \,\&\, SaT) \supset SeS \in \Delta$ - теорема ФС, M.1
17. $SeS \in \Delta$ - из 13, 15, 16, M.2, M.4
18. $(SeS \supset SaP) \in \Delta$ - теорема ФС, M.1
19. $SaP \in \Delta$ - 17, 18, M.2
20. $SaP \in \Delta$ - из 3-9, 10-19

II. A есть SeP

Докажем $SeP \in \Delta \Longrightarrow \mathbf{S}_\Delta \models SeP$

1. $SeP \in \Delta$ - допущение
2. $(SeP \supset PeS) \in \Delta$ - A.3, M.1
3. $PeS \in \Delta$ - из 1, 2, M.2
4. $SaS \in \Delta$ - A.4, M.1
5. $\sim S \in \Omega_P$ - из 3 по определению Ω_P
6. $S \in \Omega_S$ - из 4 по определению Ω_S
7. $\Omega_{S\wedge}, \Omega_{P\wedge} \vdash S\wedge \sim S$ - из 5, 6
8. $\delta_\Delta(S), \delta_\Delta(P) \vdash \mathbf{f}$ - из 7 по определению δ_Δ, $\mathbf{f}$
9. $\mathbf{S}_\Delta \models SeP$ - из 8 по S.2

Докажем $\mathbf{S}_\Delta \models SeP \Longrightarrow SeP \in \Delta$

1. $\mathbf{S}_\Delta \models SeP$ - допущение
2. $\delta_\Delta(S), \delta_\Delta(P) \vdash \mathbf{f}$ - из 1 по S.2
3. $\delta_\Delta(S) \vdash T\wedge \sim T$ или
   $\delta_\Delta(P) \vdash T\wedge \sim T$ или
   $[\delta_\Delta(S) \vdash T,\ \delta_\Delta(P) \vdash \sim T]$ или
   $[\delta_\Delta(S) \vdash \sim T,\ \delta_\Delta(P) \vdash T]$ - из 2
4. $\delta_\Delta(S) \vdash T\wedge \sim T$ - допущение
5. $\Omega_{S\wedge} \vdash T\wedge \sim T$ - из 4 по определению δ_Ω
6. $T \in \Omega_S$, $\sim T \in \Omega_S$ - из 5 по определению $\Omega_{S\wedge}$
7. $SaT \in \Delta$ - из 6 по определению Ω_S
8. $SeT \in \Delta$ - из 6 по определению Ω_S
9. $(SeT \supset TeS) \in \Delta$ - A.3, M.1
10. $TeS \in \Delta$ - из 8, 9, M.2
11. $(TeS \,\&\, SaT) \supset SeS \in \Delta$ - A.2, M.1
12. $SeS \in \Delta$ - из 7, 10, 11, M.2, M.4

13. $(SeS \supset SeP) \in \Delta$ - теорема ФС, М.1
14. $SeP \in \Delta$ - из 12, 13, М.2
15. $\delta_\Delta(P) \vdash T \wedge \sim T$ - допущение
16. $\Omega_{P\wedge} \vdash T \wedge \sim T$ - из 15 по определению δ_Ω
17. $T \in \Omega_P,\ \sim T \in \Omega_P$ - из 16 по определению $\Omega_{P\wedge}$
18. $PaT \in \Delta$ - из 17 по определению Ω_P
19. $PeT \in \Delta$ - из 17 по определению Ω_P
20. $(PeT \supset TeP) \in \Delta$ - A.3, М.1
21. $TeP \in \Delta$ - из 19, 20, М.2
22. $(TeP\ \&\ PaT) \supset PeP \in \Delta$ - A.2, М.1
23. $PeP \in \Delta$ - из 18, 21, 22, М.2, М.4
24. $(PeP \supset SeP) \in \Delta$ - теорема ФС, М.1
25. $SeP \in \Delta$ - из 23, 24, М.2
26. $\delta_\Delta(S) \vdash T,\ \delta_\Delta(P) \vdash \sim T$ - допущение
27. $\Omega_{\Delta S} \vdash T,\ \Omega_{\Delta P} \vdash \sim T$ - из 26 по определению δ_Δ
28. $T \in \Omega_S,\ \sim T \in \Omega_P$ - из 27 по определению $\Omega_{\Delta S}$, $\Omega_{\Delta P}$
29. $SaT \in \Delta$ - из 28 по определению Ω_S
30. $PeT \in \Delta$ - из 28 по определению Ω_P
31. $(PeT \supset TeP) \in \Delta$ - A.3, М.1
32. $(TeP \supset TeP) \in \Delta$ - из 30, 31, М.2
33. $(TeP\ \&\ SaT) \supset SeP \in \Delta$ - A.2, М.1
34. $SeP \in \Delta$ - из 29, 32, 33, М.2, М.4
35. $\delta_\Delta(S) \vdash \sim T,\ \delta_\Delta(P) \vdash T$ - допущение
36. $\Omega_{\Delta S} \vdash \sim T,\ \Omega_{\Delta P} \vdash T$ - из 35 по определению δ_Δ
37. $\sim T \in \Omega_S,\ T \in \Omega_P$ - из 35 по определению $\Omega_{\Delta S}$, $\Omega_{\Delta P}$
38. $SeT \in \Delta$ - из 37 по определению Ω_S
39. $PaT \in \Delta$ - из 37 по определению Ω_P
40. $(SeT \supset TeS) \in \Delta$ - A.3, М.1
41. $TeS \in \Delta$ - из 38, 40, М.2
42. $(TeS\ \&\ PaT) \supset PeS \in \Delta$ - A.2, М.1
43. $PeS \in \Delta$ - из 39, 41, 42, М.2, М.4
44. $(PeS \supset SeP) \in \Delta$ - A.3, М.1
45. $SeP \in \Delta$ - из 43, 44, М.2
46. $SeP \in \Delta$ - из 4-14, 15-25, 26-34, 27-45

III. A есть SiP

В силу аксиомы $SiP \equiv \neg SeP$, условий значимости в синтаксической модели S.2 и S.3, а также свойства М.3 максимальных ФС-непротиворечивых множеств данный случай сводится к случаю для SeP.

IV. A есть SoP

В силу аксиомы $SoP \equiv \neg SaP$, условий значимости в синтаксической модели S.1 и S.4, а также свойства M.3 максимальных ФС-непротиворечивых множеств данный случай сводится к случаю для SaP.

Оставшиеся случаи для логических связок рассматриваются стандартно на основе свойств M.1-M.6 максимальных ФС-непротиворечивых множеств.

□

Теорема 2. ***Теорема о полноте.*** *Если формула A синтаксически общезначима, то она доказуема в фундаментальной силлогистике.*

Доказательство.

Допустим, формула A значима во всех синтаксических моделях, но не доказуема. Тогда формула $\neg A$ непротиворечива. Множество $\{\neg A\}$ может быть расширено до максимального ФС-непротиворечивого Δ. В канонической синтаксической модели $\mathbf{S}_\Delta$ будет иметь место $\mathbf{S}_\Delta \models \neg A$ и, следовательно, $\mathbf{S}_\Delta \not\models A$, что противоречит допущению о значимости формулы A во всех синтаксических моделях.

□

5 Заключительные замечания

I. В настоящей работе мы рассмотрели три вида интерпретаций простых позитивных категорических атрибутивных высказываний. Относительно каждой из них имеет место теорема о полноте фундаментальной чистой позитивной силлогистики [1, с. 31–32, 66–76]. Данный вид высказываний и фундаментальная силлогистика выбраны по той причине, что они лежат в начале целого ряда языков атрибутивных высказываний и соответствующих им логических систем силлогистического типа.

Экстенсиональные интерпретации других систем чистой позитивной силлогистики отличаются друг от друга условиями на пустоту или непустоту терминов в тех или иных высказываниях. Эти системы представляют историко-логический интерес с точки зрения изучения взглядов разных философов, но с логической точки зрения они плохо обоснованы. На их фоне выделяется система традиционной силлогистики [1, с. 32–34, 90–95], которая по классу теорем совпадает с чистой позитивной силлогистикой Лукасевича и системой С4 В.А. Смирнова. Адекватные синтаксические модели для этой системы силлогистики получаются вполне естественно. Одним из методологических требований к определению предикатных констант является непротиворечивость [5, с. 15–18]. Если в соответствии с этим требованием наложить на функцию δ ограничение, чтобы она сопоставляла общим именам лишь непротиворечивые формулы, то полученные синтаксические модели будут моделями традиционной силлогистики.

II. При построении синтаксических моделей мы допустили, что в определениях общих имен в качестве дефиниенсов им могут быть сопоставлены любые формулы логики высказываний, но при доказательстве теоремы о полноте оказалось достаточным ограничиться лишь элементарными конъюнкциями. В то же время очевидно, что синтаксические модели могут быть построены не только для простых категорических атрибутивных высказываний, но и для высказываний с отрицательными и сложными терминами. В синтаксической модели изменения затронут лишь определение функции δ, которая сложным терминам будет сопоставлять те или иные комбинации дефиниенсов, зависящие от вида сложного термина, но не коснутся определения значимости в модели.

Если мы попробуем построить для атрибутивных высказываний со сложными терминами интенсиональную модель, то это можно сделать, но потребуется ввести как минимум некоторую алгебру смыслов, что ухудшит интуитивную прозрачность интерпретации.

III. В зависимости от решаемых задач параметры синтаксической модели $\mathbf{S} = \langle L, C, F, \vdash, \delta \rangle$ могут варьироваться. Например, мы можем варьировать L, взяв вместо простого множества признаков множество предикатных символов, чтобы формулировать определения понятий не в языке логики высказываний, а в языке логики предикатов. При необходимости мы можем изменить множество связок C, изменив тем самым и множество формул F.

Отношение выводимости $\vdash$ также допускает варьирование. Вместо выводимости в классической логике мы можем взять выводимость в интуиционистской, релевантной, паранепротиворечивой или модальной логике. Коль скоро упомянута модальная логика, ничто не мешает построить синтаксические модели для модальной силлогистики, напрямую связав известные виды модальностей с модальностями атрибутивных высказываний.

При определении синтаксической модели мы приняли соглашение обозначать выводимость $\Gamma \vdash A \wedge \sim A$ посредством $\Gamma \vdash \mathbf{f}$, где $\mathbf{f}$ представляет противоречие (ложь, нежелательную ситуацию). В различных логических системах обнаружение противоречия или аналогичной ситуации может пониматься по-разному. Например, в системе релевантной логики R есть две различных константы для представления лжи — $\mathbf{f}$ и $\mathbf{F}$, а в паранепротиворечивых логиках получение противоречия не является критическим.

IV. Определенный интерес для философов и логиков должно представлять то, что синтаксическая интерпретация атрибутивных высказываний свободна от онтологических допущений. Если мы хотим осмысленно рассуждать о греческих богах, нет никакой необходимости предполагать, что они существуют в каком-то выдуманном мире и строить столь же выдуманную экстенсиональную модель. Достаточно принять подходящие определения используемых понятий и рассуждать о них, нисколько не заботясь о фактической пустоте объемов этих понятий. Все значимые утверждения о греческих богах и кентаврах мы получим исключительно на основе определений, которые им дали.

Стремление для каждой логической системы или теории иметь экстенсиональную модель оправдано лишь традицией, когда наши утверждения относились лишь к макромиру — *«Сократ — человек»*, *«Все лебеди — белые»*. В процессе познания в научный обиход вводятся абстрактные понятия и понятия, которые не имеют явных коррелятов в реальном мире. Требование построения для них экстенсиональных моделей является ограничением, которое зачастую лишь затрудняет работу. Достаточно вспомнить историю введения в научный обиход комплексных чисел. С ними смирились лишь тогда, когда им была дана наглядная геометрическая интерпретация, хотя практическая польза от включения их в язык математики проявилась гораздо раньше.

Синтаксические модели атрибутивных высказываний позволяют по-новому подойти к построению некоторых логик, например, логики оценок. В логике абсолютных оценок *Добро* и *Зло* рассматриваются как модальные операторы [3]. Смысл их определяется неявно посредством подходящих аксиом модальной логики. Построить адекватную и содержательно приемлемую экстенсиональную модель для таких логик довольно трудно. В то же время синтаксические модели для логик абсолютных оценок вполне возможны.

V. Если вспомнить семантический треугольник и соотнести его элементы с экстенсиональной, интенсиональной и синтаксической моделями силлогистики, то окажется, что силлогистика обладает удивительным свойством — она полна на уровне значений общих имен, полна на уровне их смыслов и полна на уровне синтаксиса. Это необычное свойство силлогистики, которое может быть названо *семиотической полнотой*, заслуживает осмысления.

Литература

[1] *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Силлогистические теории. М.: Прогресс-Традиция, 2010. 336 с.

[2] *Гильберт Д., Аккерман В.* Основы теоретической логики. М.: ИЛ, 1947. 304 с.

[3] *Ивин А.А.* Логика оценок и норм. М.: Проспект, 2015.

[4] *Кант И.* Критика чистого разума. М.: Мысль, 1994. 591 с.

[5] *Карпович В.Н.* Термины в структуре теорий (логический анализ). Новосибирск: Наука, 1978. 128 с.

[6] *Лейбниц Г.В.* Сочинения в четырех томах. М.: Мысль, 1984.

[7] *Маркин В.И* Интенсиональная семантика традиционной силлогистики // Логические исследования. Вып. 8. М.: Наука, 2001. С. 82–91.

[8] *Маркин В.И* Фундаментальная силлогистика с интенсиональной точки зрения // Логические исследования. Вып. 9. М.: Наука, 2002. С. 119–130.

[9] *Маркин В.И* Интенсиональная семантика для систем позитивной силлогистики // Логика и В.Е.К. М.: Современные тетради, 2003. С. 166–174.

V.I. Shalack

Syntactic Interpretation of Categorical Attributive Propositions

Shalack Vladimir Ivanovich
Department of Logic, Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences.
Volkhonka 14/5, Moscow, 119991, Russian Federation.
e-mail: `shalack@gmail.com`

In the article we propose a new type of models for categorical attributive propositions. Usually the subject and predicate of the attributive proposition are interpreted extensionally as some sets of individuals. Logical relations between subject and predicate are understood as the set-theoretic relations between their extensions. We propose a syntactic interpretation of subject and predicate of attributive propositions and interpret them as some formulas of propositional logic. These formulas can be understood as the definitions of common terms. Logical relations between subject and predicate are understood as the logical relations between their definitions. The article contains a proof that the system of fundamental syllogistic is consistent and complete with respect to the proposed semantics. Built interpretation can be generalized to other systems of syllogistic.

Keywords: logic, attributive proposition, common term, syllogistic, definition, concept, analyticity, model

References

[1] Bocharov, V.A., Markin, V.I. *Sillogisticheskie teorii* [Syllogistic theories]. M.: Progress-Tradicija, 2010. 336 p. (In Russian)

[2] Gil'bert, D., Akkerman, V. *Osnovy teoreticheskoj logiki* [Foundations of theoretical logic]. M.: IL, 1947. 304 p. (In Russian)

[3] Ivin, A.A. *Logika ocenok i norm* [Logic assessments and standards]. M.: Prospekt, 2015. (In Russian)

[4] Kant, I. *Kritika chistogo razuma* [Critique of Pure Reason]. M.: Mysl', 1994. 591 p. (In Russian)

[5] Karpovich, V.N. *Terminy v strukture teorij (logicheskij analiz)* [The terms in the structure of theories (logical analysis)]. Novosibirsk: Nauka, 1978. 128 p. (In Russian)

[6] Lejbnic, G.V. *Sochinenija v chetyreh tomah* [Works in four volumes]. M.: Mysl', 1984. (In Russian)

[7] Markin, V.I. "Intensional'naja semantika tradicionnoj sillogistiki" [Intensional semantics of traditional syllogistic], *Logicheskie issledovanija* [Logical Investigations]. M.: Nauka, 2001, vol. 8, pp. 82–91. (In Russian)

[8] Markin, V.I. "Fundamental'naja sillogistika s intensional'noj tochki zrenija" [Fundamental syllogistics with intensional point of view], *Logicheskie issledovanija* [Logical Investigations]. M.: Nauka, 2002, vol. 9, pp. 119–130. (In Russian)

[9] Markin, V.I. "Intensional'naja semantika dlja sistem pozitivnoj sillogistiki" [Intensional semantics for systems of positive syllogistic], *Logika i V.E.K.* [Logic and V.E.K.]. M.: Sovremennye tetradi, 2003, pp. 166–174. (In Russian)

УДК 164.3 + 510.643

А.В. Чагров

Финитная аппроксимируемость нормальных модальных логик и константные формулы: пример[1]

Чагров Александр Васильевич
Математический факультет,
Тверской государственный университет.
Россия, 170100, Тверь, ул. Желябова, 33.
e-mail: `chagrovy@mail.ru`

Рассматривается класс пропозициональных нормальных модальных логик. Двумя основными понятиями, относящимися к этому классу и исследуемыми в статье, являются финитная аппроксимируемость и константные формулы. Пропозициональная нормальная модальная логика называется финитно аппроксимируемой, если ее можно задать как множество формул, истинных в конечных шкалах из некоторой совокупности. Все «естественные» нормальные модальные логики оказались финитно аппроксимируемыми. В 60-е годы было замечено, что в некоторых случаях при добавлении к аксиоматике константной аксиомы сохраняется полнота по Крипке и тем самым финитная аппроксимируемость. Заметим (фольклор), что с помощью теоремы о дедукции можно показать, что здесь в качестве логики можно взять минимальную нормальную модальную пропозициональную логику **K**. Под константной формулой понимается формула, при построении которой не используются переменные, то есть элементарной формулой является только константа $\perp$ (ложь). (Заметим, что в случае отсутствия в языке константы можно считать константной формулой такую формулу, которая эквивалентна любому своему подстановочному примеру; такова, скажем, формула $p \wedge \neg p$.) Основным результатом статьи является определение финитно аппроксимируемой нормальной модальной пропозициональной логики L и константной формулы φ, таких что результат добавления к L аксиомы φ не является финитно аппроксимируемой логикой. Статья заканчивается кратким перечнем открытых проблем.

Ключевые слова: нормальная модальная логика, финитная аппроксимируемость, константная формула, теорема о дедукции

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты №13–06–00861 и №14–06–00298.

Определения и обозначения можно считать стандартными, их можно найти, например, в [5] (эта книга свободно распространяется в интернете без уведомления авторов и правообладателя).

Постановка рассматриваемой задачи такова: *всегда ли добавление к финитно аппроксимируемой нормальной модальной пропозициональной логике константной аксиомы приводит к финитно аппроксимируемой логике.*

Прежде чем перейти к решению, отметим несколько особенностей выразительности константных формул.

Несмотря на свою, как кажется, простоту (правило подстановки их не меняет), константные формулы ведут себя порой довольно неожиданно. Так, проблемы принадлежности константных формул некоторым стандартным логикам, таким, как, скажем, **K**, **K4**, являются PSPACE-полными (т.е. весьма сложными), см. [4]. Другой пример: свойство аксиоматизируемости константной формулой над **K** и над **K4**, см. [1].

По некоторому варианту теоремы о дедукции для минимальной нормальной пропозициональной логики **K**, см., например, [2], легко заметить, что если к **K** (финитно аппроксимируемой, разумеется, логике) добавить константную аксиому (она же и схема аксиом), то получившаяся логика тоже окажется финитно аппроксимируемой. Аналогичный факт можно отметить и для иных нормальных пропозициональных логик. Однако это не всегда так, как утверждает следующая

Теорема 1. *Существуют такая финитно аппроксимируемая нормальная модальная пропозициональная логика L и константная формула, что нормальное расширение L этой формулой финитно аппроксимируемым не является.*

Доказательство. Пусть L — логика всех шкал $\mathfrak{F}_n$ ($n \in \omega$), см. рис. 1, где все соотношения между точками (достижимость) уже изображены стрелками; в частности, отсутствуют транзитивность и рефлексивность. По своему определению эта логика финитно аппроксимируема, поскольку задается множеством конечных шкал. Однако мы сейчас покажем, что логика $L \oplus (\Diamond\Diamond\Box\bot \wedge \neg\Diamond\Box\bot \to \Diamond(\Diamond\Diamond\Box\bot \wedge \neg\Diamond\Box\bot))$ финитно аппроксимируемой не является (добавляемая к L формула ниже обозначается короче — $\gamma \to \Diamond\gamma$, т.е. полагаем, что $\gamma = \Diamond\Diamond\Box\bot \wedge \neg\Diamond\Box\bot$). В построении формулы $\gamma \to \Diamond\gamma$ переменные не были использованы, т.е. эта формула константна (!). Таким образом, логика L и формула $\gamma \to \Diamond\gamma$ дают нам одно из возможных подтверждений утверждения теоремы 1; о некоторых других вариантах см. замечание 1 на странице 82.

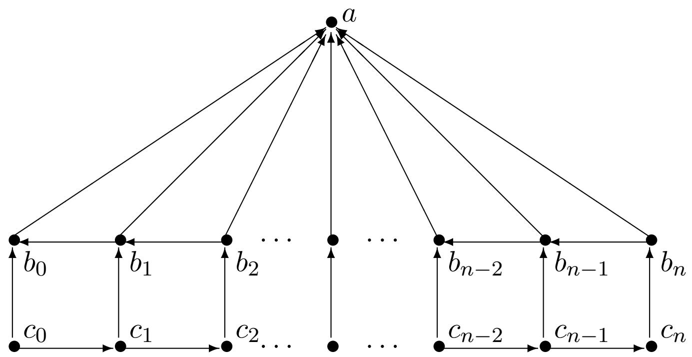

Рис. 1. $\mathfrak{F}_n$

Используемые обозначения для формул, описывающих точки $\mathfrak{F}_n$ (полезно иметь в виду алфавитное сходство в обозначениях точек и формул: a — α, b — β, c — γ):

$$\alpha = \Box\bot\,,\ \beta = \Diamond\alpha\,,\ \gamma = \Diamond\Diamond\alpha \wedge \neg\Diamond\alpha,\ \beta_0 = \beta \wedge \Box\alpha,\ \beta_{i+1} = \beta \wedge \Diamond\beta_i.$$

Во всех шкалах $\mathfrak{F}_n$ истинны формулы (при рутинной проверке отмеченное алфавитное сходство может помочь):

$$Ax\beta_i = \beta_i \to \neg\beta_{i-1} \wedge \dots \wedge \neg\beta_0,$$

$$Ax\gamma(p) = \gamma \wedge \Diamond\gamma \wedge \Diamond(\beta \wedge p) \to \Diamond(\gamma \wedge \Diamond(\beta \wedge \Diamond p)).$$

Покажем, что логике $L \oplus \gamma \to \Diamond\gamma$ не принадлежит формула $\neg(\gamma \wedge \Diamond\beta_0)$.

Используем бесконечную (!) шкалу $\mathfrak{F}_\omega$, см. рис. 2, где все соотношения между точками опять-таки уже изображены стрелками (шкалу $\mathfrak{F}_\omega$ можно мыслить как «предел» последовательности шкал $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots$).

Рутинно проверяется, что формула $\neg(\gamma \wedge \Diamond\beta_0)$ опровергается в точке c_0 шкалы $\mathfrak{F}_\omega$. Остается заметить, что если какая-либо формула опровергается в $\mathfrak{F}_\omega$, то в силу отсутствия транзитивности она опровергается и в некоторой $\mathfrak{F}_n$ при достаточно большом n, $n < \omega$.

Значит, шкала $\mathfrak{F}_\omega$ отделяет $\neg(\gamma \wedge \Diamond\beta_0)$ от L.

Пусть теперь $\mathfrak{F}$ — некоторая шкала с корнем, отделяющая $\neg(\gamma \wedge \Diamond\beta_0)$ от L, и это отделение происходит в точке, скажем, x_0 при некоторой оценке.

Итак,

$$x_0 \models \gamma \wedge \Diamond\beta_0.$$

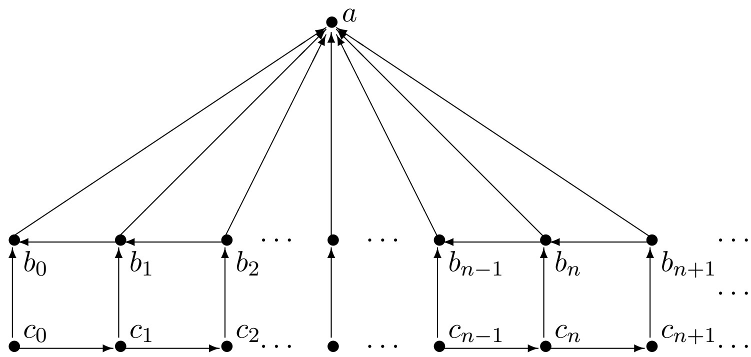

Рис. 2. $\mathfrak{F}_\omega$

В частности, в шкале есть точка y_0, такая что $y_0 \models \beta_0$.

Истинность в шкале $\mathfrak{F}$ формулы $\gamma \to \Diamond\gamma$ дает $x_0 \models \Diamond\gamma$, откуда

$$x_0 \models \gamma \wedge \Diamond\gamma \wedge \Diamond(\beta \wedge \beta_0).$$

Воспользуемся принадлежащей L формулой $Ax\gamma(\beta_0)$:

$$x_0 \models \gamma \wedge \Diamond\gamma \wedge \Diamond(\beta \wedge \beta_0) \to \Diamond(\gamma \wedge \Diamond(\beta \wedge \Diamond\beta_0)).$$

Получаем

$$x_0 \models \Diamond(\gamma \wedge \Diamond(\beta \wedge \Diamond\beta_0)),$$

что дает некоторую точку x_1, достижимую из x_0, такую что

$$x_1 \models \gamma \wedge \Diamond\beta_1.$$

В частности, в шкале есть точка y_1, такая что $y_1 \models \beta_1$.

Повторив неограниченное число раз проведенное рассуждение, увеличивая каждый раз индексы на 1, получим, что в шкале $\mathfrak{F}$ для каждого i, $i \in \omega$, имеется y_i, такая что $y_i \models \beta_i$. В силу принадлежности L формулы $Ax\beta_i$ все точки y_i различны.

Теорема доказана. □

Замечание 1. В доказательстве (в соответствии с формулировкой) теоремы приведена одна логика L с требуемыми свойствами. Легко заметить, что L можно варьировать, меняя подходящим образом шкалы $\mathfrak{F}_n$, $\mathfrak{F}_\omega$ с тем, чтобы получилось континуальное семейство логик, для которых утверждение теоремы справедливо. Аналогично и параллельно, можно бесконечно менять и φ.

Другая возможность варьирования полученного результата: из контекста понятно, что понятие константной формулы, использованное выше, основывается на наличии в языке логик константы $\bot$ («ложь»), однако при отсутствии этой константы, но при обычном для модальных логик выборе набора логических связок (скажем, $\wedge$, $\neg$, $\Box$, а остальные вводятся по стандартным сокращениям) достаточно определить константную формулу, как формулу, любой подстановочный пример которой эквивалентен исходной, например, можно использовать $p \wedge \neg p$ вместо $\bot$ (см. краткое обсуждение в [3]); изменения в доказательстве незначительны и сводятся к небольшому изменению текста и применению теоремы о замене эквивалентных в $\mathbf{K}$.

Аналоги рассмотренного вопроса, такие, как поиск конечно аксиоматизируемого варианта L, замена свойства финитной аппроксимируемости на, скажем, разрешимость, полноту по Крипке и т.д. могут оказаться довольно трудными задачами.

Литература

[1] *Чагров А.В.* Неразрешимые свойства суперинтуиционистских логик // Математические вопросы кибернетики. 1994. Вып. 5. М.: Физматлит. С. 62-108.

[2] *Чагров А.В.* Об эффективных теоремах о дедукции в нормальных модальных логиках // Логические исследования. Вып. 7. М.: Наука, 2000. С. 209-216.

[3] *Чагров А.В.* Логика, не являющаяся ни конечно-значной, ни бесконечно-значной // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XIV. М.: 2000. С. 59–67.

[4] *Chagrov A.*, *Rybakov M.* How many variables does one need to prove PSPACE-hardness of modal logics // Advances in Modal Logic. Volume 4. 2003. London, King's College Publications. P. 71–82.

[5] *Chagrov A.*, *Zakharyaschev M.* Modal Logic. Oxford University Press, 1997.

A.V. Chagrov

Finite Model Property of Normal Modal Logics and Constant Formulas: an Example [1]

Chagrov Alexander Vasilievich
Faculty of Mathematics, Tver state university.
Zhelyabova 33, Tver, 170100, Russian Federation.
e-mail: chagrovy@mail.ru

We consider the class of propositional normal modal logics. The two main concepts related to this class and analyzed in the paper are the finite model property and constant formula. A propositional normal modal logic has the finite model property, if it can defined as the set of formulas true in frames of some set. All "natural" propositional normal modal logics turned out to have the finite model property. In the 60 years it has been observed that in some cases adding to the axiomatics constant axiom remains Kripke completeness, and hence the finite model property. Note (folklore) that using the deduction theorem it can be shown that here as logic can take the minimal normal modal propositional logic **K**. Under constant formula, the constraction of which does not use variables, that is, the basic formula is the constant $\perp$ (false). (Note that in the absence in language the constant can be considered constant formula is a formula that is equivalent to any of substitutional instant; that is, say, the formula $p \wedge \neg p$.) The main result of the paper is the definition of a normal modal propositional logic L and a constant formula φ, such that the result of adding to the logic L axiom φ does not have the finite model property. The paper concludes with a short list of open problems.

Keywords: normal modal logic, finite model property, constant formula, deduction theorem

References

[1] Chagrov, A.V. "Nerazreshimye svojstva superintuicionistskih logik" [Insoluble properties of superintuitionistic logics], *Matematicheskie voprosy kibernetiki* [Mathematical Problems of Cybernetics]. M.: Fizmatlit, 1994, vol. 5, pp. 62–108. (In Russian)

[2] Chagrov, A.V. "Ob jeffektivnyh teoremah o dedukcii v normal'nyh modal'nyh logikah" [On effective deduction theorem in normal modal logics], *Logicheskie issledovanija* [Logical Investigations]. M.: Nauka, 2000, vol. 7, pp. 209–216. (In Russian)

[3] Chagrov, A.V. "Logika, ne javljajushhajasja ni konechno-znachnoj, ni beskonechno-znachnoj" [The logic is neither a finite-valued nor infinitely-valued], *Trudy nauchno-issledovatel'skogo seminara Logicheskogo centra*

[1] The paper is supported by Russian Foundation for Basic Research, projects №13–06–00861 and №14–06–00298.

Instituta filosofii RAN [Proceedings of the Scientific-Research Seminar Logic Center of the Institute of Philosophy of the Russian Academy of Sciences]. 2000, vol. XIV, pp. 59–67. (In Russian)

[4] Chagrov, A.V, Rybakov, M. "How many variables does one need to prove PSPACE-hardness of modal logics", *Advances in Modal Logic*. London: King's College Publications, 2003, vol. 4. pp. 71–82.

[5] Chagrov A.V., Zakharyaschev M. *Modal Logic*. Oxford University Press, 1997. 624 pp.

УДК 164.3 + 510.643

E.A. Kotikova, M.N. Rybakov

Kripke Incompleteness of First-order Calculi with Temporal Modalities of CTL and Near Logics[1]

Kotikova Ekaterina Alexandrovna
Faculty of Mathematics, Tver State University.
Zhelabova 33, Tver, 170100, Russian Federation.
e-mail: `kate-sunflower91@mail.ru`

Rybakov Mikhail Nikolayevich
Faculty of Mathematics, Tver State University.
Zhelabova 33, Tver, 170100, Russian Federation.
e-mail: `m_rybakov@mail.ru`

We study an expressive power of temporal operators used in such logics of branching time as computational tree logic or alternating-time temporal logic. To do this we investigate calculi in the first-order language enriched with the temporal operators used in such logics. We show that the resulting languages are so powerful that many 'natural' calculi in the languages are not Kripke complete; for example, if a calculus in such language is correct with respect to the class of all serial linear Kripke frames (even just with constant domains) then it is not Kripke complete. Some near questions are discussed.

Keywords: Kripke incompleteness, first-order logic, computational tree logic, alternating-time temporal logic, recursive enumerability

1 Preliminaries

The subject under our consideration is an expressive power of temporal modalities used in such logics as **CTL***, **CTL**, **LTL**, **ATL***, **ATL**, etc., see [1, 7, 9, 18]. Here we dwell on the modalities of **CTL** but the argumentation below remains to be applicable for other logics, too (and we shall show this).

All the logics mentioned above are defined via Kripke semantics, and are Kripke complete by their definitions. It is known that they are decidable and even that the corresponding decision problems are complete in such classes as PSPACE (for **LTL**, see [21]), EXPTIME (for **CTL** and **ATL**, see [11, 24]), and 2-EXPTIME (for **CTL*** and **ATL***, see [12, 19, 23]). As a corollary of their decidability, they have decidable axiomatizations.

[1]The work is supported by RFBR, projects 13–06–00861 and 14–06–00298.

But note that some modalities of these logics are not first-order definable (by means of appropriate first-order languages describing Kripke structures) and 'contain' an expressive power that may be not seen if we consider propositional languages only. Therefore, to show some possibilities of the modalities we add them to the first-order classical language and then propose and discuss some facts concerning logics and classes of logics in resulting languages.

Mathematical results presented here, in fact, follow from constructions used to prove that some first-order logics defined by classes of Kripke frames are not recursively enumerable. So the reader may see on this paper as a discussion on just one of corollaries from such proofs.

2 Decidability and recursive enumerability

Here we just recall the notions of decidability and recursive enumerability. Let U be some universal set (for our purposes it is sufficient U to be the set of all formulas in a certain language) and let X be a subset of U. Then X is called decidable if there exists an algorithm $\mathfrak{A}$ such that, for any $x \in U$,

$$\mathfrak{A}(x) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{if } x \in X, \\ 0, & \text{if } x \notin X. \end{cases}$$

If X is not a decidable set then it is called undecidable. The set X is called recursive enumerable if $X = \varnothing$ or there exists an algorithm $\mathfrak{A}$ such that $X = \{\mathfrak{A}(n) : n \in \mathbb{N}\}$, i. e., there exists an algorithm enumerating elements in X. Note also that X is recursively enumerable if and only if there exists an algorithm $\mathfrak{A}$ such that, for any $x \in U$,

$$\mathfrak{A}(x) \;=\; \begin{cases} \text{something}, & \text{if } x \in X, \\ \text{not defined}, & \text{if } x \notin X, \end{cases}$$

i. e. X is the domain of the algorithm $\mathfrak{A}$. For more details see [8, 13, 20].

3 Calculi

Let us clarify what we mean by a calculus. Usually it is assumed that calculus is defined by a set of axioms and a set of inference rules. Both sets together, in fact, generate a set of derivable formulas. For our purposes it is important to be sure that such generation can be realized as an algorithmic procedure. Therefore we just add the following natural conditions: the set of axioms and the set of inference rules must be recursively enumerable and every inference rule must be realizable as an algorithm. The only property of calculi we are going to use is that the set of derivable formulas is recursively enumerable; it is ensured by the conditions.

Note, by the way, that any calculus with finite set of axioms and finite set of finitary inference rules, of course, satisfies both conditions above.

Below we sometimes equate a calculus to the set of all formulas derivable in it.

4 Language under consideration

Let us fix a language $\mathcal{L}$ containing a countable set of individual variables, a countable set of predicate letters of any arity (for every $m \in \mathbb{N}$, the language contains a countable set of m-ary predicate letters), $\wedge$ (conjunction), $\vee$ (disjunction), $\to$ (implication), $\neg$ (negation), quantifiers on individual variables $\forall x$ and $\exists x$ (for every variable x), modalities $\boldsymbol{AX}$, $\boldsymbol{AF}$, $\boldsymbol{EU}$, and technical symbols (comma and parentheses). In other words, we enrich the classical first-order language with the modalities of **CTL**. Formulas are constructed in the usual way: if $x_1, \ldots, x_m$ are variables, P is m-ary predicate letter then $P(x_1, \ldots, x_m)$ is a formula; if φ and ψ are formulas and x is a variable then $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\neg\varphi$, $\forall x\, \varphi$, $\exists x\, \varphi$, $\boldsymbol{AX}\varphi$, $\boldsymbol{AF}\varphi$, and $(\varphi \boldsymbol{EU} \psi)$ are formulas, too.

5 Kripke semantics

By a Kripke frame here we understand a triple $\mathfrak{F} = \langle W, R, D\rangle$ where W is a non-empty set of states, R is a serial binary accessibility relation on W, and D is a function associating with every state s its domain (i.e., some non-empty set of individuals) such that $D(s) \subseteq D(t)$ whenever sRt, for any $s, t \in W$. Kripke model on a frame $\mathfrak{F}$ is a pair $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, I\rangle$where I is an interpretation of predicate letters in the domains of states, i.e., if P is n-ary predicate letter and s is a state then $I(s, P)$ is an n-ary relation on $D(s)$.

An infinite sequence $\pi = s_0, s_1, s_2, \ldots$ is called path in a frame $\mathfrak{F} = \langle W, R, D\rangle$ if, for any $k \in \mathbb{N}$, we have $s_k \in W$ and $s_k R s_{k+1}$. We assume that π_k denotes the k-th element of the path π. We say that a path π starts from a state s if $\pi_0 = s$. Note that, because R is serial, for any $s \in W$, there is at least one path in $\mathfrak{F}$ starting from s.

Let s be a state in a frame $\mathfrak{F} = \langle W, R, D\rangle$. A function α is called interpretation of individual variables in s if $\alpha(x_i) \in D(w)$, for every individual variable x_i.

Note that if s' is accessible from s and α is an interpretation of individual variables in s then α is an interpretation of individual variables in s', too, because in this case we have $D(w) \subseteq D(w')$.

For any individual variable x, let us define the binary relation $\stackrel{x}{=}$ on interpretations: for interpretations α and β we put

$$\alpha \stackrel{x}{=} \beta \quad \leftrightharpoons \quad \alpha(y) = \beta(y), \text{ for any variable } y \text{ such that } y \neq x.$$

Let $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, I \rangle$ be a model on a serial frame $\mathfrak{F} = \langle W, R, D \rangle$. We define the truth relation 'a formula φ is true at a state $s \in W$ in a model $\mathfrak{M}$ under an interpretation α of individual variables in s' inductively (by constructing of φ). We put

$$(\mathfrak{M}, s) \models^{\alpha} P(x_1, \ldots, x_m) \quad \leftrightharpoons \quad \langle \alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_m) \rangle \in I(s, P)$$

where P is m-ary predicate letter, $x_1, \ldots, x_m$ are individual variables. For other formulas the relation is defined as follows:

$(\mathfrak{M}, s) \models^{\alpha} \varphi_1 \wedge \varphi_2 \quad \leftrightharpoons \quad (\mathfrak{M}, s) \models^{\alpha} \varphi_1$ and $(\mathfrak{M}, s) \models^{\alpha} \varphi_2$;

$(\mathfrak{M}, s) \models^{\alpha} \varphi_1 \vee \varphi_2 \quad \leftrightharpoons \quad (\mathfrak{M}, s) \models^{\alpha} \varphi_1$ or $(\mathfrak{M}, s) \models^{\alpha} \varphi_2$;

$(\mathfrak{M}, s) \models^{\alpha} \varphi_1 \to \varphi_2 \quad \leftrightharpoons \quad (\mathfrak{M}, s) \not\models^{\alpha} \varphi_1$ or $(\mathfrak{M}, s) \models^{\alpha} \varphi_2$;

$(\mathfrak{M}, s) \models^{\alpha} \neg\varphi_1 \quad \leftrightharpoons \quad (\mathfrak{M}, s) \not\models^{\alpha} \varphi_1$;

$(\mathfrak{M}, s) \models^{\alpha} \boldsymbol{AX}\varphi_1 \quad \leftrightharpoons$ for any path π starting from s the relation $(\mathfrak{M}, \pi_1) \models^{\alpha} \varphi_1$ is true;

$(\mathfrak{M}, s) \models^{\alpha} \boldsymbol{AF}\varphi_1 \quad \leftrightharpoons$ for any path π starting from s there is some $k \in \mathbb{N}$ such that $(\mathfrak{M}, \pi_k) \models^{\alpha} \varphi_1$;

$(\mathfrak{M}, s) \models^{\alpha} \varphi_1 \boldsymbol{EU} \varphi_2 \quad \leftrightharpoons$ for some path π starting in s and some $k \in \mathbb{N}$ such that $(\mathfrak{M}, \pi_k) \models^{\alpha} \varphi_2$ and, for any $j \in \mathbb{N}$, such that $j < k$ the relation $(\mathfrak{M}, \pi_j) \models^{\alpha} \varphi_1$ is true;

$(\mathfrak{M}, s) \models^{\alpha} \forall x_i \varphi_1 \quad \leftrightharpoons$ for any interpretation β such that $\beta \stackrel{x_i}{=} \alpha$ and $\beta(x_i) \in D(s)$ the relation $(\mathfrak{M}, s) \models^{\beta} \varphi_1$ is true;

$(\mathfrak{M}, s) \models^{\alpha} \exists x_i \varphi_1 \quad \leftrightharpoons$ there is an interpretation β such that $\beta \stackrel{x_i}{=} \alpha$, $\beta(x_i) \in D(s)$, and $(\mathfrak{M}, s) \models^{\beta} \varphi_1$.

As usual, a formula is said to be true in a model if it is true at any state in it; a formula is said to be true in a frame if it is true in any model on the frame; a formula is said to be true in a class of frames if it is true in any frame in the class.

Let us define the logic **QCTL** as the set of formulas that are true in the class of all (serial) Kripke frames.

6 Kripke completeness

We say that a set L of formulas is Kripke complete if there is a class of Kripke frames such that L coincides with the set of all formulas that are true in the class.

Note that if a set L is Kripke complete then it is closed, at least, under modus ponens, generalization, and predicate substitution, i.e., L may be viewed as a logic.

For example, **QCTL** is Kripke complete by its definition; any proper subset of **QCTL** is not Kripke complete (if we do not restrict the language and do not extend the class of frames, of course).

7 Logic QCTLlinCD

For some technical purposes we need to define a special extension of **QCTL**. We call a frame linear if the reflexive and transitive closure of its accessibility relation is linear. The frame $\langle W, R, D\rangle$ is said to be a frame with constant domains if $D(s) = D(t)$ whenever sRt, for any $s, t \in W$. Define **QCTLlinCD** as the set of formulas complete under the class of all linear frames with constant domains.

8 Class of Kripke incomplete calculi

Here we just propose and prove a statement which reflects the topic of the paper.

THEOREM 1. *Let S be a calculus such that $S \subseteq$ **QCTLlinCD**. Then S is not Kripke complete.*

PROOF. Let us denote by $\mathbf{QCL}_{fin}$ the classical theory of finite models. In [15] it is proved that there is a translation *Emb* such that, for any closed classical first-order formula φ,

$$\varphi \in \mathbf{QCL}_{fin} \iff Emb(\varphi) \in \mathbf{QCTL}.$$

More exactly, it is shown that, for any closed classical first-order formula φ,

$$\begin{array}{lcl} \varphi \in \mathbf{QCL}_{fin} & \Longrightarrow & Emb(\varphi) \in \mathbf{QCTL}; \\ \varphi \notin \mathbf{QCL}_{fin} & \Longrightarrow & Emb(\varphi) \notin \mathbf{QCTLlinCD}. \end{array}$$

The second implication follows from the fact that if $\varphi \notin \mathbf{QCL}_{fin}$ then $Emb(\varphi)$ is refuted in a linear frame with constant domains (for details see [15]).

Because $\mathbf{QCL}_{fin}$ is not recursively enumerable [6], from these two implications it immediately follows that any set of formulas between **QCTL** and **QCTLlinCD** is not recursively enumerable, too. Indeed, let L be any set of formulas such that $\mathbf{QCTL} \subseteq L \subseteq \mathbf{QCTLlinCD}$. Let φ be a closed first-order formula. If $\varphi \in \mathbf{QCL}_{fin}$ then, by the first implication $Emb(\varphi) \in \mathbf{QCTL}$, and hence, $Emb(\varphi) \in L$; if $\varphi \notin \mathbf{QCL}_{fin}$ then, by the second implication, $Emb(\varphi) \notin \mathbf{QCTLlinCD}$, and hence, $Emb(\varphi) \notin L$. Therefore,

$$\varphi \in \mathbf{QCL}_{fin} \iff Emb(\varphi) \in L,$$

and, as a corollary, L is not recursively enumerable.

Suppose that S is Kripke complete. Then $\mathbf{QCTL} \subseteq S$. Together with the condition that $S \subseteq \mathbf{QCTLlinCD}$ it means that $\mathbf{QCTL} \subseteq S \subseteq \mathbf{QCTLlinCD}$, and hence it is not recursively enumerable. But this is impossible because S is a calculus. From the contradiction it follows that S is not Kripke complete. The theorem is proved. □

9 Discussion

Now we have got a matter for our discussion: the theorem and its proof. Both the theorem and the proof are quite short but we want to show some hidden details.

9.1 Examples of Kripke incomplete calculi

First of all, we give an explanation how to apply the theorem. Suppose we have some calculus S with a set of axioms $\mathcal{A}$ and a set of inference rules $\mathcal{R}$. Suppose also that we are able to check, for every $\varphi \in \mathcal{A}$, whether φ is true in the class of all linear frames with constant domains and, for every rule in $\mathcal{R}$, whether the rule is admissible in the same class (note, by the way, that there is no general procedure solving these tasks [15] but sometimes it is not the case for particular calculi). Then, if for every axiom and every rule the check is OK, then by the theorem we may conclude that S is not Kripke complete.

We give an example. Let $\mathcal{A} = \mathbf{CTL} \cup \mathbf{QCL}$, where **QCL** is the classical first-order logic, and let $\mathcal{R}$ be consisting of modus ponens, generalization, and substitution. Then the calculus defined by $\mathcal{A}$ and $\mathcal{R}$ is not Kripke complete.

If we extend the calculus with any formulas that are true in linear frames with constant domains (for example, bounded width formulas, bounded branching formulas, Barcan formula, etc.) and inference rules preserving validity in all such frames (for example, necessitation rule for the modality $\boldsymbol{AX}$) then we again obtain a Kripke incomplete calculus.

9.2 Possibility of constructive proofs for the theorem

Note that the proof presented here is not constructive: to prove the theorem we suppose it to be wrong and then obtain a contradiction. To give a constructive proof we must construct a formula φ that is not derivable in S but true in any Kripke frame for S.

Obviously, there is no such a formula for all calculi. Indeed, suppose φ is not derivable in any calculus S such that $S \subseteq \mathbf{QCTLlinCD}$ but $\varphi \in \mathbf{QCTLlinCD}$. If we add φ to S as an extra axiom then we obtain a calculus included into **QCTLlinCD** and containing φ, that gives us a contradiction.

Therefore, to get a constructive proof we need an effective procedure finding, for any calculus S such that $S \subseteq \mathbf{QCTLlinCD}$, a formula φ_S such that $\varphi_S \in \mathbf{QCTLlinCD}$ but φ_S is not derivable in S. The problem is in that the set of all such calculi (i. e., in fact, the set of inputs for the procedure) is not effectively definable because it is not recursively enumerable. Indeed, let $S_\varphi = \{\varphi\}$, for every formula φ (i. e., S_φ is a calculus with one axiom and without inference rules). Then the set $\{S_\varphi : S_\varphi \subseteq \mathbf{QCTLlinCD}\}$ coincides with the set $\{\{\varphi\} : \varphi \in \mathbf{QCTLlinCD}\}$ and hence it is not recursively enumerable. The same argumentation (with slight modifications) works also for calculus containing **QCL** and closed under some 'natural' inference rules; we leave details to the reader.

Nevertheless, of course, there are constructive ways to prove nearly the same theorem. Because any formula is constructed effectively, by the theorem we have that for any calculus S such that $S \subseteq \mathbf{QCTLlinCD}$ there is an algorithm constructing a formula φ_S such that $\varphi_S \in \mathbf{QCTLlinCD}$ but φ_S is not derivable in S. Therefore, for any particular calculus S there is a constructive proof of its Kripke incompleteness. Clearly, if $S' \subseteq S$ and φ is not derivable in S then φ is not derivable in S', too. Hence, we may replace **QCTLlinCD** in the theorem with any particular calculus and then obtain a constructive proof. For example, instead of **QCTLlinCD** we may take a calculus containing **QCL**, **CTL**, linearity axiom, Barcan formula and closed under substitution, modus ponens, generalization, and maybe some other inference rules.

We did not try to obtain a constructive proof this way, and here we leave the details of the question to the reader.

9.3 Extensions of the language

Note that **CTL** is a fragment of $\mathbf{CTL}^*$ and, modulo some translation, it is also a fragment of **ATL** and $\mathbf{ATL}^*$. It means that we can repeat our argumentation for logics $\mathbf{QCTL}^*$, **QATL**, $\mathbf{QATL}^*$ (the reader may define them using corresponding Kripke semantics for $\mathbf{CTL}^*$, **ATL**, $\mathbf{ATL}^*$). But, in fact, we do not need it: it is enough to use the theorem for calculi in extended language. Let us understand $\mathcal{L}$-fragment of a calculus (in a language extending $\mathcal{L}$) as a set consisting of all formulas derivable in the calculus that are in $\mathcal{L}$ (maybe, modulo a certain translation).

Corollary 1. *Let S be a calculus in the language of* $\mathbf{QCTL}^*$, **QATL** *or* $\mathbf{QATL}^*$ *such that the $\mathcal{L}$-fragment of S is a subset of* **QCTLlinCD**. *Then S is not Kripke complete.*

Moreover, we may imagine a situation when we deal with some different language allowing to express $\mathcal{L}$ inside of it. Then the corollary is true, too.

9.4 Fragments of the language

Now let us turn to another 'direction', and put the following question: what happens if we restrict $\mathcal{L}$?

Due to S. Kripke [16], if we restrict $\mathcal{L}$ with just unary predicate letters then both the theorem and the corollary are still true; moreover, we propose a hypothesis that sometimes even one unary letter is enough [3, 4]. As for individual variables, we think that three ones are enough; maybe even two [14]. But here we discuss the modalities, therefore we consider some restrictions on their using.

In accordance with literature on **CTL**, we distinguish five 'basic' modalities: $\boldsymbol{AX}$, $\boldsymbol{AG}$, $\boldsymbol{AF}$, $\boldsymbol{EU}$, and $\boldsymbol{AU}$. Formally, the language $\mathcal{L}$ already contains $\boldsymbol{AX}$, $\boldsymbol{AF}$, and $\boldsymbol{EU}$, therefore we define just $\boldsymbol{AG}$ and $\boldsymbol{AU}$: $\boldsymbol{AG}\varphi = \neg\boldsymbol{E}((\varphi \to \varphi)\boldsymbol{U}\neg\varphi)$, $\boldsymbol{A}(\varphi\boldsymbol{U}\psi) = \boldsymbol{AF}\varphi \wedge \neg\boldsymbol{E}(\neg\psi\boldsymbol{U}(\neg\varphi \wedge \neg\psi))$. Note that we also may define five dual modalities (known as $\boldsymbol{EX}$, $\boldsymbol{EF}$, $\boldsymbol{EG}$, $\boldsymbol{AR}$, and $\boldsymbol{ER}$) but they are not essential for our purposes, and we leave details to the reader [1, 9, 17]. Every subset of the set $\{\boldsymbol{AX}, \boldsymbol{AG}, \boldsymbol{AF}, \boldsymbol{EU}, \boldsymbol{AU}\}$ defines a certain fragment of **QCTL**, and we consider such fragments.

Let M be a subset of $\{\boldsymbol{AX}, \boldsymbol{AG}, \boldsymbol{AF}, \boldsymbol{EU}, \boldsymbol{AU}\}$. For a set L of formulas, define $L{\restriction}M$ as a fragment of L where only modalities contained in M are used. For example, $\mathbf{QCTL}{\restriction}\varnothing = \mathbf{QCL}$. In fact, in [15] it is proved that from $\mathbf{QCTL} \subseteq L \subseteq \mathbf{QCTLlinCD}$, $M \neq \varnothing$, $M \neq \{\boldsymbol{AX}\}$, and $M \neq \{\boldsymbol{AG}\}$ it follows that $L{\restriction}M$ is not recursively enumerable. Hence, for such fragments we may use the same argumentation as in the proof of the theorem. As a result we obtain the following proposition.

Proposition 1. *Let M be a set of modalities allowing to express at least one of the modalities $\boldsymbol{AF}$, $\boldsymbol{EU}$, $\boldsymbol{AU}$ or both $\boldsymbol{AX}$ and $\boldsymbol{AG}$, let also S be a calculus such that $S{\restriction}M \subseteq \mathbf{QCTLlinCD}{\restriction}M$; then S is not Kripke complete.*

This proposition is stronger than the theorem. It shows that just one temporal modality may be quite expressive. But note that the proposition does not tell us anything about calculi in the language with $\boldsymbol{AX}$ only and with $\boldsymbol{AG}$ only.

9.5 Effect of first-order conditions

To define Kripke semantics for $\mathcal{L}$ we need the notion of path. Formally, π is a path in a frame $\langle W, R, D\rangle$ if π is a map from $\mathbb{N}$ to W such that $\pi(n)R\pi(n+1)$, for every $n \in \mathbb{N}$. Then, to define the truth relation for the modalities, in fact, we use second-order quantifiers (on paths).

It is not the case for $\boldsymbol{AX}$. It is possible to define the truth relation for it using just R and first-order quantifiers (on states in W): $\boldsymbol{AX}\varphi$ is true at a state s if φ is true at every state t such that sRt. Together with first-order definability of seriality and linearity it provides us with embeddings of $\mathbf{QCTL}{\restriction}\{\boldsymbol{AX}\}$ and $\mathbf{QCTLlinCD}{\restriction}\{\boldsymbol{AX}\}$ into $\mathbf{QCL}$, and hence with a recursive axiomatization for each of them. Of course, it is not so for any logic between $\mathbf{QCTL}{\restriction}\{\boldsymbol{AX}\}$ and $\mathbf{QCTLlinCD}{\restriction}\{\boldsymbol{AX}\}$ into $\mathbf{QCL}$ but from the construction in [5] we obtain the following observation: *let a logic L be Kripke complete under some first-order definable class of frames; then $L{\restriction}\{\boldsymbol{AX}\}$ is recursively enumerable.* Note that any recursively enumerable logic has also a recursive axiomatization [10]. Note also that we do not know whether the converse statement for the observation holds.

To define the truth relation for $\boldsymbol{AG}$, in fact, we must define reflexive and transitive closure of arbitrary accessibility relation R. It is not possible to define it via R and equality if we use the first-order language only, but note that if we deal with the modality $\boldsymbol{AG}$ without all others, then we may 'forget' about R and use its reflexive and transitive closure as a unique binary relation in a frame. In this case, we must just claim it to be reflexive and transitive. Then, we are again in the similar situation: there are embeddings of **QCTL**$\upharpoonright\{\boldsymbol{AG}\}$ and **QCTLlinCD**$\upharpoonright\{\boldsymbol{AG}\}$ into **QCL**, wherefore these fragments (and some ones between them) are recursively axiomatizable.

Of course, if we consider classes of frames allowing us to define other modalities using first-order conditions only, then we obtain recursively axiomatizable extensions of **QCTL**. For example, if a logic L is complete under a class consisting of all frames $\langle W, R, D\rangle$ with the same finite W and the same R on it then L is recursively axiomatizable.

9.6 Other classes

Our main conclusions and observations are based on the fact that any set between **QCTL** and **QCTLlinCD** is not recursively enumerable. What about logics outside the interval? In general, we do not know. But we show some difficulties. To do this, consider an example.

Let **QCTLfin** be the logic complete under the class of all finite Kripke frames. This logic is not included into **QCTLlinCD** but using argumentation as in [22] we obtain that **QCTLfin** is not recursively enumerable (and even **QCTLfin**$\upharpoonright\{\boldsymbol{AX}\}$ is not recursively enumerable). To prove the theorem as above but with **QCTLfin** instead of **QCTLlinCD** we need an algorithm embedding some non-enumerable problem into both **QCTL** and **QCTLfin**, simultaneously. But we do not know whether such an algorithm exists.

Let **QCTLfinCD** be the logic complete under the class of all finite Kripke frames with constant domains. It is not recursively enumerable, too. Moreover, it is possible to show that there is a translation tr such that, for any closed classical first-order formula φ,

$$\begin{array}{rcl} \varphi \in \mathbf{QCTLfin} & \iff & tr(\varphi) \in \mathbf{QCTLfin} \\ & \iff & tr(\varphi) \in \mathbf{QCTLfinCD}, \end{array}$$

and hence, any set of formulas between **QCTLfin** and **QCTLfinCD** is not recursively enumerable (unfortunately, we do not know about any publications containing this fact, and cannot give a reference). It seems we are successful and can extend the class of Kripke incomplete calculi. But this is not so, again. Indeed, in this case, we just may propose that any calculus such that $\mathbf{QCTLfin} \subseteq S \subseteq \mathbf{QCTLfinCD}$ is not Kripke complete but, clearly, there is no such calculus.

9.7 Impossibility of 'converse' embeddings

In fact, our proof of the theorem is based on the fact that there exists an embedding of $\mathbf{QCL}_{fin}$ into any theory between **QCTL** and **QCTLlinCD**. The following natural question arises: is there an effective embedding of **QCTL** or **QCTLlinCD** into $\mathbf{QCL}_{fin}$? The answer is 'no', and here we give some argumentation.

Let us recall Post theorem, see [2]:

- *a set X is decidable if and only if both X and $\overline{X}$ are recursively enumerable,*

where $\overline{X}$ is the complement of X. Clearly, for a logic L and a formula φ, we have that

- φ is L-valid if and only if $\neg\varphi$ is not L-satisfiable;
- φ is not L-satisfiable if and only if $\neg\varphi$ is L-valid.

Therefore, in terms of L-validity and L-satisfiability, Post theorem means that

- *L is decidable if and only if both L-validity problem and L-satisfiability problem are recursively enumerable,*

and hence, if L is undecidable then at least one of the problems is not recursively enumerable.

The following statement is known as Church theorem, see [8, 13]: **QCL** is not decidable. But because **QCL** is finitely axiomatizable, it is also recursively enumerable. Therefore, using Post theorem, we may conclude that

- **QCL**-validity problem is recursively enumerable;
- **QCL**-satisfiability problem is not recursively enumerable.

Note also that the set of all $\mathbf{QCL}_{fin}$-satisfiable formulas is recursively enumerable: corresponding algorithm just tests for a given formula whether it is true in models with one element, then whether it is true in models with two elements, then whether it is true in models with three elements, and so on; if the algorithm finds a model satisfying the formula then it stops with the positive answer. Therefore, we may specify Trakhtenbrot theorem [6]:

- $\mathbf{QCL}_{fin}$-validity problem is not recursively enumerable;

- $\mathbf{QCL}_{fin}$-satisfiability problem is recursively enumerable.

Observe that for any closed classical first-order formula φ,

$$\begin{aligned}\varphi \in \mathbf{QCL} &\iff \varphi \in \mathbf{QCTL}\\ &\iff \varphi \in \mathbf{QCTLlinCD}.\end{aligned}$$

Because **QCL**-satisfiability problem is not recursively enumerable, as a corollary we obtain that L-satisfiability problem is not recursively enumerable, too, for any logic between **QCTL** and **QCTLlinCD** (of course, the same is also true for any logic between **QATL** and **QATLlinCD**, etc.).

Let L be a logic between **QCTL** and **QCTLlinCD**. Suppose that there exists an embedding of L into $\mathbf{QCL}_{fin}$, i. e., there exists an algorithm A such that

$$\varphi \in L \iff A(\varphi) \in \mathbf{QCL}_{fin},$$

for any formula φ in the language $\mathcal{L}$. Then we immediately obtain that $\mathbf{QCL}_{fin}$-satisfiability problem is not recursively enumerable but it is not so. The contradiction means that there is no such embedding. The same argumentation allows us to conclude that there is no embedding of L into **QCL**, too.

Acknowledgements

Our thanks to participants of the conference LARA–2014, where these results were presented and discussed, for their attention and questions. We are also grateful to anonymous reviewer for remarks and advises; in fact, section 9.2 was added because of one of the remarks.

References

[1] Karpov, Yu.G. *Model checking: Verifikatsiya parallel'nykh i raspredelennykh programmnykh sistem* [Model checking: Verification of parallel and distributed software systems]. Sankt-Peterburg: BKhV-Peterburg, 2010. 560 pp. (In Russian)

[2] Mal'tsev, A.I. *Algoritmy i rekursivnye funktsii* [Algorithms and recursive functions]. M.: Nauka, Fizmatlit, 1986. 367 pp. (In Russian)

[3] Maslov, Yu. S., Mints E. S., Orevkov V. P. "Nerazreshimost' v konstruktivnom ischislenie predikatov nekotorykh klassov i formul, soderzhashchikh tol'ko odnomestnye predikatnye peremennye" [Unsolvability in constructive predicate calculus certain classes of formulas containing only single predicate variables], *Doklady AN SSSR* [Reports of the Academy of Sciences USSR], 1965, vol. 163, no 2, pp. 295–297. (In Russian)

[4] Rybakov, M.N. "Ob algoritmicheskoi vyrazitel'nosti modal'nogo yazyka s odnoi lish' odnomestnoi predikatnoi bukvoi" [About algorithmic expressiveness modal language with only one single predicate letter], *Logicheskie issledovaniya* [Logical investigations]. M.: Nauka, 2002, vol.9, pp. 179–201. (In Russian)

[5] Rybakov, M.N., Chagrov, A.V. "Standartnye perevody neklassicheskikh formul i otnositel'naya razreshimost' logik" [Standard formulas and transfers of non-classical logics relative solvability], *Trudy nauchno-issledovatel'skogo seminara Logicheskogo tsentra Instituta Filosofii RAN* [Proceedings of the Research Seminar Logic Center Institute of Philosophy RAS]. M.: Izdatel'stvo Instituta Filosofii RAN, 2000, vol. XIV, pp. 81–98. (In Russian)

[6] Trakhtenbrot, B.A. "Nevozmozhnost' algoritma dlya problemy razreshimosti na konechnykh klassakh" [The impossibility of an algorithm for the solvability of the problem in the final classes], *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Reports of the Academy of Sciences USSR], 1950, vol. 70, no 4, pp. 596–572. (In Russian)

[7] Alur, R., Henzinger, T.A., Kupferman, O. "Alternating-time temporal logic", *Journal of the ACM*, 2002, vol. 19, no 5, pp. 672–713.

[8] Boolos, G.S., Burgess, J.P., Jeffrey, R.C. *Computability and Logic*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. 366 pp.

[9] Clarke, E.M., Grumberg, O., Peled, D.A. *Model Checking*. Cambridge: The MIT Press, 1999. 314 pp.

[10] Craig, W. "On axiomatizability within a system", *The Journal of Symbolic Logic*, 1953, vol. 18, no 1, pp. 30–32.

[11] Emerson, E.A., Halpern, J.Y. "Decision procedures and expressiveness in the temporal logic of branching time", *Journal of Computer and System Sciences*, 1985, no 30(1), pp. 1–24.

[12] Emerson, E.A., Julta, C.S. "The complexity of tree automata and logics of programs", *In Proceedings of the 29th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 1988, pp. 328—337.

[13] Kleene, S.C. *Mathematical Logic*. John Wiley & Sons, Inc: New York, London, Sydney, 1967. 432 pp.

[14] Konchakov, R., Kurucz, A., Zakharyaschev, M. "Undecidability of first-order intuitionistic and modal logics with two variables", *Bulletin of Symbolic Logic*, 2011, vol. 11, pp. 428–438.

[15] Kotikova, E.A., Rybakov M.N. "First-Order Logics of Branching Time: On Expressive Power of Temporal Operators", *Logical Investigations*, 2013, vol. 19, pp. 68–99.

[16] Kripke, S. "The Undecidability of Monadic Modal Quantificational Theory", *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 1962, vol. 8, pp. 113–116.

[17] Laroussinie, F. "About the expressive power of CTL combinators", *Information Processing Letters*, 1995, no 54(6), pp. 343–345.

[18] Prior, A.N. *Past, present and future.* Oxford: Oxford University press, 1967. 228 pp.

[19] Schewe, S. "ATL* satisfiability is 2EXPTIME-complete", in: *Automata, Languages, and Programming*, ed. by L. Aceto et al. 2008, vol. 5126 of Lecture Notes in Computer Science, pp. 373–385.

[20] Shoenfield, J.R. *Degrees of Unsolvability.* North-Holland Publishing Company: American Elsevier Publishing Company, 1971.

[21] Sistla, A.P., Clarke, E.M. "The Complexity of Propositional Linear Temporal Logics", *Journal of the Association for Computing Machinery*, 1985 (July), vol. 32, no 3, pp. 733–749.

[22] Skvortsov, D. "On The Predicate Logics of Finite Kripke Frames", *Studia Logica*, 1995, vol. 54, pp. 79–88.

[23] Vardi, M.Y., Stockmeyer, L. "Improved upper and lower bounds for modal logics of programs: Preliminary report", *In Proceedings of the seventeenth annual ACM symposium on Theory of computing*, 1985, pp. 240—252.

[24] Walther D., Lutz C., Walter F., Wooldridge M. "ATL satisfiability is indeed EXPTIME-complete", *Journal of Logic and Computation*, 2006, no 16(6), pp. 765–787.

УДК 164.07 + 510.64

В.М. Попов

Об одном обобщении теоремы Гливенко[1]

Попов Владимир Михайлович
Кафедра логики, философский факультет, МГУ им. М.В. Ломоносова.
119991, Москва, ГСП-1, Ломоносовский проспект, д. 27, корп. 4.
e-mail: pphiloslog@mail.ru

В [4] В.И. Гливенко получил результат, который в настоящее время принято называть теоремой Гливенко и который устанавливает эквивалентность между утверждением о принадлежности формулы классической пропозициональной логике и утверждением о принадлежности двойного отрицания этой формулы интуиционистской пропозициональной логике. Теорема Гливенко является важным достижением в области исследований связей между логиками, проводимых с применением погружающих операций. Здесь предлагается обобщение теоремы Гливенко и описывается основанный на этом обобщении способ построения аналогов утверждения, являющегося некоторой специальной формой теоремы Гливенко. В статье использованы построенные автором подлогики классической пропозициональной логики, из которых главную роль играет логика $Int_{<\omega,\omega>}$ (она является также подлогикой интуиционистской пропозициональной логики). Обращение к логике $Int_{<\omega,\omega>}$ позволило провести такое обобщение теоремы Гливенко, которое распространяется на некоторый обширный (континуальной мощности) класс подлогик интуиционистской пропозициональной логики.

Ключевые слова: теорема Гливенко, классическая пропозициональная логика, интуиционистская пропозициональная логика, язык L, L-логика, исчисление $HInt_{<\omega,\omega>}$, исчисление $GInt_{<\omega,\omega>}$, L-логика $Int_{<\omega,\omega>}$, гливенковская логика

Язык L всех рассматриваемых здесь логик есть пропозициональный язык, алфавиту которого принадлежат в точности следующие символы: &, $\vee$, $\supset$ (бинарные логические связки языка L), $\neg$ (унарная логическая связка языка L), (,) (технические символы языка L), p_1, p_2, p_3,… (пропозициональные переменные языка L). Определение L-формулы индуктивно: (1) всякая пропозициональная переменная языка L есть L-формула, (2) если A и B являются L-формулами, то $(A\&B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$ и $(\neg A)$ являются L-формулами, (3) ничто иное не является L-формулой. Допускаем применение обычных соглашений об

[1]Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 13-03-00088а и № 14-03-00341а.

опускании скобок в L-формулах и используем «формула» как сокращение для «L-формула». Квазиэлементарной формулой называем формулу, в которую не входит ни одна бинарная логическая связка языка L. Длину формулы A определяем традиционно как число всех вхождений символов &, $\vee$, $\supset$, $\neg$ в A. Назовем L-логикой непустое множество формул, замкнутое относительно правила *modus ponens* в L (обозначаем это правило через MP_L) и относительно правила подстановки формулы в формулу вместо пропозициональной переменной языка L (обозначаем это правило через Sub_L). Напомним, что MP_L есть множество всех упорядоченных троек, каждая из которых имеет вид $< A, A \supset B, B >$, где A и B являются формулами. Условимся, что для всякой пропозициональной переменной q языка L и для всяких формул A и B $S^q{}_B(A)$ есть результат подстановки формулы B в формулу A вместо q. Для произвольных α и β из $\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\omega\}$ зададим исчисление $HI_{<\alpha,\beta>}$ гильбертовского типа и исчисление $HInt_{<\alpha,\beta>}$ гильбертовского типа. Язык исчисления $HI_{<\alpha,\beta>}$ гильбертовского типа и язык исчисления $HInt_{<\alpha,\beta>}$ есть L. Аксиомами исчисления $HI_{<\alpha,\beta>}$ являются все те и только те формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих двенадцати видов (здесь A, B и C — формулы): (I) $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$, (II) $A \supset (A \vee B)$, (III) $B \supset (A \vee B)$, (IV) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$, (V) $(A \& B) \supset A$, (VI) $(A \& B) \supset B$, (VII) $(C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset (A \& B)))$, (VIII) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \& B) \supset C)$, (IX) $((A \& B) \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))$, (X) $(((A \supset B) \supset A) \supset A)$, (XI,$\alpha$) $\neg D \supset (D \supset A)$, где D есть формула, которая не является квазиэлементарной формулой длины $< \alpha$, (XII,β)$(E \supset \neg(A \supset A)) \supset \neg E$, где E есть формула, которая не является квазиэлементарной формулой длины $< \beta$. Исчисление $HI_{<\alpha,\beta>}$ имеет единственное правило — MP_L.

Аксиомами исчисления $HInt_{<\alpha,\beta>}$ являются все те и только те формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из видов (I)–(IX), или имеет вид (XI,α), или имеет вид (XII,β). Исчисление $HInt_{<\alpha,\beta>}$ имеет единственное правило — MP_L. Выводы в $HI_{<\alpha,\beta>}$ ($HI_{<\alpha,\beta>}$-выводы) и выводы в $HInt_{<\alpha,\beta>}$ ($HInt_{<\alpha,\beta>}$-выводы), а также доказательства в $HI_{<\alpha,\beta>}$ ($HI_{<\alpha,\beta>}$-доказательства) и в $HInt_{<\alpha,\beta>}$ ($HInt_{<\alpha,\beta>}$-доказательства) строятся обычным для исчислений гильбертовского типа образом. Для этих исчислений стандартно определяются понятия длины вывода, длины доказательства, доказуемой формулы. Условимся через $I_{<\alpha,\beta>}$ обозначать множество всех формул, доказуемых в $HI_{<\alpha,\beta>}$, а через $Int_{<\alpha,\beta>}$ — множество всех формул, доказуемых в $HInt_{<\alpha,\beta>}$. Можно доказать нижеследующие утверждения (А), (Б) и (В), шаблонные доказательства которых здесь не приводятся.

(А) Для всяких x и y из $\{0, 1, 2, \ldots \omega\}$ множества $I_{<\mathrm{x,y}>}$ и $Int_{<\mathrm{x,y}>}$ являются L-логиками.

(Б) $I_{<0,0>}$ есть классическая пропозициональная логика в языке L.

(В) $Int_{<0,0>}$ есть интуиционистская пропозициональная логика в языке L.

Здесь «классическая пропозициональная логика в языке L» означает множество всех классических тавтологий в языке L, а «интуиционистская пропозициональная логика в языке L» означает множество всех интуиционистских тавтологий в языке L. Условимся о том, что для всякого множества K формул и всякой формулы A запись «$K \vdash_{HI_{<\alpha,\beta>}} A$» есть сокращение для «существует $HI_{<\alpha,\beta>}$-вывод из множества K формул формулы A», а запись «$K \vdash_{HInt_{<\alpha,\beta>}} A$» есть сокращение для «существует $HInt_{<\alpha,\beta>}$-вывод из множества K формул формулы A». Условимся также о том, что для всякой формулы A запись «$\vdash_{HI_{<\alpha,\beta>}} A$» есть сокращение для «существует $HI_{<\alpha,\beta>}$-доказательство формулы A», а запись «$\vdash_{HInt_{<\alpha,\beta>}} A$» есть сокращение для «существует $HInt_{<\alpha,\beta>}$-доказательство формулы A». Будем допускать использование символа $\forall$ для обозначения квантора общности, символа $\exists$ для обозначения квантора существования, символа $\Rightarrow$ для обозначения материальной импликации и символа N для обозначения множества всех целых положительных чисел.

Лемма 1. *Пусть M есть замкнутое относительно Sub_L множество формул и* Н *есть $HI_{<\alpha,\beta>}$ или $HInt_{<\alpha,\beta>}$. Для всякого целого положительного числа n и для всяких формул $A_1, \ldots, A_n$: если для всякого целого положительного числа i, которое $\leq n$, верно, что $A_i \in M$, или A_i есть аксиома исчисления H, или существует строго меньшие i положительные числа k и l, для которых упорядоченная тройка $< A_k, A_l, A_i >$ есть применение modus ponens в L, то для всякой формулы F и для всякой пропозициональной переменной q языка L*

$$M \vdash_H S^q{}_F(A_n).$$

Стереотипное индуктивное (методом возвратной индукции) доказательство леммы 1 здесь не приводим. Нижеследующие леммы 2 и 3 можно легко доказать, используя лемму 1.

Лемма 2. *Пусть M есть замкнутое относительно Sub_L множество формул. Для всякой формулы A: если $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} A$, то для вся-*

кой формулы F и для всякой пропозициональной переменной q языка L $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} S^q{}_F(A)$.

Лемма 3. *Пусть M есть замкнутое относительно Sub_L множество формул. Для всякой формулы A: если $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} A$, то для всякой формулы F и для всякой пропозициональной переменной q языка L $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} S^q{}_F(A)$.*

Лемма 4. *Для всякой формулы A: A есть квазиэлементарная формула $\Leftrightarrow$ A есть пропозициональная переменная языка L или $\exists y(y \in N)\exists q$ (q есть пропозициональная переменная языка L) $\exists \alpha_1 \dots \alpha_y$ (A есть $(\alpha_1 \dots (\alpha_y q) \dots)$ и α_1 есть $\neg$ для всякого i из $\{1, \dots, y\}$).*

Стереотипное индуктивное (методом возвратной индукции) доказательство леммы 4 здесь не приводим.

Нам потребуется секвенциальное исчисление $GInt_{<\omega,\omega>}$. Алфавит языка этого исчисления есть объединение алфавита языка L с двухэлементным множеством $\{\mathbf{,}, \rightarrow\}$ символов. Непустой последовательностью формул называем слово в алфавите исчисления $GInt_{<\omega,\omega>}$, имеющее вид $A_1\mathbf{,}\dots\mathbf{,}A_n$, где n есть целое положительное число, а $A_1, \dots, A_n$ являются формулами. Пустой последовательностью формул называем пустое слово. Называем π последовательностью формул, если π есть пустая последовательность формул или непустая последовательность формул. Секвенцией называем слово в алфавите исчисления $GInt_{<\omega,\omega>}$, имеющее вид $\pi \rightarrow \rho$, где π и ρ — последовательности формул. Для всякого целого положительного числа n назовем n-посылочным секвенциальным правилом любое непустое подмножество $n+1$-ой декартовой степени множества всех секвенций. Называем R секвенциальным правилом, если для некоторого целого положительного числа n R есть n-посылочное секвенциальное правило. Называем Π применением секвенциального правила R, если $\Pi \in R$. Условимся, что Γ и Δ — любые последовательности формул, Λ — любая такая последовательность формул, которая является формулой или пустой последовательностью формул. Множество всех основных секвенций исчисления $GInt_{<\omega,\omega>}$ есть множество всех секвенций, каждая из которых имеет вид $A \rightarrow A$, где A есть формула. Множество всех правил исчисления $GInt_{<\omega,\omega>}$ является множеством всех определяемых ниже секвенциальных правил R1–R15. Определяя эти правила, предполагаем, что A и B — произвольные формулы.

R1 есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $<\Gamma\mathbf{,}A\mathbf{,}B\mathbf{,}\Delta \rightarrow \Lambda,\ \ \Gamma\mathbf{,}B\mathbf{,}A\mathbf{,}\Delta \rightarrow \Lambda>$, R2 есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $<A, A, \Gamma \to \Lambda, \quad A, \Gamma \to \Lambda>$,

R3 есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $<\Gamma \to \Lambda, \quad A, \Gamma \to \Lambda>$,

R4 есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $<\Gamma \to \Lambda, \quad \Gamma \to \Lambda, A>$,

R5 есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $<A, \Gamma \to \Lambda, \quad A\&B, \Gamma \to \Lambda>$,

R6 есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $<A, \Gamma \to \Lambda, \quad B\&A, \Gamma \to \Lambda>$,

R7 есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $<\Gamma \to A, \quad \Gamma \to B, \quad \Gamma \to A\&B>$,

R8 есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $<A, \Gamma \to \Lambda, \quad B, \Gamma \to \Lambda, \quad A \vee B, \Gamma \to \Lambda>$,

R9 есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $<\Gamma \to A, \quad \Gamma \to \Lambda, A \vee B>$,

R10 есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $<\Gamma \to A, \quad \Gamma \to \Lambda, B \vee A>$,

R11 есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $<\Gamma \to A, \quad B, \Delta \to \Lambda, \quad A \supset B, \Gamma, \Delta \to \Lambda>$,

R12 есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $<A, \Gamma \to B, \quad \Gamma \to A \supset B>$,

R13 есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $<\Gamma \to Q, \quad \neg Q, \Gamma \to>$, где Q есть формула, не являющаяся квазиэлементарной формулой,

R14 есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $<Q, \Gamma \to, \quad \Gamma \to \neg Q>$, где Q есть формула, не являющаяся квазиэлементарной формулой,

R15 есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $<\Gamma \to A, \quad A, \Delta \to \Lambda, \quad \Gamma, \Delta \to \Lambda>$.

Доказательства в $GInt_{<\omega,\omega>}$ строятся обычным для секвенциальных исчислений образом — аналогично тому, как строятся в [1] древовидные выводы в исчислениях LK и LJ, и аналогично тому, как строятся в [2] доказательства в секвенциальных исчислениях. Определение секвенции, доказуемой в $GInt_{<\omega,\omega>}$, стандартно. Используя методы, разработанные в [1], можно доказать следующее Утверждение.

Утверждение. Для всякой формулы A: $\to A$ есть секвенция, доказуемая в $GInt_{<\omega,\omega>}$ тогда и только тогда, когда A доказуема в $HInt_{<\omega,\omega>}$.

Лемма 5. *Пусть* M *есть замкнутое относительно* Sub_L *множество формул.* $\forall n(n \in N)\forall A_1 \dots \forall A_n(A_1, \dots, A_n$ *— формулы*$)$: $\forall i(i \in N$ и $i \leq n)(A_i \in M$, *или* A_i *есть аксиома исчисления* $HI_{<\omega,\omega>}$, *или* $\exists k \exists l(k, l \in N$ и $k, l < i) < A_k, A_l, A_i >\in MP_L) \Rightarrow M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A_n$.

Для доказательства леммы 5 воспользуемся следующим принципом возвратной индукции:

$\forall n(n \in N)(\forall m(m \in N$ и $m < n)\forall A_1 \dots \forall A_m(A_1, \dots, A_m$ — формулы$)(\forall i(i \in N$ и $i \leq m)(A_i \in M$, или A_i есть аксиома исчисления $HI_{<\omega,\omega>}$, или $\exists k \exists l(k, l \in N$ и $k, l < i) < A_k, A_l, A_i >\in MP_L) \Rightarrow M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A_m) \Rightarrow \forall A_1 \dots \forall A_n(A_1, \dots, A_n$ — формулы$)$ $(\forall i(i \in N$ и $i \leq n)(A_i \in M$, или A_i есть аксиома исчисления $HI_{<\omega,\omega>}$, или $\exists k \exists l(k, l \in N$ и $k, l < i) < A_k, A_l, A_i >\in MP_L) \Rightarrow M \vdash_{HInt<\omega,\omega>} \neg\neg A_n)) \Rightarrow \forall n(n \in N)(\forall A_1 \dots, \forall A_n(A_1, \dots, A_n$ — формулы$)$: $\forall i(i \in N$ и $i \leq n)(A_i \in M$, или A_i есть аксиома исчисления $HI_{<\omega,\omega>}$, или $\exists k \exists l(k, l \in N$ и $k, l < i) < A_k, A_l, A_i >\in MP_L) \Rightarrow M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A_n$.

Из этого принципа вытекает, что для доказательства леммы 5 достаточно доказать индукционный шаг:

$\forall n(n \in N)(\forall m(m \in N$ и $m < n)\forall A_1 \dots \forall A_m$ $(A_1, \dots, A_m$ — формулы$)$ $(\forall i(i \in N$ и $i \leq m)(A_i \in M$, или A_i есть аксиома исчисления $HI_{<\omega,\omega>}$, или $\exists k \exists l(k, l \in N$ и $k, l < i) < A_k, A_l, A_i >\in MP_L) \Rightarrow \mathrm{M} \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A_m) \Rightarrow \forall A_1 \dots \forall A_n(A_1, \dots, A_n$ — формулы$)$ $(\forall i(i \in N$ и $i \leq n)(A_i \in M$, или A_i есть аксиома исчисления $HI_<\omega, \omega >$, или $\exists k \exists l(k, l \in N$ и $k, l < i) < A_k, A_l, A_i >\in MP_L) \Rightarrow \mathrm{M} \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A_n))$.

Докажем индукционный шаг.

(1) $u \in N$ (допущение).

(2) $\forall m(m \in N$ и $m < u)\forall A_1 \dots \forall A_m(A_1, \dots, A_m$ — формулы$)$ $(\forall i(i \in N$ и $i \leq m)(A_i \in M$, или A_i есть аксиома исчисления $HI_{<\omega,\omega>}$, или $\exists k \exists l(k, l \in N$ и $k, l < i) < A_k, A_l, A_i >\in MP_L) \Rightarrow M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A_m)$ (допущение).

(3) $A'_1, \dots, A'_u$ — формулы (допущение).

(4) $\forall i(i \in N$ и $i \leq u)(A'_i \in M$, или A'_i есть аксиома исчисления $HI_{<\omega,\omega>}$, или $\exists k \exists l(k, l \in N$ и $k, l < i) < A'_k, A'_l, A'_i >\in MP_L)$ (допущение).

(5) $A'_u \in M$ (допущение).

(6) A'_u есть квазиэлементарная формула (допущение).

(7) A'_u есть пропозициональная переменная языка L или $\exists y(y \in N)\exists q(q$ есть пропозициональная переменная языка $L)$ $\exists \alpha_1 \dots \exists \alpha_y(A'_u$ есть $(\alpha_1 \dots (\alpha_y q) \dots)$ и α_i есть $\neg$ для всякого i из $\{1, \dots, y\})$ (из (3) и (6), по лемме 4).

Очевидно, что (8) для всякой пропозициональной переменной q языка L и всяких A и B: если $A \in M$ и B есть формула, то $S^q{}_B(A) \in M$.

(9) A'_u есть пропозициональная переменная языка L (допущение).

(10) $\neg\neg A'_u$ есть формула (из (9), по определению формулы).

Понятно, что (11) $S^{A'u}{}_{\neg\neg A'_u}(A'_u)$ есть $\neg\neg A'_u$.

(12) $S^{A'u}{}_{\neg\neg A'_u}(A'_u) \in M$ (из (3), (8), (9) и (10)).

(13) $\neg\neg A'_u \in M$ (из (11) и (12)).

Снимая допущение (9), получаем, что

(14) если A'_u есть пропозициональная переменная языка L, то $\neg\neg A'_u \in M$.

(15) $\exists y(y \in N)\exists q$ (q есть пропозициональная переменная языка L) $\exists\alpha_1 \ldots \exists\alpha_y(A'_u$ есть $(\alpha_1 \ldots (\alpha_y q) \ldots)$ и α_i есть $\neg$ для всякого i из $\{1, \ldots, y\}$) (допущение).

Пусть (16) $\mathbf{y} \in N$, $\boldsymbol{q}$ есть пропозициональная переменная языка L, A'_u есть $(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{q}) \ldots)$ и α_i есть $\neg$ для всякого i из $\{1, \ldots, \boldsymbol{y}\}$.

(17) $\neg\neg\boldsymbol{q}$ есть формула (из того, что $\boldsymbol{q}$ есть пропозициональная переменная языка L (см. (16)), по определению формулы).

(18) $(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{q}) \ldots) \in M$ (из (5) и (16)).

(19) $S^{\boldsymbol{q}}_{\neg\neg q}(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{q}) \ldots) \in M$ (из (3), (8), (16) и (17)).

В свете утверждений (3), (16) и (17), ясно, что

(20) $S^{\boldsymbol{q}}_{\neg\neg q}(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{q}) \ldots)$ есть $(\neg(\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_y\boldsymbol{q}) \ldots)))$.

(21) $\neg\neg\mathrm{A}'_u \in M$ (из (16), (19) и (20)).

Снимая допущение (15), получаем, что

(22) если $\exists y(y \in N)\exists q(q$ есть пропозициональная переменная языка L) $\exists\alpha_1 \ldots \exists\alpha_y$ (A'_u есть $(\alpha_1 \ldots (\alpha_y q) \ldots)$ и α_i есть $\neg$ для всякого i из $\{1, \ldots, y\}$), то $\neg\neg A'_u \in M$.

(23) $\neg\neg A'_u \in M$ (из (7), (14) и (22)).

(24) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_u$ (из (23) и того, что M — множество формул и $\neg\neg A'_u$ есть формула, по определению $HInt_{<\omega,\omega>}$ — вывода из множества формул и соглашения об использовании $\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}}$).

Снимая допущение (6), получаем, что

(25) если A'_u есть квазиэлементарная формула, то М $\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}}$ $\neg\neg A'_u$.

(26) A'_u не есть квазиэлементарная формула (допущение).

Нам потребуется следующая подлемма 1.

Подлемма 1. Для всякой формулы A: если A не есть квазиэлементарная формула, то $A \supset \neg\neg A$ есть формула, доказуемая в $HInt_{<\omega,\omega>}$.

В свете утверждения ясно, что для доказательства подлеммы 1 достаточно доказать, что для произвольной формулы A, не являющейся квазиэлементарной формулой, секвенция $\to A \supset \neg\neg A$ доказуема в $GInt_{<\omega,\omega>}$.

Построим для произвольной формулы A, не являющейся квазиэлементарной формулой, доказательство в $GInt_{<\omega,\omega>}$ секвенции $\to A \supset \neg\neg A$.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \to A}{\neg A, A \to}}{A \to \neg\neg A}}{\to A \supset \neg\neg A}$$

Итак, для произвольной формулы A, не являющейся квазиэлементарной формулой, секвенция $\to A \supset \neg\neg A$ доказуема в $GInt_{<\omega,\omega>}$.

Подлемма 1 доказана.

Опираясь на подлемму 1, определения и соглашение об использовании $\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}}$, получаем, что

(27) $\forall A$ (A есть формула) $\forall\Gamma$ (Γ есть множество формул) (если A не есть квазиэлементарная формула, то $\Gamma \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} A \supset \neg\neg A$).

(28) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} A'u \supset \neg\neg A'u$ (из условия доказываемой леммы и утверждений (3), (26) и (27)).

Не трудно убедиться в том, что

(29) $\forall A$(A есть формула) $\forall B$(B есть формула) $\forall\Gamma$(Γ есть множество формул) ($A \in \Gamma$ и $\Gamma \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} A \supset B \Rightarrow \Gamma \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} B$).

(30) $\neg\neg A'u$ есть формула (из (3), по определению формулы).

(31) ($A'_u \in M$ и $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} A'_u \supset \neg\neg A'_u$) $\Rightarrow M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_u$(из условия доказываемой леммы и утверждений (3), (29) и (30)).

(32) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_u$ (из (5), (28) и (31)).

Снимая допущение (26), получаем, что

(33) если A'_u не есть квазиэлементарная формула, то $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_u$.

(34) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_u$ (из (25) и (33)).

Снимая допущение (5), получаем, что

(35) если $A'_u \in M$, то $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_u$.

(36) A'_u есть аксиома исчисления $HI_{<\omega,\omega>}$ (допущение).

Понятно, что при этом допущении верно, что

(37) A'_u есть аксиома исчисления $HInt_{<\omega,\omega>}$ или найдутся такие формулы, скажем, F_1 и F_2, что A'_u есть $((F_1 \supset F_2) \supset F_1) \supset F_1$.

(38) A'_u есть аксиома исчисления $HInt_{<\omega,\omega>}$ (допущение).

Очевидно, что (39) всякая аксиома исчисления $HInt_{<\omega,\omega>}$ есть формула, не являющаяся квазиэлементарной формулой.

(40) $A'_u \supset \neg\neg A'_u$ есть формула, доказуемая в $HInt_{<\omega,\omega>}$ (из (38) и (39), по подлемме 1).

Используя утверждения (38) и (40), а также надлежащие определения, легко показать, что

(41) $\neg\neg A'_u$ есть формула, доказуемая в $HInt_{<\omega,\omega>}$.

Снимая допущение (38), получаем, что

(42) если A'_u есть аксиома исчисления $HInt_{<\omega,\omega>}$ то $\neg\neg A'_u$ есть формула, доказуемая в $HInt_{<\omega,\omega>}$.

(43) Найдутся такие формулы, скажем, F_1 и F_2, что A'_u есть $((F_1 \supset F_2) \supset F_1) \supset F_1$ (допущение).

Построим доказательство в $GInt_{<\omega,\omega>}$ секвенции $\rightarrow\neg\neg(((F_1 \supset F_2) \supset F_1) \supset F_1)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{F_1 \rightarrow F_1}{(F_1 \supset F_2) \supset F_1, F_1 \rightarrow F_1}}{F_1 \rightarrow ((F_1 \supset F_2) \supset F_1) \supset F_1}}{\neg(((F_1 \supset F_2) \supset F_1) \supset F_1), F_1 \rightarrow}}{F_1, \neg(((F_1 \supset F_2) \supset F_1) \supset F_1) \rightarrow}}{F_1, \neg(((F_1 \supset F_2) \supset F_1) \supset F_1) \rightarrow F_2}}{\neg(((F_1 \supset F_2) \supset F_1) \supset F_1) \rightarrow F_1 \supset F_2} \qquad F_1 \rightarrow F_1}{(F_1 \supset F_2) \supset F_1, \neg(((F_1 \supset F_2) \supset F_1) \supset F_1) \rightarrow F_1}}{\neg(((F_1 \supset F_2) \supset F_1) \supset F_1) \rightarrow ((F_1 \supset F_2) \supset F_1) \supset F_1)}}{\neg(((F_1 \supset F_2) \supset F_1) \supset F_1), \neg(((F_1 \supset F_2) \supset F_1) \supset F_1) \rightarrow}}{\neg(((F_1 \supset F_2) \supset F_1) \supset F_1) \rightarrow}}{\rightarrow\neg\neg(((F_1 \supset F_2) \supset F_1) \supset F_1)}$$

Итак, (44) секвенция $\rightarrow\neg\neg(((F_1 \supset F_2) \supset F_1) \supset F_1)$ доказуема в $GInt_{<\omega,\omega>}$.

(45) Секвенция $\neg\neg A'_u$ доказуема в $GInt_{<\omega,\omega>}$ (из (43) и (44)).

Используя утверждение (45), Утверждение и тот факт, что $\neg\neg A'_u$ есть формула, получаем, что

(46) $\neg\neg A'_u$ есть формула, доказуемая в $HInt_{<\omega,\omega>}$.

Снимая допущение (43), получаем, что (47) если найдутся такие формулы F_1 и F_2, что A'_u есть $((F1 \supset F2) \supset F1) \supset F1$, то $\neg\neg A'_u$ есть формула, доказуемая в $HInt_{<\omega,\omega>}$.

(48) $\neg\neg A'_u$ есть формула, доказуемая в $HInt_{<\omega,\omega>}$ (из (37), (42) и (47)).

Опираясь на условие доказываемой леммы, утверждение (48), определения и соглашение об использовании $\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}}$, получаем, что (49) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_u$. Снимая допущение (36), получаем, что

(50) если A'_u есть аксиома исчисления $HI_{<\omega,\omega>}$, то $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_u$.

(51) $\exists k \exists l(k, l \in N$ и $k, l < u) < A'_k, A'_l, A'_u >\in MP_L$ (допущение).

Пусть (52) $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l} \in N$ и $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l} < u < A'_{\boldsymbol{k}}, A'_{\boldsymbol{l}}, A'_u >\in MP_L$.

Ясно, что (53) $A'_{\boldsymbol{l}}$ есть $(A'_{\boldsymbol{k}} \supset A'_u)$.

(54) $\boldsymbol{k} \in N$ и $\boldsymbol{k} < u$ (из (52)).

(55) $\boldsymbol{l} \in N$ и $\boldsymbol{l} < u$ (из (52)).

(56) $A'_1, \dots A'_{\boldsymbol{k}}$ — формулы и $\forall i(i \in N$ и $i \leq \boldsymbol{k})(A'_i \in M$, или A'_i есть аксиома исчисления $HI_{<\omega,\omega>}$, или $\exists k \exists l(k, l \in N$ и $k, l < i) < A'_k, A'_l, A'_i >\in MP_L)$ (из (3), (4) и (54)).

(57) $A'_1, \dots, A'_{\boldsymbol{l}}$ — формулы и $\forall i(i \in N$ и $i \leq \boldsymbol{l})(A'_i \in M$, или A'_i есть аксиома исчисления $HI_{<}\omega, \omega >$, или $\exists k \exists l(k, l \in N$ и $k, l < i)$ $< A'_k, A'_l, A'_i >\in MP_L)$ (из (3), (4) и (55)).

(58) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_{\boldsymbol{k}}$ (из (2), (54) и (56)).

(59) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_{\boldsymbol{l}}$ (из (2), (55) и (57)).

(60) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg(A'_{\boldsymbol{k}} \supset A'_u)$ (из (53) и (59)).

Очевидно, что (61) справедливо хотя бы одно из следующих трех утверждений: (а) ни $A'_{\boldsymbol{k}}$, ни A'_u не являются квазиэлементарными формулами, (б) A'_u есть квазиэлементарная формула, (в) $A'_{\boldsymbol{k}}$ есть квазиэлементарная формула.

(62) Ни $A'_{\boldsymbol{k}}$, ни A'_u не являются квазиэлементарными формулами (допущение).

Нам потребуется следующая подлемма 2.

Подлемма 2. Для всяких формул A и B: если ни A, ни B не являются квазиэлементарными формулами, то $\neg\neg(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$ есть формула, доказуемая в $HInt_{<\omega,\omega>}$.

В свете утверждения ясно, что для доказательства подлеммы 2 достаточно доказать, что для произвольных формул A и B, ни одна из которых не является квазиэлементарной формулой, $\rightarrow \neg\neg(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$ есть секвенция, доказуемая в $GInt_{<\omega,\omega>}$.

Построим для произвольных формул A и B, ни одна из которых не является квазиэлементарной формулой, доказательство в $GInt_{<\omega,\omega>}$ секвенции $\rightarrow \neg\neg(A \supset \mathrm{B}) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$.

$$\begin{array}{c}
A \rightarrow A \qquad B \rightarrow B \\ \hline
A \supset B, A \rightarrow B \\ \hline
\neg B, A \supset B, A \rightarrow \\ \hline
A \supset B, \neg B, A \rightarrow \\ \hline
A \supset B, A, \neg B \rightarrow \\ \hline
A, \neg B \rightarrow \neg(A \supset B) \\ \hline
\neg\neg(A \supset B), A, \neg B \rightarrow \\ \hline
A, \neg\neg(A \supset B), \neg B \rightarrow \\ \hline
A, \neg B, \neg\neg(A \supset B) \rightarrow \\ \hline
\neg B, \neg\neg(A \supset B) \rightarrow \neg A \\ \hline
\neg\neg A, \neg B, \neg\neg(A \supset B) \rightarrow \\ \hline
\neg B, \neg\neg A, \neg\neg(A \supset B) \rightarrow \\ \hline
\neg\neg A, \neg\neg(A \supset B) \rightarrow \neg\neg B \\ \hline
\neg\neg(A \supset B) \rightarrow \neg\neg A \supset \neg\neg B \\ \hline
\rightarrow \neg\neg(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)
\end{array}$$

Итак, для произвольных формул A и B, ни одна из которых не является квазиэлементарной формулой, секвенция $\rightarrow \neg\neg(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$ доказуема в $GInt_{<\omega,\omega>}$.

Подлемма 2 доказана.

(63) $\neg\neg(A'_{\boldsymbol{k}} \supset A'_u) \supset (\neg\neg A'_{\boldsymbol{k}} \supset \neg\neg A'_u)$ есть формула, доказуемая в $HInt_{<\omega,\omega>}$ (из (3), (56) и (62), по подлемме 2).

Опираясь на утверждения (58), (60) и (63), не трудно показать, что (64) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_u$.

Снимая допущение (62), получаем, что

(65) если ни $A'_{\boldsymbol{k}}$, ни A'_u не являются квазиэлементарными формулами, то $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_u$.

(66) $A'_{\boldsymbol{k}}$ не есть квазиэлементарная формула, а A'_u есть квазиэлементарная формула (допущение).

(67) A'_u есть квазиэлементарная формула (из (66)).

(68) A'_u есть пропозициональная переменная языка L или $\exists R(R \in N)\exists q(q$ есть пропозициональная переменная языка $L)$ $\exists \alpha_1 \ldots \exists \alpha_r(A'_u$ есть $(\alpha_1 \ldots (\alpha_r q) \ldots)$ и α_i есть $\neg$ для всякого i из $\{1, \ldots, r\})$ (из (3) и (67), по лемме 4).

Разумеется, что (69) $\neg\neg A'_{\boldsymbol{k}}$, $\neg\neg(A'_{\boldsymbol{k}} \supset A'_u)$, $A'_u \supset A'_u$ и $\neg(A'_u \supset A'_u)$ являются формулами.

(70) A'_u есть пропозициональная переменная языка L (допущение).

Из условия доказываемой леммы, леммы 2 и утверждений (58), (60), (69) и (70) вытекают нижеследующие утверждения (71), (72), (73) и (74).

(71) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} S^{A'_u}{}_{A'_u \supset A'_u}(\neg\neg A'_{\boldsymbol{k}})$.

(72) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} S^{A'_u}{}_{\neg(A'u \supset A'u)}(\neg\neg A'_{\boldsymbol{k}})$.

(73) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} S^{A'u}{}_{A'_u \supset A'_u}(\neg\neg(A'_{\boldsymbol{k}} \supset A'_u)$.

(74) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} S^{A'_u}{}_{\neg(A'_u \supset A'_u)}(\neg\neg(A'_{\boldsymbol{k}} \supset A'_u)$.

Опираясь на утверждения (3), (56), (70), (71), (72), (73) и (74) и используя известные свойства пропозициональной подстановки, определение формулы и соглашение об использовании S, получаем, что верны следующие утверждения (75), (76), (77) и (78).

(75) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg S^{A'_u}{}_{A'_u \supset A'_u}(A'_k)$.

(76) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg S^{A'_u}{}_{\neg(A'_u \supset A'_u)}(A'_k)$.

(77) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg(S^{A'_u}{}_{A'_u \supset A'_u}(A'_k) \supset (A'_u \supset A'_u))$.

(78) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg(S^{A'_u}{}_{\neg(A'_u \supset A'_u)}(A'_k) \supset \neg(A'_u \supset A'_u))$.

Понятно, что (79) $S^{A'_u}{}_{A'_u \supset A'_u}(A'_{\boldsymbol{k}})$, $S^{A'_u}{}_{\neg(A'_u \supset A'_u)}(A'_{\boldsymbol{k}})$, $A'_u \supset A'_u$ и $\neg(A'_u \supset A'_u)$ являются формулами, ни одна из которых не есть квазиэлементарная формула.

(80) $\neg\neg(S^{A'_u}{}_{A'_u \supset A'_u}(A'_{\boldsymbol{k}}) \supset \neg(A'_u \supset A'_u)) \supset (\neg\neg S^{A'_u}{}_{A'_u \supset A'_u}(A'_{\boldsymbol{k}}) \supset \neg\neg(A'_u \supset A'_u))$ есть формула, доказуемая в $HInt_{<\omega,\omega>}$ (из (79), по подлемме 2).

(81) $\neg\neg(S^{A'_u}{}_{\neg(A'_u \supset A'_u)}(A'_{\boldsymbol{k}}) \supset \neg(A'_u \supset A'_u)) \supset (\neg\neg S^{A'_u}{}_{\neg(A'_u \supset A'_u)}(A'_{\boldsymbol{k}}) \supset \neg\neg\neg(A'_u \supset A'_u))$ есть формула, доказуемая в $HInt_{<\omega,\omega>}$ (из (79), по подлемме 2).

Опираясь на утверждения (75), (76), (77), (78), (80) и (81), не трудно показать, что верны утверждения (82) и (83).

(82) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg(A'_u \supset A'_u)$.

(83) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg\neg(A'_u \supset A'_u)$.

Очевидно, что (84) $\neg\neg\neg(A'_u \supset A'_u) \supset (\neg\neg(A'_u \supset A'_u) \supset \neg\neg A'_u)$ есть аксиома исчисления $HInt_{<\omega,\omega>}$.

Тогда понятно, что (85) $\neg\neg\neg(A'_u \supset A'_u) \supset (\neg\neg(A'_u \supset A'_u) \supset \neg\neg A'_u)$ есть формула, доказуемая в $HInt_{<\omega,\omega>}$.

Опираясь на утверждения (82), (83) и (85), легко показать, что (86) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_u$.

Снимая допущение (70), получаем, что

(87) если A'_u есть пропозициональная переменная языка L, то $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_u$.

(88) $\exists r(r \in N)\exists q(q$ есть пропозициональная переменная языка $L)$ $\exists\alpha_1\ldots\exists\alpha_r(A'_u$ есть $(\alpha_1\ldots(\alpha_r q)\ldots)$ и α_i есть $\neg$ для всякого i из $\{1,\ldots,r\})$ (допущение).

Пусть (89) $\boldsymbol{r}$ есть целое положительное число, $\boldsymbol{q}$ есть пропозициональная переменная языка L, A'_u есть $(\alpha'_1\ldots(\alpha'_r\boldsymbol{q})\ldots)$, α'_1 есть $\neg,\ldots,\alpha'_r$ есть $\neg$.

Из леммы 2, условия доказываемой леммы и утверждений (58), (60), (69) и (89) вытекают нижеследующие утверждения (90), (91), (92) и (93).

(90) $M\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} S^{\boldsymbol{q}}{}_{\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q}}(\neg\neg A'_{\boldsymbol{k}})$.

(91) $M\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} S^{\boldsymbol{q}}{}_{\neg(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q})}(\neg\neg A'_{\boldsymbol{k}})$.

(92) $M\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} S^{\boldsymbol{q}}{}_{\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q}}(\neg\neg(A'_{\boldsymbol{k}}\supset(\alpha'_1\ldots(\alpha'_r\boldsymbol{q})\ldots))$.

(93) $M\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} S^{\boldsymbol{q}}_{\neg(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q})}(\neg\neg(A'_{\boldsymbol{k}}\supset(\alpha'_1\ldots(\alpha'_{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{q})\ldots))$.

Опираясь на утверждения (56), (89), (90), (91), (92) и (93) и используя известные свойства пропозициональной подстановки, определение формулы и соглашение об использовании S, получаем, что верны следующие утверждения (94), (95), (96) и (97).

(94) $M\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg S^{\boldsymbol{q}}{}_{\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q}}(A'_{\boldsymbol{k}})$.

(95) $M\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg S^{\boldsymbol{q}}{}_{\neg(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q})}(A'_{\boldsymbol{k}})$.

(96) $M\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg(S^{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q}}(A'_{\boldsymbol{k}})\supset(\alpha'_1\ldots(\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q}))\ldots))$.

(97) $M\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg(S^{\boldsymbol{q}}{}_{\neg(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q})}(A'_{\boldsymbol{k}})\supset(\alpha'_1\ldots(\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\neg(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q})))\ldots))$.

Понятно, что (98) $S^{\boldsymbol{q}}{}_{\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q}}(A'_{\boldsymbol{k}}), S^{\boldsymbol{q}}{}_{\neg(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q})}(A'_{\boldsymbol{k}}), (\alpha'_1\ldots(\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q}))\ldots)$ и $(\alpha'_1\ldots(\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\neg(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q})))\ldots)$ являются формулами, ни одна из которых не есть квазиэлементарная формула.

(99) $\neg\neg(S^{\boldsymbol{q}}{}_{\boldsymbol{q}}\supset\boldsymbol{q}(A'_{\boldsymbol{k}})\supset(\alpha'_1\ldots(\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q}))\ldots))\supset(\neg\neg S^{\boldsymbol{q}}{}_{\boldsymbol{q}}\supset\boldsymbol{q}(A'_{\boldsymbol{k}})(A'_{\boldsymbol{k}})\supset\neg\neg(\alpha'_1\ldots\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q}))\ldots))$ есть формула, доказуемая в $HInt_{<\omega,\omega>}$ (из (98), по подлемме 2).

(100) $\neg\neg(S^{\boldsymbol{q}}{}_{\neg(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q})}(A'_{\boldsymbol{k}})\supset(\alpha'_1\ldots(\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\neg(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q})))\ldots))\supset(\neg\neg S^{\boldsymbol{q}}{}_{\neg(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q})}(A'_{\boldsymbol{k}})\supset\neg\neg(\alpha'_1\ldots(\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\neg(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q})))\ldots))$ есть формула, доказуемая в $HInt_{<\omega,\omega>}$ (из (98), по подлемме 2).

Опираясь на утверждения (94), (95), (96), (97), (99) и (100), не трудно показать, что верны следующие утверждения (101) и (102).

(101) $M\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg(\alpha'_1\ldots(\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q}))\ldots)$.

(102) $M\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg(\alpha'_1\ldots(\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\neg(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q})))\ldots)$.

Очевидно, что (103) $\neg\neg(\alpha'_1\ldots(\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\neg(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q})))\ldots)\supset(\neg\neg(\alpha'_1\ldots(\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q}))\ldots)\supset\neg\neg A'_u)$ есть аксиома исчисления $HInt_{<\omega,\omega>}$. Тогда понятно, что (104) $\neg\neg(\alpha'_1\ldots(\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\neg(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q})))\ldots)\supset(\neg\neg(\alpha'_1\ldots(\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q}))\ldots)\supset\neg\neg A'_u)$ есть формула, доказуемая в $HInt_{<\omega,\omega>}$.

Опираясь на утверждения (101), (102) и (104), не трудно показать, что (105) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_u$).

Снимая допущение (88), получаем, что

(106) если $\exists r(r \in N)\exists q(q$ есть пропозициональная переменная языка $L)$ $\exists\alpha_1 \ldots \exists\alpha_r(A'_u$ есть $(\alpha_1 \ldots (\alpha_r q) \ldots)$ и α_i есть $\neg$ для всякого i из $\{1, \ldots, r\}$), то М $\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_u$).

(107) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_u$ (из (68), (87) и (106)).

Снимая допущение (66), получаем, что

(108) если $A'_{\boldsymbol{k}}$ не есть квазиэлементарная формула, а A'_u есть квазиэлементарная формула, то $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_u$).

(109) $A'_{\boldsymbol{k}}$ есть квазиэлементарная формула (допущение).

(110) $A'_{\boldsymbol{k}}$ есть пропозициональная переменная языка L или $\exists r(r \in N)\exists q$ (q есть пропозициональная переменная языка L) $\exists\alpha_1 \ldots \exists\alpha_r(A'_{\boldsymbol{k}}$ есть $(\alpha_1 \ldots (\alpha_r q) \ldots)$ и α_i есть $\neg$ для всякого i из $\{1, \ldots, r\}$) (из (3) и (109), по лемме 4).

(111) $A'_{\boldsymbol{k}}$ есть пропозициональная переменная языка L (допущение).

Заметим, что (112) $\neg\neg A'_{\boldsymbol{k}}$ и A'_u являются формулами.

Из леммы 2, условия доказываемой леммы и утверждений (111) и (112) вытекает следующее утверждение (113).

(113) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} S^{A'_{\boldsymbol{k}}}{}_{A'_u}(\neg\neg A'_{\boldsymbol{k}})$.

Понятно, что (114) $S^{A'_{\boldsymbol{k}}}{}_{A'_u}(\neg\neg A'_{\boldsymbol{k}})$ есть $\neg\neg A'_u$.

(115) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_u$ (из (113) и (114)).

Снимая допущение (111), получаем, что

(116) если $A'_{\boldsymbol{k}}$ есть пропозициональная переменная языка L, то $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_{u.}$

(117) $\exists r(r \in N)\exists q(q$ есть пропозициональная переменная языка $L)$ $\exists\alpha_1 \ldots \exists\alpha_r(A'_{\boldsymbol{k}}$ есть $(\alpha_1 \ldots (\alpha_r q) \ldots)$ и α_i есть $\neg$ для всякого i из $\{1, \ldots, r\}$) (допущение).

Пусть (118) $\boldsymbol{r}$ есть целое положительное число, $\boldsymbol{q}$ есть пропозициональная переменная языка L, $A'_{\boldsymbol{k}}$ есть $(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{q}) \ldots)$ и α'_1 есть $\neg, \ldots, \alpha'_r$ есть $\neg$.

(119) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{q}) \ldots)$ (из (58) и (117).

Подчеркнем, что (120) $(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{q}) \ldots)$, $\boldsymbol{q}_\supset \boldsymbol{q}$ и $\neg(\boldsymbol{q}_\supset \boldsymbol{q})$ являются формулами. Из леммы 2, условия доказываемой леммы и утверждений (118), (119) и (120) вытекают следующие утверждения (121) и (122).

(121) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} S^{\boldsymbol{q}}{}_{\boldsymbol{q}_\supset \boldsymbol{q}}(\neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{q}) \ldots))$.

(122) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} S^{\boldsymbol{q}}{}_{\neg(\boldsymbol{q}_\supset \boldsymbol{q})}(\neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{q}) \ldots))$.

Понятно, что (123) $S^{\boldsymbol{q}}{}_{\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q}}(\neg\neg(\alpha'_1\ldots(\alpha'_{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{q})\ldots))$ есть $\neg\neg(\alpha'_1\ldots(\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q}))\ldots))$ и $S^{\boldsymbol{q}}{}_{\neg(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q})}(\neg\neg(\alpha'_1\ldots(\alpha'_{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{q})\ldots))$ есть $\neg\neg(\alpha'_1\ldots(\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\neg(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q})))\ldots)$.

(124) $M\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}}\neg\neg(\alpha'_1\ldots(\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q}))\ldots))$ и

$M\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}}\neg\neg(\alpha'_1\ldots(\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\neg(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q})))\ldots)$ (из (121), (122) и (123)).

Очевидно, что (125) $\neg\neg(\alpha'_1\ldots(\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\neg(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q})))\ldots)\supset(\neg\neg(\alpha'_1\ldots(\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q}))\ldots)\supset\neg\neg A'_u)$ есть аксиома исчисления $HInt_{<\omega,\omega>}$. Тогда понятно, что (126) $\neg\neg(\alpha'_1\ldots(\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\neg(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q})))\ldots)\supset(\neg\neg(\alpha'_1\ldots(\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q}))\ldots)\supset\neg\neg A'_u)$ есть формула, доказуемая в $HInt_{<\omega,\omega>}$.

Опираясь на утверждения (124), (125) и (126), не трудно показать, что (127) $M\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}}\neg\neg A'_u$.

Снимая допущение (117), получаем, что

(128) если $\exists r(r\in N)\exists q(q$ есть пропозициональная переменная языка $L)$ $\exists\alpha_1\ldots\exists\alpha_r(A'_{\boldsymbol{k}}$ есть $(\alpha_1\ldots(\alpha_r q)\ldots)$ и α_i есть $\neg$ для всякого i из $\{1,\ldots,r\}$, то $M\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}}\neg\neg A'_u$.

(129) $M\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}}\neg\neg A'_u$ (из (110), (116) и (128).

Снимая допущение (109), получаем, что

(130) если $A'_{\boldsymbol{k}}$ есть квазиэлементарная формула, то $M\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}}\neg\neg A'_u$.

(131) $M\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}}\neg\neg A'_u$ (из (61), (65), (108) и (130).

Снимая допущение (51), получаем, что

(132) если $\exists k\exists l(k,l\in N$ и $k,l<u)<A'_k,A'_l,A'_u>\in MP_L$, то $M\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}}\neg\neg A'_u$.

Опираясь на утверждения (1) и (4) и учитывая, что $u\leq u$, получаем, что

(133) $A'_u\in M$, или A'_u есть аксиома исчисления $HInt_{<\omega,\omega>}$, или $\exists k\exists l(k,l\in N$ и $k,l<u)<A'_k,A'_l,A'_u>\in MP_L$.

(134) $M\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}}\neg\neg A'_u$ (из (35), (50), (132) и (133).

Теперь для доказательства индукционного шага остается снять допущения (1), (2), (3) и (4) и провести надлежащие обобщения.

Индукционный шаг доказан.

Лемма 5 доказана.

Используя лемму 5, легко доказать следующую лемму 6.

Лемма 6. *Пусть M есть замкнутое относительно Sub_L множество формул. Для всякой формулы A: если $M\vdash_{HI_{<\omega,\omega>}}A$, то $M\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}}\neg\neg A$.*

Лемма 7. *Для всякой формулы* A *и для всякого множества* Γ *формул: если* $\Gamma \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} A$, *то* $\Gamma \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} A$.

Очевидное простое доказательство леммы 7 здесь не приводим.

Лемма 8. *Пусть* M *есть замкнутое относительно* Sub_L *множество формул. Для всякой формулы* A*: если* $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A$, *то* $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} A$.

Докажем лемму 8.

(1) $\boldsymbol{A}$ есть формула (допущение).

(2) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \neg\neg\boldsymbol{A}$ (допущение).

(3) $\boldsymbol{A}$ есть квазиэлементарная формула (допущение).

(4) $\boldsymbol{A}$ есть пропозициональная переменная языка L или $\exists y(y \in N)\exists q(q$ есть пропозициональная переменная языка $L)$ $\exists\alpha_1 \dots \exists\alpha_y(\boldsymbol{A}$ есть $(\alpha_1 \dots (\alpha_y q) \dots)$ и α_i есть $\neg$ для всякого i из $\{1, \dots, y\})$ (из (1) и (3), по лемме 4).

(5) $\boldsymbol{A}$ есть пропозициональная переменная языка L (допущение).

Очевидно, что (6) $\neg\neg\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A}$ и $\neg(\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A})$ являются формулами.

(7) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} S^{\boldsymbol{A}}{}_{\boldsymbol{A}\supset\boldsymbol{A}}(\neg\neg\boldsymbol{A})$ (из условия доказываемой леммы, утверждений (2), (5), (6) и леммы 3).

(8) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} S^{\boldsymbol{A}}{}_{\neg(\boldsymbol{A}\supset\boldsymbol{A})}(\neg\neg\boldsymbol{A})$ (из условия доказываемой леммы, утверждений (2), (5), (6) и леммы 3).

Понятно, что верны следующие утверждения (9), (10) и (11).

(9) $S^{\boldsymbol{A}}{}_{\boldsymbol{A}\supset\boldsymbol{A}}(\neg\neg\boldsymbol{A})$ есть $\neg\neg(\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A})$.

(10) $S^{\boldsymbol{A}}{}_{\neg(\boldsymbol{A}\supset\boldsymbol{A})}(\neg\neg\boldsymbol{A})$ есть $\neg\neg\neg(\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A})$.

(11) $\neg\neg\neg(\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A}) \supset (\neg\neg(\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A}) \supset \boldsymbol{A})$ есть аксиома исчисления $HI_{<\omega,\omega>}$.

(12) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \neg\neg(\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A})$ (из (7) и (9)).

(13) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \neg\neg\neg(\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A})$ (из (8) и (10)).

(14) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \neg\neg\neg(\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A}) \supset (\neg\neg(\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A}) \supset \boldsymbol{A})$ (из (11), по определению $HI_{<\omega,\omega>}$-вывода формулы из множества формул).

Независимо от доказываемой леммы нетрудно убедиться, что

(15) $\forall A(A$ есть формула$)$ $\forall B(B$ есть формула$)$ $\forall\Gamma(\Gamma$ есть множество формул$)$ $(\Gamma \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} A$ и $\Gamma \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} A \supset B \Rightarrow \Gamma \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} B)$.

Разумеется, что (16) $\neg\neg(\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A})$, $\neg\neg\neg(\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A})$, $\neg\neg(\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A}) \supset \boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A}$ являются формулами, а M есть множество формул.

Из утверждений (12)–(16) вытекает, что

(17) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \boldsymbol{A}$.

Снимая допущение (5), получаем, что

(18) если $\boldsymbol{A}$ есть пропозициональная переменная языка L, то $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \boldsymbol{A}$.

(19) $\exists y(y \in N)\exists q(q$ есть пропозициональная переменная языка $L)$ $\exists\alpha_1 \ldots \exists\alpha_y(\boldsymbol{A}$ есть$(\alpha_1 \ldots (\alpha_y q) \ldots)$ и α_i есть $\neg$ для всякого i из $\{1, \ldots, y\})$ (допущение).

Пусть (20) $y' \in N$, $\boldsymbol{q}$ есть пропозициональная переменная языка L, α'_i есть $\neg$ для всякого i из $\{1, \ldots, y'\})$, $\boldsymbol{A}$ есть $(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}\boldsymbol{q}) \ldots)$.

(21) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}\boldsymbol{q}) \ldots)$ (из (2) и (20)).

Заметим, что (22) $\boldsymbol{q}$ есть пропозициональная переменная языка L, а $\neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}\boldsymbol{q}) \ldots)$, $\boldsymbol{q} \supset \boldsymbol{q}$, $\neg(\boldsymbol{q} \supset \boldsymbol{q})$ являются формулами.

(23) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} S^{\boldsymbol{q}}{}_{\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q}}\neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}\boldsymbol{q}) \ldots)$ (из условия доказываемой леммы, утверждений (21) и (22) и леммы 3).

(24) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} S^{\boldsymbol{q}}{}_{\neg(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q})}\neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}\boldsymbol{q}) \ldots)$ (из условия доказываемой леммы, утверждений (21) и (22) и леммы 3).

Понятно, что верны следующие утверждения (25), (26) и (27).

(25) $S^{\boldsymbol{q}}{}_{\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q}}\neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}\boldsymbol{q}) \ldots)$ есть $\neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q})) \ldots)$.

(26) $S^{\boldsymbol{q}}{}_{\neg(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q})}\neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}\boldsymbol{q}) \ldots)$ есть $\neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}(\neg(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q}))) \ldots)$.

(27) $\neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}(\neg(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q}))) \ldots) \supset (\neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q})) \ldots) \supset \boldsymbol{A})$ есть аксиома исчисления $HI_{<\omega,\omega>}$.

(28) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q})) \ldots)$ (из (23) и (25)).

(29) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}(\neg(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q}))) \ldots)$ (из (24) и (26)).

(30) $M \vdash_{HI<\omega,\omega>} \neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}\neg(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q}))) \ldots) \supset (\neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q})) \ldots) \supset \boldsymbol{A})$ (из (27), по определению $HI_{<\omega,\omega>}$ — вывода формулы из множества формул).

Разумеется, что (31) $\neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}(\neg(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q}))) \ldots)$, $\neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q})) \ldots)$, $(\neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q})) \ldots) \supset \boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{A}$ являются формулами, а M есть множество формул.

Из утверждений (15) и (28)–(31) вытекает, что

(32) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \boldsymbol{A}$.

Снимая допущение (19), получаем, что

(33) если $\exists y(y \in N)\exists q(q$ есть пропозициональная переменная языка $L)$ $\exists\alpha_1 \ldots \exists\alpha_y(\boldsymbol{A}$ есть $(\alpha_1 \ldots (\alpha_y q) \ldots)$ и α_i есть $\neg$ для всякого i из $\{1, \ldots, y\})$, то $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \boldsymbol{A}$.

(34) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \boldsymbol{A}$ (из (4), (18) и (33)).

Снимая допущение (3), получаем, что

(35) если $\boldsymbol{A}$ есть квазиэлементарная формула, то $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \boldsymbol{A}$.

(36) $\boldsymbol{A}$ не есть квазиэлементарная формула (допущение).

Нам потребуется следующая подлемма 3.

Подлемма 3. Для всякой формулы A: если A не есть квазиэлементарная формула, то $\neg\neg A \supset A$ есть формула, доказуемая в $HI_{<\omega,\omega>}$.

В свете Утверждения ясно, что для доказательства подлеммы 3 достаточно доказать, что для произвольной формулы A, не являющейся квазиэлементарной формулой, секвенция $\neg\neg A \to A$ доказуема в $GI_{<\omega,\omega>}$.

Построим для произвольной формулы A, не являющейся квазиэлементарной формулой, доказательство в $GI_{<\omega,\omega>}$ секвенции $\neg\neg A \to A$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A}{\to A, \neg A}}{\neg\neg A \to A}}{\to \neg\neg A \supset A}$$

Итак, для произвольной формулы A, не являющейся квазиэлементарной формулой, секвенция $\neg\neg A \to A$ доказуема в $GI_{<\omega,\omega>}$.

Подлемма 3 доказана.

Опираясь на подлемму 3, определения и соглашение об использовании $\vdash_{HI_{<\omega,\omega>}}$, получаем, что

(37) $\forall A$(A есть формула) $\forall\Gamma$(Γ есть множество формул) (если A не есть квазиэлементарная формула, то $\Gamma \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A \supset A$).

(38) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \neg\neg \boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A}$ (из условий доказываемой леммы и утверждений (1), (36) и (37)).

Разумеется, что (39) $\boldsymbol{A}$ и $\neg\neg\boldsymbol{A}$ являются формулами, а M есть множество формул.

Из утверждений (2), (15), (38) и (39) вытекает, что

(40) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \boldsymbol{A}$.

Снимая допущение (36), получаем, что

(41) если $\boldsymbol{A}$ не есть квазиэлементарная формула, то $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \boldsymbol{A}$.

(42) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \boldsymbol{A}$ (из (35) и (41)).

Снимая допущения (1) и (2) и обобщая, получаем, что

(43) для всякой формулы A: если $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A$, то $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} A$.

Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Пусть M есть замкнутое относительно Sub_L множество формул. Для всякой формулы A: если $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A$, то $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} A$.*

Докажем лемму 9.

(1) $\boldsymbol{A}$ есть формула (допущение).

(2) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg\boldsymbol{A}$ (допущение).

Разумеется, что (3) $\neg\neg\boldsymbol{A}$ есть формула, а M есть множество формул.

(4) Если $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg\boldsymbol{A}$, то $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \neg\neg\boldsymbol{A}$ (из (3) и леммы 7).

(5) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \neg\neg\boldsymbol{A}$ (из (2) и (4)).

(6) Если $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \neg\neg\boldsymbol{A}$, то $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \boldsymbol{A}$ (из условия доказываемой леммы, утверждения (1) и леммы 8).

(7) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \boldsymbol{A}$ (из (5) и (6)).

Снимая допущения (1) и (2) и обобщая, получаем, что для всякой формулы A: если $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A$, то $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} A$.

Лемма 9 доказана.

Ясно, что из лемм 6 и 9 вытекает следующая теорема 1.

Теорема 1. *Пусть M есть замкнутое относительно Sub_L множество формул. Для всякой формулы A: $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} A$ тогда и только тогда, когда $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A$.*

Условимся, что для всяких X и Y, являющихся множествами формул, $X \oplus Y$ есть наименьшее множество формул, в которое включаются множества X и Y и которое замкнуто относительно MP_L и Sub_L. Условимся также, что $\mathbf{P}$ есть множество всех формул вида $((A \supset B) \supset A) \supset A$, где A и B являются формулами. Иначе говоря, условимся, что $\mathbf{P}$ есть множество всех законов Пирса в языке L.

Лемма 10. *Для всякой L-логики $\boldsymbol{L}$ и для всякой формулы A: $\boldsymbol{L} \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} A$ тогда и только тогда, когда $A \in \boldsymbol{L} \oplus \boldsymbol{P}$.*

Лемма 11. *Для всякой L-логики $\boldsymbol{L}$, включающей $Int_{<\omega,\omega>}$, и для всякой формулы A: $\boldsymbol{L} \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} A$ тогда и только тогда, когда $A \in \boldsymbol{L}$.*

Лемма 12. $Int_{<0,0>} \oplus \boldsymbol{P} = I_{<0,0>}$.

Проведенные автором доказательства лемм 10, 11 и 12 стандартны и здесь не приводятся (заметим только, что доказательство леммы 11 построено с использованием леммы 3).

Теорема 2 (обобщенная теорема Гливенко). *Для всякой L-логики $\boldsymbol{L}$, включающей $Int_{<\omega,\omega>}$, и для всякой формулы A: $A \in \boldsymbol{L} \oplus \boldsymbol{P}$ тогда и только тогда, когда $\neg\neg A \in \boldsymbol{L}$.*

Докажем теорему 2.

(1) $\mathbf{L}_0$ есть L-логика и $Int_{<\omega,\omega>} \subseteq \mathbf{L}_0$ (допущение).

(2) A_0 есть формула (допущение).

В свете утверждения (1) ясно, что (3) $\mathbf{L}_0$ есть замкнутое относительно Sub_L множество формул.

(4) Для всякой формулы A: $\mathbf{L}_0 \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} A$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{L}_0 \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A$ (из (3), по теореме 1).

(5) Для всякой формулы A: $\mathbf{L}_0 \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} A$ тогда и только тогда, когда $A \in \mathbf{L} \oplus \mathbf{P}$ (из (1), по лемме 10).

(6) Для всякой формулы A: $\mathbf{L}_0 \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} A$ тогда и только тогда, когда $A \in \mathbf{L}_0$ (из (1), по лемме 11).

(7) $\mathbf{L}_0 \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} A_0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{L}_0 \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A_0$ (из (1) и (4)).

(8) $\mathbf{L}_0 \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} A_0$ тогда и только тогда, когда $A_0 \in \mathbf{L}_0 \oplus \mathbf{P}$ (из (1) и (5)).

(9) $\neg\neg A_0$ есть формула (из (1), по определению формулы).

(10) $\mathbf{L}_0 \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A_0$ тогда и только тогда, когда $\neg\neg A_0 \in \mathbf{L}_0$ (из (6) и (9)).

(11) $A_0 \in \mathbf{L}_0 \oplus \mathbf{P}$ тогда и только тогда, когда $\neg\neg A_0 \in \mathbf{L}_0$ (из (7), (8) и (10)).

Снимая допущения (1) и (2) и обобщая, получаем, что для всякой L-логики $\mathbf{L}$, включающей $Int_{<\omega,\omega>}$, и для всякой формулы A: $A \in \mathbf{L} \oplus \mathbf{P}$ тогда и только тогда, когда $\neg\neg A \in \mathbf{L}$.

Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 и того, что $Int_{<0,0>}$ есть L-логика, включающая $Int_{<\omega,\omega>}$, вытекает утверждение, которое называем стандартизированной формой теоремы Гливенко.

Стандартизированная форма теоремы Гливенко утверждает, что для всякой формулы A: $A \in Int_{<0,0>} \oplus \mathbf{P}$ тогда и только тогда, когда $\neg\neg A \in Int_{<0,0>}$.

Теорема Гливенко из [4], переформулированная в терминологии, используемой в настоящей работе, гласит, что для всякой формулы A : $A \in I_{<0,0>}$ тогда и только тогда, когда $\neg\neg A \in Int_{<0,0>}$.

Очевидно, что в силу леммы 12 теорема Гливенко эквивалентна стандартизированной форме этой теоремы.

Обобщенная теорема Гливенко открывает широкие возможности для построения аналогов утверждения, являющегося стандартизированной формой теоремы Гливенко. Действительно, какую бы L-логику $\mathbf{L}$, включающую $Int_{<\omega,\omega>}$, мы ни взяли, утверждение «Для всякой формулы A : $A \in \mathbf{L} \oplus \mathbf{P}$ тогда и только тогда, когда $\neg\neg A \in \mathbf{L}$» служит аналогом утверждения, являющегося стандартизированной формой теоремы Гливенко.

Назовем гливенковской логикой L-логику $\mathbf{L}$, для которой верно, что для всякой формулы A : $A \in \mathbf{L} \oplus \mathbf{P}$ тогда и только тогда, когда $\neg\neg A \in \mathbf{L}$.

Следуя традиции, называем суперинтуиционистской логикой L-логику, включающую $Int_{<0,0>}$.

Назовем подинтуиционистской логикой L-логику, включающуюся в $Int_{<0,0>}$.

Широко известна доказанная В.А. Янковым в [3] теорема о континуальности множества всех суперинтуиционистских логик. Можно доказать, что континуально множество всех подинтуиционистских логик, каждая из которых включает $Int_{<\omega,\omega>}$.

Опираясь на эти «мощностные» результаты и обобщенную теорему Гливенко, приходим к следующим выводам:

(1) всякая L-логика из континуального множества всех L-логик, включающих $Int_{<0,0>}$, является гливенковской логикой,

(2) всякая L-логика из континуального множества всех подинтуиционистских логик, включающих $Int_{<\omega,\omega>}$, является гливенковской логикой.

Замечание: для всяких x и y из $\{0, 1, 2, \ldots, \omega\}$ $Int_{<x,y>}$ является подинтуиционистской логикой, включающей $Int_{<\omega,\omega>}$. Из этого замечания и сделанного выше вывода (2) вытекает, что для всяких x и y из $\{0, 1, 2, \ldots \omega\}$ $Int_{<x,y>}$ есть гливенковская логика.

Литература

[1] *Генцен Г.* Исследования логических выводов // Математическая теория логического вывода. М., 1967. С. 9–74.

[2] *Смирнов В.А.* Формальный вывод и логические исчисления // Смирнов В.А. Теория логического вывода. М., 1999. С. 16–233.

[3] *Янков В.А.* Построение последовательности сильно независимых суперинтуиционистских пропозициональных исчислений // Докл. АН СССР. М., 1968, Т. 181, № 1. С. 33–34.

[4] *Glivenko V.* Sur quelques points de la Logique de M. Brouwer // Bull. Acad. Royale de Belgique. Bull. de la classes des sciences. 1929. T. 15. Ser. 5. P. 183–188.

[5] *Popov V.M.* Between $Int_{<\omega,\omega>}$ and intuitionistic propositional logic // Logical investigations. M., 2013, Vol. 19. P. 197–199.

V.M. Popov

On a Generalization of Glivenko's Theorem

Popov Vladimir Mikhailovich
Department of Logic, Faculty of Philosophy, Lomonosov Moscow State University.
Lomonosovsky prospekt, 27-4, GSP-1, Moscow, 119991, Russian Federation.
e-mail: `pphiloslog@mail.ru`

We offer a generalization of the well-known Glivenko's theorem on double-negation translation. In "Sur quelques points de la Logique de M. Brouwer" V.I. Glivenko got a result, which is now called Glivenko's theorem and which establishes the equivalence between a statement that a formula belongs to classical propositional logic and a statement that a double-negation of this formula belongs to intuitionistic propositional logic. Glivenko's theorem is an important achievement in the field of research concerning links between logics conducted using the embedding operation. Here we propose a generalization of Glivenko's theorem and describe a method which is based on this generalization for constructing analogues of the statements that is some special form of Glivenko's theorem. In this paper we used author's original sublogics of classical propositional logic. In particular, logic $Int_{<\omega,\omega>}$ played a principal role (it is, also, a sublogic of intuitionistic porpositional logic). The use of this logic made it possible to give such a generalization of Glivenko's theorem that covers some extensive (cardinality of the continuum) class of sublogics of intuitionistic propositional logic.

Keywords: Glivenko's theorem, classical propositional logic, intuitionistic propositional logic, language L, L-logic, calculus $HInt_{<\omega,\omega>}$, L-logic $Int_{<\omega,\omega>}$, calculus $GInt_{<\omega,\omega>}$, Glivenko's type logic

References

[1] *Gencen, G.* "Issledovanija logicheskih vyvodov" [Investigations of logical inferences], *Matematicheskaja teorija logicheskogo vyvoda* [The mathematical theory of logical inference]. Moscow, 1967, pp. 9–74. (In Russian)

[2] *Smirnov, V.A.* "Formal'nyj vyvod i logicheskie ischislenija" [Formal inference and logical calculuses], in: Smirnov V.A., *Teorija logicheskogo vyvoda* [Theory of logical inference]. M., 1999, pp. 16–233. (In Russian)

[3] *Jankov, V.A* "Postroenie posledovatel'nosti sil'no nezavisimyh superintuicionistskih propozicional'nyh ischislenij" [Building of sequence of strongly independent superintuitionistic propositional calculuses], Dokl. AN SSSR [Report AS USSR]. Moscow, 1968, Vol. 181, no 1, pp. 33–34. (In Russian)

[4] *Glivenko, V.* "Sur quelques points de la Logique de M. Brouwer", *Académie Royale de Belgique, Bulletin de la classe des sciences*, 1929, vol. 15, no. 5, pp. 183–188.

[5] *Popov, V.M.* "Between $Int_{<\omega,\omega>}$ and intuitionistic propositional logic", *Logical investigations*. Moscow, 2013, vol. 19, pp. 197–199.

УДК 164.3 + 510.643

А.С. Карпенко

Решетки четырехзначных модальных логик

Карпенко Александр Степанович
Сектор логики, Институт философии РАН.
119991, Россия, Москва, ул. Волхонка, 14, строение 5.
e-mail: as.karpenko@gmail.com

В статье рассматриваются четыре решетки четырехзначных модальных логик. В основе построения лежат различные алгебраические структуры, которые затем последовательно расширяются эндоморфизмами и константными функциями. В первом случае строится решетка расширений булевой алгебры B^2, затем строится решетка расширений алгебры Де Моргана $DM4$. В обоих случаях возникают различные модальные логики, свойства которых описываются и сравниваются между собой. Отдельно рассматривается решетка, где появляется тетравалентная модальная логика **TML**. Наконец, первые две решетки «объединяются» и вычленяется класс основных модальных четырехзначных логик, состоящий из **Ł**-модальной системы Лукасевича, логики Собочиньского **V2** и логики истины фон Вригта **T**$''$. Особого внимания заслуживает логика **Tr**, которая функционально эквивалентна логике **V2**, и занимает центральное место в последней решетке. Она единственная из всех рассмотренных четырехзначных модальных логик, которая обладает интерполяционным свойством Крейга, и кроме того, является прекрасным кандидатом на роль пропозициональной логики истины. В заключение в статье представлена ее аксиоматизация.

Keywords: модальные логики, решетки логик, булева алгебра, алгебра Де Моргана, эндоморфизмы, замкнутые классы функций, булевы каскады, логика **Tr**

1 Введение

Я. Лукасевич в середине прошлого века сделал следующее заявление: «Я стою на той точке зрения, что в любой модальной логике должно быть сохранено классическое исчисление предложений. До сих пор это исчисление продемонстрировало свою надежность и полезность, и оно не должно быть отвергнуто без достаточно веских оснований» [2, с. 233]. В результате, Лукасевич отказывается от своей знаменитой трехзначной логики $\mathbf{Ł}_3$ и ее модального варианта и строит четырехзначную **Ł**-модальную систему [23][1], к которой мы еще вернемся.

Однако на самом деле все началось с классической книги К. Льюиса и К. Лэнгфорда [22], где определяются и исследуются модальные системы **S**1–**S**5, используя главным образом 4-значные матрицы. Здесь

[1] О философских основаниях этих логик и их модальных свойствах см. [8].

было выделено пять групп четырехзначных матриц, которые различались лишь определением оператора необходимости $\Box$, в то время как немодальная часть представляет собой не что иное, как четырехзначную классическую логику $\mathbf{C}_4$.

2 Четырехзначная классическая логика $\mathbf{C}_4$

Пусть $\mathfrak{M}_4^C$ есть четырехзначная логическая матрица

$$< M, \rightarrow, \vee, \wedge, \neg, \{1\} >,$$

где $M = \{1, a, b, 0\}$. Эта матрица получена посредством прямого произведения матрицы $\mathfrak{M}_2^C$ (для классической пропозициональной логики $\mathbf{C}_2$) саму на себя, т.е. $\mathfrak{M}_4^C = \mathfrak{M}_2^C \times \mathfrak{M}_2^C$, где матричные операции $\neg, \rightarrow, \vee, \wedge$ определяются следующим образом:

x	$\neg x$
1	0
a	b
b	a
0	1

$\rightarrow$	1	a	b	0
1	1	a	b	0
a	1	1	b	b
b	1	a	1	a
0	1	1	1	1

$\vee$	1	a	b	0
1	1	1	1	1
a	1	a	1	a
b	1	1	b	b
0	1	a	b	0

$\wedge$	1	a	b	0
1	1	a	b	0
a	a	a	0	0
b	b	0	b	0
0	0	0	0	0

Обратим внимание, что здесь M — частично упорядоченное множество: $0 < b$, $a < 1$ (то есть b и a несравнимы).

Хорошо известно, что матрица $\mathfrak{M}_4^C$ является характеристической для $\mathbf{C}_2$. Логику с соответствующими логическими связками обозначим посредством $\mathbf{C}_4$. Ее алгебраическим эквивалентом является четырехэлементная булева алгебра $B^2 = B \times B$ (B — двухэлементная булева алгебра).

3 Эндоморфизмы

Заметим, что имеется всего 256 унарных четырехзначных операторов, которыми можно расширить $\mathbf{C}_4$. Было бы желательно иметь какой-то критерий для их выбора с целью построения наиболее интересных модальных четырехзначных логик. В 1966 г. Э. Леммон (см. [10]) выделяет 15 унарных операторов, которые добавляются к $\mathbf{C}_4$. Все эти 15 групп матриц называются регулярными, поскольку они верифицируют модальную аксиому **K**: $\Box(\varphi \supset \psi) \supset (\Box\varphi \supset \Box\psi)$[2].

Однако имеется одно очень важное и весьма эффективное ограничение на выбор этих операторов, предложенное в работе Н.М. Ермолаевой и А.А. Мучника [7]. Еще в статье [6, с. 229] они обратили внимание на то, что модальные операторы, а также временные операторы в ряде модальных (временных) логик и соответствующих алгебр выражаются с помощью эндоморфизмов в дистрибутивных решетках.

Фундаментальную роль в дальнейшем будут играть одноместные функции g, e_1 и e_2, задаваемые таблично:

x	$g(x)$	$e_1(x)$	$e_2(x)$
1	1	1	1
a	b	0	1
b	a	1	0
0	0	0	0

В булевой алгебре B^2 эти функции являются эндоморфизмами:

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y), f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y),$$

$$f(\neg x) = \neg f(x), f(1) = 1, f(0) = 0, f(x^\sigma) = (f(x))^\sigma,$$ [3]

где f может быть любой из функций g, e_1 и e_2. В [7] отмечается, что вместе с $e_0(x) = x$ (тождественной функцией) g, e_1 и e_2 образуют моноид Q всех эндоморфизмов B^2. Если наряду с эндоморфизмами взять также константные функции $a(x) = a$, $b(x) = b$, $1(x)$ и $0(x) = 0$, то вместе с g, e_1 и e_2 они образуют моноид P всех эндоморфизмов B^2 как дистрибутивной решетки, которые могут не сохранять 0 и 1.

Основной результат статьи [7] состоит в описании всех функционально замкнутых классов на M, т.е. функций из P_4 (P_4 есть класс всех

---

[2] В этой работе Леммон также описывает двухэлементные модели Крипке для всех 15 четырехзначных модальных логик, являющихся расширением $\mathbf{C}_4$ (с. 121).

[3]
$$x^\sigma = \begin{cases} x, \text{при } \sigma = 1 \\ \neg x, \text{при } \sigma = 0. \end{cases}$$

четырехзначных функций логики Поста [6]), содержащих булевы функции $\vee$, $\wedge$ и $\neg$. Приводится решетка этих классов и для минимальных расширений определены соответствующие четырехзначные модальные логики[4].

4 Решетка расширений булевой алгебры B^2

Обозначим через $(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ функционально замкнутый класс, порождаемый функциями $(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ из P_4 и положим

$$B^2 = (\vee, \wedge, \neg); \quad P_g = (\vee, \wedge, \neg, g); \quad P_1 = (\vee, \wedge, \neg, e_1);$$

$$P_2 = (\vee, \wedge, \neg, e_2); \quad P_{ab} = (\vee, \wedge, \neg, a) = (\vee, \wedge, \neg, b);$$

$$P_{ab1} = (\vee, \wedge, \neg, e_1, a, b); \quad P_{ab2} = (\vee, \wedge, \neg, e_2, a, b);$$

$$P_{12} = (\vee, \wedge, \neg, e_1, e_2) = T_{01}.$$

В [7] доказано, что $P_4 = (\vee, \wedge, \neg, e_1, e_2, a, b)$ и что все замкнутые (функционально) расширения B^2 выписаны выше. Решетка этих классов указана на рис. 1 (см. [7, с. 301]):

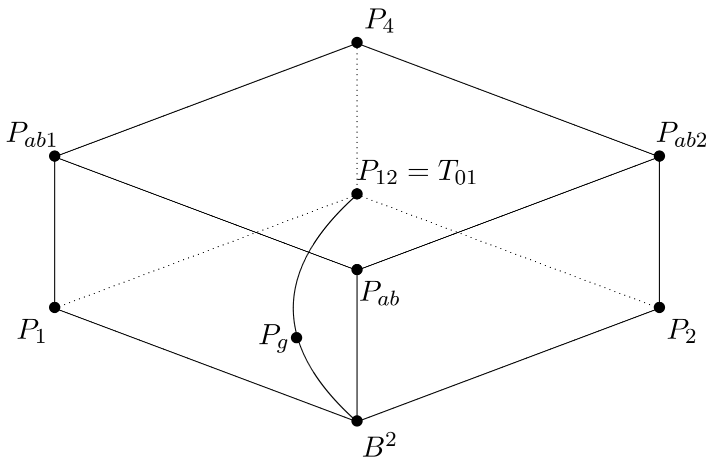

Рис. 1.

[4]В связи с построением решеток замкнутых (функционально) классов конечнозначных функций обратим внимание на работу Н.Е. Томовой [4], где строится изящная семиэлементная решетка расширений трехзначной слабой логики Клини «естественными» импликациями. См. также [5].

Обратим внимание на то, что все минимальные расширения B^2 — P_g, P_1, P_2, P_{ab} (логики первого уровня) функционально эквивалентны модальным логикам: P_g — логике Собочиньского **V2**, P_1 и P_2 — логике Собочиньского **K4**, которую, чтобы отличить от льюисовской модальной системы **K4**, будем обозначать посредством **K4(S)**, и P_{ab} — **Ł**-модальной системе Лукасевича, упомянутой нами выше. Рассмотрим эти модальные логики по отдельности, а затем определимся с системой P_{12}.

Модальная логика Собочиньского **V2** есть расширение **S5** посредством формулы:

$$\Box\varphi \vee \Box(\phi \to \psi) \vee \Box(\varphi \to \neg\psi) \text{ [25, с. 305]},$$

где модальный оператор $\Box$ определяется следующим образом:

$$\Box 1 = 1; \Box a = \Box b = \Box 0 = 0.$$

Модальный оператор с такими свойствами назовем «стандартным». Характеристической матрицей для **V2** со связками $\to$, $\neg$ и $\Box$ как раз является матрица «группы III» из [22, с. 493].

Модальная логика Собочиньского **K4(S)** [26] есть расширение **S4.4** посредством формулы $\Box(\Box\Diamond\varphi \to \Diamond\Box\psi)$, где **S4.4** есть **S4** $+ \Box(\varphi \to (\Diamond\Box\varphi \to \Box\varphi))$, и модальный оператор $\Box$ определяется следующим образом:

$$\Box 1 = 1; \Box a = 0; \Box b = b; \Box 0 = 0.$$

В [27] было доказано, что матрица со связками $\to$, $\neg$ и $\Box$ (матрица «группы II» из [22, с. 493]) является характеристической для модальной логики **K4(S)**.

Общепринятая аксиоматизация **Ł**-модальной системы Лукасевича представлена в [1, с. 160]:

1. Классическая пропозициональная логика $\mathbf{C}_2$.
2. $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$,
3. $\Box\varphi \to \varphi$,
4. $\Box\varphi \to (\psi \to \Box\psi)$,

где оператор $\Box$ определяется следующим образом:

$$\Box 1 = \Box a = a; \Box b = \Box 0 = 0.$$

Во всех рассмотренных системах два правила вывода: *modus ponens* и правило Гёделя.

Интересна проблема аксиоматизации непосредственно систем $P_g = (\vee, \wedge, \neg, g)$, $P_1 = (\vee, \wedge, \neg, e_1)$, $P_2 = (\vee, \wedge, \neg, e_2)$ и $P_{ab} = (\vee, \wedge, \neg, a) = (\vee, \wedge, \neg, b)$. К решению это проблемы для P_g вернемся в конце статьи.

Рассмотрим теперь логики второго уровня: P_{ab1}, P_{ab2} и P_{12}. Две логики, являющиеся соответственно расширением **Ł**-модальной системы Лукасевича эндоморфизмами e_1 и e_2, появляются впервые.

Относительно P_{12} в [7] лишь указывается, что этот класс функций соответствует предполному[5] в P_4 классу функций T_{01}, сохраняющих $\{1, 0\}$ (см. [6]). Показано, что класс T_{01} порождается базисом $\{\vee, \wedge, \neg, e_1, e_2\}$, а также $\{\vee, \wedge, \neg, g, e_k\}(k = 1, 2)$, то есть равен P_{12}.[6] Однако заметим, что из теоремы В.К. Финна [3] о функциональных свойствах многозначных логик Лукасевича $\mathbf{Ł}_n$ следует, что $\mathbf{Ł}_4$ по своим функциональным свойствам соответствует классу Яблонского T_{01}. Таким образом, расширение P_{12} функционально эквивалентно четырехзначной логике Лукасевича $\mathbf{Ł}_4$.

Все эти рассуждения опирается на довольно-таки громоздкие результаты. Более непосредственно это выглядит следующим образом. Пусть $0 < b < a < 1$, то есть M линейно упорядочено. Покажем что классы $\{\vee, \wedge, \neg, e_1, e_2\}$ и $\{\cup, \cap, \neg, J_1, J_a, J_b, J_0\}$ функционально эквивалентны, где $x \cup y = max(x, y)$, $x \cap y = min(x, y)$ и J_i-функции выразимы в P_{12} следующим образом:

$$J_1(x) = e_1(x) \wedge e_2(x),$$

$$J_a(x) = \neg e_1(x) \wedge e_2(x),$$

$$J_b(x) = e_1(x) \wedge \neg e_2(x),$$

$$J_0(x) = \neg e_1(x) \wedge \neg e_2(x).$$

Теперь, используя J_i-функции, можно выразить $x \cup y$:

$$x \cup y = (x \wedge y) \vee (J_0(x) \wedge y) \vee (x \wedge J_0(y)) \vee (J_b(x) \wedge y) \vee (x \wedge J_b(y)) \vee J_1(x) \vee J_1(y),$$

$$x \cap y = \neg(\neg x \cup \neg y).$$

---

[5]Система F функций называется *предполной* в P_n, если F представляет не полную систему, но добавление к F любой функции f такой, что $f \in P_n$ и $f \notin F$ преобразует F в полную систему. Подробно о функциональных свойствах конечнозначныхлогик см. [9, гл. 7].

[6]Это также означает, что «дуга» на рис. 1 от B^2 к P_{12} правильно показывает, что класс P_{12} содержит эндоморфизм g.

Таким образом, классы $\{\vee, \wedge, \neg, e_1, e_2\}$ и $\{\cup, \cap, \neg, J_1, J_a, J_b, J_0\}$ функционально эквивалентны. Остается только заметить, что класс $\{\cup, \cap, \neg, J_1, J_a, J_b, J_0\}$ является базисом для четырехзначной логики Лукасевича $\mathbf{Ł}_4$ (см. [9, с. 125]).

Что касается самого класса P_4, то его функциональная полнота следует из того, что, как уже говорилось, класс T_{01} предполон в P_4, и этот класс обладает свойством *сохранения* 0 и 1. Поэтому добавление к этому классу функций a или b, не обладающих этим свойством, обеспечивает функциональную полноту P_4.

5 Четырехзначная логика Белнапа $\mathbf{B}_4$

В [1] и [2] Н. Белнапом была предложена «полезная четырехзначная логика»(будем обозначать ее посредством $\mathbf{B}_4$), которая со временем вызвала необычайный интерес, особенно среди специалистов в области информатики и искусственного интеллекта. Логическими связками $\mathbf{B}_4$ являются $\vee$, $\wedge$ и $\sim$, где отрицание $\sim$ определяется следующим образом: $\sim 1 = 0$; $\sim a = a$; $\sim b = b$; $\sim 0 = 1$.

Алгебры, соответствующие логике Белнапа $\mathbf{B}_4$, стали называться решетками Де Моргана[7] и обозначаться посредством $DM4$. Тщательному изучению $\mathbf{B}_4$ посвящена статья [8], где представлено элегантное секвенциальное исчисление для $\mathbf{B}_4$, его взаимоотношение с подобными исчислениями для трехзначной логики Клини $\mathbf{K}_3$ и для классической логики $\mathbf{C}_2$. Главный результат заключается в следующем: *класс решеток Де Моргана является алгебраическим примером* $\mathbf{B}_4$; точно так же, как класс булевых алгебр является алгебраическим примером $\mathbf{C}_2$.[8]

Четырехзначная логика Белнапа $\mathbf{B}_4$ оказалась очень полезной в качестве базиса для других логик. Особенно интересны ее расширения стандартным модальным оператором $\Box$ (см. выше логику **V2**) и связкой импликации[9]. Однако вначале опишем функционально замкнутые классы на M, содержащие функции $\vee$, $\wedge$ и $\sim$, и рассмотрим расширения решетки Де Моргана $DM4$.

[7] Решеткой Де Моргана называется дистрибутивная решетка $< A, \vee, \wedge >$ с операцией $\sim$, причем $\sim (\mathrm{x} \vee \mathrm{y}) = \sim x \wedge \sim y$; $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$; $\sim\sim x = x$. Операция $\sim$ называется *отрицанием Де Моргана*. Решетка Де Моргана с 1 и 0 называется алгеброй Де Моргана, причем $a \vee b = 1$; $a \wedge b = 0$.

[8] См. также [24].

[9] См. четырехзначную логику В.М. Попова **Par** [3], которая представляет собой расширение $\mathbf{B}_4$ соответствующей импликацией. Здесь дается секвенциальная и гильбертовская аксиоматизация **Par**. В [24] исследуется алгебраический эквивалент логики **Par**, который называется «импликативной алгеброй Де Моргана».

6 Решетка расширений DM4

Как и ранее, обозначим через $(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ функционально замкнутый класс, порождаемый функциями $f_1, f_2, \ldots, f_k$ из P_4 и положим:

$$DM4 = (\vee, \wedge, \sim); \quad P_g = (\vee, \wedge, \sim, g);$$

$$P_{e_1e_2} = (\vee, \wedge, \sim, e_1) = (\vee, \wedge, \sim, e_2) = P_{\oplus};$$

$$P_a = (\vee, \wedge, \sim, a); \quad P_b = (\vee, \wedge, \sim, b);$$

$$P_{\oplus a} = (\vee, \wedge, \sim, e_1, e_2, a); \quad P_{\oplus b} = (\vee, \wedge, \sim, e_1, e_2, b);$$

$$P'_{ab} = (\vee, \wedge, \sim, a, b)^{10}.$$

Покажем, что $(\vee, \wedge, \sim, e_1, e_2, a, b) = (\vee, \wedge, \neg, e_1, e_2, a, b) = P_4$:

$$g(x) = (b \wedge e_1(x)) \vee (a \wedge e_2(x)) \text{ (см. [7, с. 302])},$$

$$\neg(x) = g \sim (x).$$

Решетка выписанных выше классов указана на рис. 2:

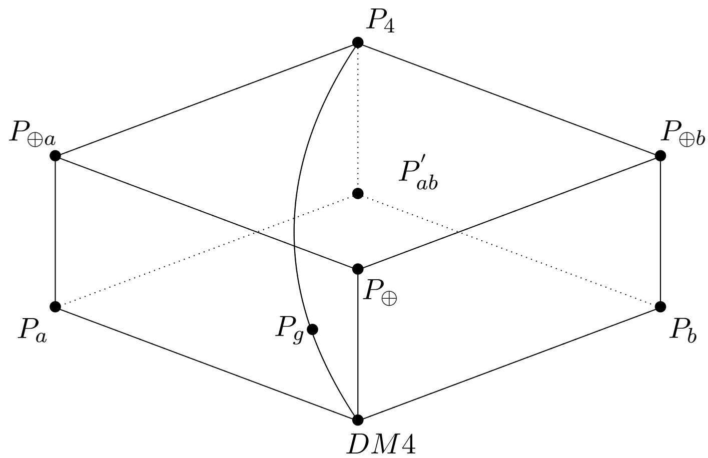

Рис. 2.

Вначале покажем, что логики со связками $(\vee, \wedge, \neg, g)$ и $(\vee, \wedge, \sim, g)$ функционально эквивалентны:

$$\neg(x) = g \sim (x) \text{ и } \sim(x) = g\neg(x).$$

[10]Здесь P'_{ab}, чтобы отличить ее от P_{ab} на рис. 1.

Поэтому имеем P_g как в решетке на рис. 1, так и в решетке на рис. 2. В дальнейшем логику со связками $(\vee, \wedge, \neg, g)$ будем обозначать посредством **Tr**.

В этой решетке особый интерес представляет логика со связками $(\vee, \wedge, \sim, e_1, e_2)$, которая есть не что иное как *логика истины* Г. фон Вригта [4], обозначаемая посредством $\mathbf{T''LM}$ (в дальнейшем $\mathbf{T''}$). Подробно об ее свойствах и аксиоматизации см. в [21]. Заметим только, что в ней эндоморфизмы e_1 и e_2 взаимовыразимы:

$$e_1(x) =: \sim (e_2(\sim x)) \text{ и } e_2(x) =: \sim (e_1(\sim x)).$$

7 Тетравалентная модальная логика TML

В приведенной выше решетке не нашлось места для модальной логики **TML**, которая привлекла к себе большое внимание, особенно со стороны алгебраистов. Строится она аналогично тому, как была получена модальная логика **V2**. В первом случае, булева алгебра расширяется стандартным модальным оператором $\Box$, а во втором — этим же оператором расширяется алгебра Де Моргана.

Впервые логика $\mathbf{B}_4$, расширенная этим модальным оператором, изучалась в [5], где был также представлен ее алгебраический эквивалент с теоремой представления. Здесь отмечается, что алгебра подобной логики возникла еще при первоначальной попытке Г. Мойсила найти короткую систему аксиом для трехэлементных алгебр Лукасевича.

Специально изучению такой логики под названием **TML** (*tetravalent modal logic*) и их алгебрам (TMA) посвящена обстоятельная статья [9] (см. также [7]). Здесь отмечается, что TMA первоначально изучались А. Монтейро при исследовании трехэлементных алгебр Лукасевича.

В [9] приводится изящная аксиоматизация TMA, к аксиомам алгебры Де Моргана добавляются следующие две аксиомы:

(TM1) $\Box x \wedge \sim x = 0$,

(TM2) $\sim \Box x \wedge x = \sim x \wedge x$.

Здесь же представлено секвенциальное исчисление логики **TML** (с. 496).

Заметим, что логики **Tr** и $\mathbf{T''}$ являются расширением **TML**, т.е. через операции **Tr** (через операции $\mathbf{T''}$) выразим модальный оператор $\Box$. Покажем это:

1) $\Box x = x \wedge g(x)$,

2) $\Box x = e_1(x) \wedge e_2(x)$.

Теперь мы можем представить еще одну решетку расширений $DM4$, используя на этот раз только эндоморфизмы и модальный оператор $\Box x$:

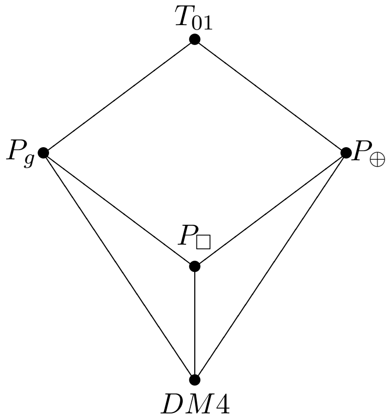

Рис. 3.

Здесь класс $P_{\Box}$ есть $(\vee, \wedge, \sim, \Box)$, который в точности соответствует логическим операциям логики **TML**.

8 Основная решетка четырехзначных модальных логик

Наша задача — по возможности объединить в единую решетку логики, представленные классами функций на рис. 1 и на рис. 2. Пусть D есть дистрибутивная решетка $D = (\vee, \wedge)$, которая на рис. 4 расширяется слева операциями $\neg$ и a, b, а справа операциями $\sim$ и e_1, e_2:

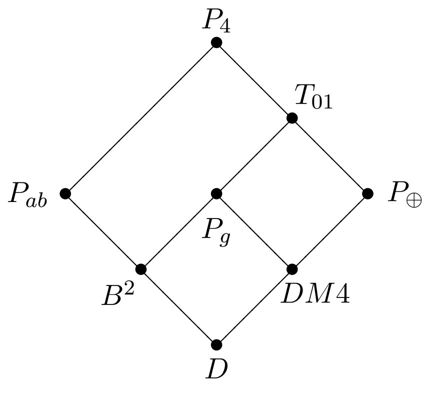

Рис. 4.

Обратим внимание на центральный ряд — это расширения P_{ab}, P_g и $P_{\oplus}$, которые функционально эквивалентны следующим модальным логикам: **Ł**-модальной системе Лукасевича, логике **Tr** и логике фон Вригта **T**$''$. Эти модальные логики назовем фундаментальными. Особое место здесь по праву занимает логика **Tr**.

9 Булева склейка

Однако имеется более естественный путь объединения этих двух решеток в одну. Обратим внимание на то, что при пересечении классов функций обеих решеток совпадают только два класса — P_4 и P_g. Таким образом, объединение двух решеток происходит следующим образом: вершина решетки на рис. 2 «склеивается» с вершиной решетки на рис. 1, то есть «склеиваются» два класса P_4, а класс P_g является тем «стержнем», который связывает обе решетки. В итоге имеем 16-ти элементную решетку, которая является результатом «склейки» двух 8-ми элементных булевых решеток. Полученная решетка заслуживает специального исследования, что может послужить основанием для введения нового класса алгебраических структур.

В связи с этим обратим внимание на алгебраические структуры под названием «булевы каскады», введенные Л. Эсакиа в [16]. Булев каскад — это алгебра Гейтинга, изоморфная каскадному соединению булевых решеток. В этом соединении наибольший элемент предшествующей булевой решетки B_i является наименьшим элементом последующей булевой решетки B_{i+1}. Булевы каскады являются алгебраическими моделями интуиционистской логики **H**, в которой верен слабый закон Пирса **wP**, то есть формула

$$(q \Rightarrow p) \vee [((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p].$$

В [8] представлено два примера булевых каскадов (соединение двух 8-ми элементных булевых решеток), элементами каждого из которых являются импликативные логики.

В связи с вышесказанным возникает вопрос об алгебраической структуре нашей булевой «склейки», и алгебраическим примером какой логики эта «склейка» является?

10 Модальная логика Tr

Особенность логики **Tr** уже в том, что она единственная из всех рассмотренных четырехзначных логик, которая обладает интерполяционным свойством Крейга. Кроме того, она является прекрасным кандидатом на роль пропозициональной логики истины. Все эти вопросы мы рассмотрим в следующей статье, а здесь представим аксиоматизацию **Tr**, где модальный оператор $\Box$ есть эндоморфизм g:

1. Классическая пропозициональная логика $\mathbf{C}_2$.
2. $\Box(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\Box\varphi \to \Box\psi)$.
3. $\neg\Box\varphi \leftrightarrow \Box\neg\varphi$.
4. $\Box\Box\varphi \leftrightarrow \varphi$.

Правила вывода: *modus ponens* и правило Гёделя.

Доказательство полноты логики **Tr** по Крипке, а также доказательство алгебраической полноты будут представлены в следующей статье.

Литература

[1] *Белнап Н.* Как нужно рассуждать компьютеру // *Белнап Н., Стил Т.* Логика вопросов и ответов. М.: Прогресс, 1981. С. 208–239.

[2] *Белнап Н.* Об одной полезной четырехзначной логике // *Белнап Н., Стил Т.* Логика вопросов и ответов. М.: Прогресс, 1981. С. 240–267.

[3] *Бочвар Д.А., Финн В.К.* О многозначных логиках, допускающих формализацию анализа антиномий. 1 // Исследования по математической лингвистике, математической логике и информационным языкам. М.: Наука, 1972. С. 238–295.

[4] *Вригт Г.Х., фон.* Логика истины // *Вригт Г.Х., фон.* Логико-философские исследования. Избранные труды. М.: Прогресс, 1986. С. 555–579.

[5] *Ермолаева Н.М., Мучник А.А.* Модальные расширения логических исчислений типа Хао Вана // Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам. М.: Наука, 1974. С. 172–193.

[6] *Ермолаева Н.М., Мучник А.А.* Модальные логики, определяемые эндоморфизмами дистрибутивных решеток // Исследования по теории множеств и неклассическим логикам. М.: Наука, 1976. С. 229–246.

[7] *Ермолаева Н.М., Мучник А.А.* Функционально замкнутые 4-значные расширения булевой алгебры и соответствующие логики // Исследования по неклассическим логикам и теории множеств. М.: Наука, 1979. С. 298–315.

[8] *Карпенко А.С.* Булевы каскады импликативных логик // Смирновские чтения: материалы 2-й международной научной конференции. М.: ИФРАН, 1999. С. 41–44.

[9] *Карпенко А.С.* Развитие многозначной логики. М.: Издательство ЛКИ, 2010. 448 с.

[10] *Леммон Е.* Алгебраическая семантика для модальных логик I // Семантика модальных и интенсиональных логик / Ред. В.А. Смирнов. М.: Прогресс, 1981. С. 98–124.

[11] *Леммон Е.* Алгебраическая семантика для модальных логик II // Семантика модальных и интенсиональных логик / Ред. В.А. Смирнов. М.: Прогресс, 1981. С. 125–165.

[12] *Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М.: Иностранная литература, 1959. 312 с.

[13] *Попов В.М.* Секвенциальные формулировки паранепротиворечивых логических систем // Синтаксические и семантические исследования неэкстенсиональных логик. М.: Наука, 1989. С. 285–289.

[14] *Томова Н.Е.* Импликативные расширения регулярных логик Клини // Логические исследования. 2010. Вып. 16. С. 233–258.

[15] *Томова Н.Е.* Естественные трехзначные логики: Функциональные свойства и отношения. М.: ИФРАН, 2012. 89 с.

[16] *Эсакиа Л.* Доказуемостные интерпретации интуиционистской логики // Логические исследования. 1998. Вып. 5. С. 19–24.

[17] *Яблонский С.В.* Функциональные построения в k-значной логике // Труды математического института им. В. А.Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5–142.

[18] *Coniglio M.E., Figallo M.* Hilbert-style presentation of two logics associated to tetravalent modal algebras // Studia Logica. 2014. Vol. 102(3). P. 525–539.

[19] *Font J.M.* Belnap's four-valued logic and De Morgan lattices // Logic Journal of the IGPL. 1997. Vol. 5(3). P. 413–440.

[20] *Font J.M., Rius M.* An abstract algebraic logic approach to tetravalent modal logics // The Journal of Symbolic Logic. 2000. Vol. 65(2). P. 481–518.

[21] *Karpenko A.S.* Von Wright's truth-logic and around // Logical Investigations. 2013. Vol. 19. P. 39–50.

[22] *Lewis C.I., Langford C.H.* Symbolic Logic. N.Y.: Dover Publications, 1959 (2nd ed. with corrections). 506 p.

[23] *Łukasiewicz J.* A system of modal logic // The Journal of Computing Systems. 1953. Vol. 1. P. 111–149.

[24] *Pynko A.P.* Functional completeness and axiomatizability within Belnap's four-valued logic and its expansion // Journal of Applied Non-Classical Logics. 1999. Vol. 9(1). P. 61–105.

[25] *Sobochiński B.* Modal system S4.4 // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1964. Vol. 5(4). P. 305–312.

[26] *Sobochiński B.* Family K of the non-Lewis modal systems // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1964. Vol. 5(4). P. 313–318.

[27] *Zeman J.J.* A study of some systems in the neighborhood of S4.4 // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1971. Vol. XII(3). P. 341–357.

A.S. Karpenko

Lattices of Four-valued Modal Logics

Karpenko Alexander Stepanovich
Department of Logic, Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences.
Volkhonka 14/5, Moscow, 119991, Russian Federation.
e-mail: as.karpenko@gmail.com

In this paper four lattices of four-valued modal logics are considered. Different algebraic structures are the basis for construction, then these structures are gradually extended by the endomorphisms and constant functions. In the first case, the lattice of extensions of Boolean algebra B^2 is formed, then the lattice of extensions of De Morgan algebra $DM4$ is constructed. In both cases the different modal logics appear, the properties of which are described and compared. The lattice with tetravalent modal logic **TML** is considered individually. Finally, the first two lattices are joined and the class of basic four-valued modal logics is singled out. This class consists of **Ł**-modal system of Łukasiewicz, logic **V2** of Sobochiński and von Wright's truth-logic $\mathbf{T}''$. Special attention should be paid to the logic **Tr**, which is functionally equivalent to the logic **V2** and occupies a central place in the final lattice. This logic is the only of the above-considered logics which has the Craig's interpolation property, and besides is an excellent candidate for the role of propositional logic of truth. In conclusion its axiomatization is presented.

Keywords: modal logics, lattices of logics, Boolean algebra, De Morgan algebra, endomorphismus, closed classes of functions, Boolean cascades, logic **Tr**

References

[1] Belnap, N. "Kak nuzhno rassuzhdat' komp'yuteru" [How a computer should think], in: Belnap N. i Stil T., *Logika voprosov i otvetov* [The logic of questions and answers]. Moscow: Progress, 1981, pp. 208–239. (In Russian)

[2] Belnap, N. "Ob odnoi poleznoi chetyrekhznachnoi logike" [On a useful four-valued logic], in: Belnap N. i Stil T., *Logika voprosov i otvetov* [The logic of questions and answers]. Moscow: Progress, 1981, pp. 240–267. (In Russian)

[3] Bochvar, D.A., Finn, V.K. "O mnogoznachnykh logikakh, dopuskayushchikh formalizatsiyu analiza antinomii. 1" [About many-valued logics, allowing the formalization of the analysis of antinomy. 1], in: *Issledovaniya po matematicheskoi lingvistike, matematicheskoi logike i informatsionnym yazykam* [Studies in mathematical linguistics, mathematical logic and language information]. Moscow: Nauka, 1972, pp. 238–295. (In Russian)

[4] Wright, G. H. Von. "Logika istiny" [The logic of truth], in: Wright, G. H. Von., *Logiko-filosofskie issledovaniya. Izbrannye trudy* [Logical and philosophical studies. Selected Works]. Moscow: Progress, 1986, pp. 555–579. (In Russian)

[5] Ermolaeva, N. M., Muchnik, A. A. "Modal'nye rasshireniya logicheskikh ischislenii tipa Khao Vana" [Modal extensions of logical calculus such as Wang Hao], in: *Issledovaniya po formalizovannym yazykam i neklassicheskim logikam* [Studies on the formal language and non-classical logics]. Moscow: Science, 1974, pp. 172–193. (In Russian)

[6] Ermolaeva, N. M., Muchnik, A. A. "Modal'nye logiki, opredelyaemye endomorfizmami distributivnykh reshetok" [Modal logic determined by the endomorphismus of distributive lattices], in: *Issledovaniya po teorii mnozhestv i neklassicheskim logikam* [Investigations on the theory of sets and non-classical logics]. Moscow: Science, 1976, pp. 229–246. (In Russian)

[7] Ermolaeva, N. M., Muchnik, A. A. "Funktsional'no zamknutye 4-znachnye rasshirenie bulevoi algebry i sootvetstvuyushchie logiki" [Functionally closed 4-valued extensions of Boolean algebra and the corresponding logics], in: *Issledovaniya po neklassicheskim logikam i teorii mnozhestv* [Investigations on non-classical logic and set theory]. Moscow: Science, 1979, pp. 298–315. (In Russian)

[8] Karpenko, A. S. "Bulevy kaskady implikativnykh logik" [Boolean cascades implicative logics], *Smirnovskie chteniya* [Smirnov's readings]. Proceedings of the Second International Scientific Conference. Moscow: IFRAS, 1999, pp. 41–44. (In Russian)

[9] Karpenko, A. S. *Razvitie mnogoznachnoi logiki* [The development of multi-valued logic]. Moscow: LCI Publisher, 2010. 448 pp. (In Russian)

[10] Lemmon, E. "Algebraicheskaya semantika dlya modal'nykh logik I" [Algebraic semantics for modal logics I], *Semantika modal'nykh i intensional'nykh logik* [The semantics of modal and intensional logics], ed. V. A. Smirnov. Moscow: Progress, 1981, pp. 98–124. (In Russian)

[11] Lemmon, E. "Algebraicheskaya semantika dlya modal'nykh logik II" [Algebraic semantics for modal logics II], *Semantika modal'nykh i intensional'nykh logik* [The semantics of modal and intensional logics], ed. V. A. Smirnov. Moscow: Progress, 1981, pp. 125–165.

[12] Lukasevich, Ya. *Aristotelevskaya sillogistika s tochki zreniya sovremennoi formal'noi logiki* [Aristotelian syllogistic from the poin of view of modern formal logic]. Moscow: Inostrannaya literatura, 1959, 312 pp. (In Russian)

[13] Popov, V.M. "Sekventsial'nye formulirovki paraneprotivorechivykh logicheskikh sistem" [Sequential formulations of paraconsistent logical systems], in: *Sintaksicheskie i semanticheskie issledovaniya neekstensional'nykh logik* [Syntactic and semantic research of non-extensional logics]. Moscow: Nauka, 1989, pp. 285–289. (In Russian)

[14] Tomova, N.E. "Implikativnye rasshireniya regulyarnykh logik Klini" [Implicative extensions of regular Kleene logics], *Logicheskie issledovaniya* [Logical investigations], 2010, vol. 16, pp. 233–258. (In Russian)

[15] Tomova, N.E. *Estestvennye trekhznachnye logiki: Funktsional'nye svoistva i otnosheniya* [Natural three-valued logics: functional properties and relations], Moscow: IFRAN Publ, 2012, 89 pp. (In Russian)

[16] Esakia, L. "Dokazuemostnye interpretatsii intuitsionistskoi logiki" [Provableness interpretations of intuitionistic logic],*Logicheskie issledovaniya* [Logical investigations], 1998, vol. 5, pp. 19–24. (In Russian)

[17] Yablonskii, S.V. "Funktsional'nye postroeniya v k-znachnoi logike" [Functional constructions in k-valued logic], *Trudy matematicheskogo instituta im. V. A.Steklova*, 1958, vol. 51, pp. 5–142. (In Russian)

[18] Coniglio, M.E., Figallo, M. "Hilbert-style presentation of two logics associated to tetravalent modal algebras", *Studia Logica*, 2014, vol. 102(3), pp. 525–539.

[19] Font, J.M. "Belnap's four-valued logic and De Morgan lattices", *Logic Journal of the IGPL*, 1997, vol. 5(3), pp. 413–440.

[20] Font, J.M., Rius, M. "An abstract algebraic logic approach to tetravalent modal logics", *The Journal of Symbolic Logic*, 2000, vol. 65(2), pp. 481–518.

[21] Karpenko, A.S. "Von Wright's truth-logic and around", *Logical Investigations*, 2013, vol. 19, pp. 39–50.

[22] Lewis, C.I., Langford, C.H. *Symbolic Logic*. New York: Dover Publications, 1959 (2nd ed. with corrections). 506 pp.

[23] Łukasiewicz J. "A system of modal logic", *The Journal of Computing Systems*, 1953, vol. 1, pp. 111–149.

[24] Pynko, A.P. "Functional completeness and axiomatizability within Belnap's four-valued logic and its expansion", *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 1999, vol. 9(1), pp. 61–105.

[25] Sobochiński, B. "Modal system S4.4", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1964, vol. 5(4), pp. 305–312.

[26] Sobochiński, B. "Family K of the non-Lewis modal systems", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1964, vol. 5(4), pp. 313–318.

[27] Zeman, J.J. "A study of some systems in the neighborhood of S4.4", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1971, vol. XII(3), pp. 341–357.

УДК 164.043 + 510.644

N.E. Tomova

Natural Implication and Modus Ponens Principle[1]

Tomova Natalya Evgenyevna
Department of Logic, Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences.
Volkhonka 14/5, Moscow, 119991, Russian Federation.
e-mail: natalya-tomova@yandex.ru

In [6] the definition of *natural* implication was introduced. One of the criteria for *natural* implication is the normality of logical matrix [2, p. 134], a condition sufficient for verification of *modus ponens*. In this paper two definitions of *modus ponens* are regarded: in the designation-preserving sense and in the tautologousness-preserving sense. These formulations are considered as applied to two-valued and three-valued cases. In two-valued case these formulations are equivalent. But in case of three-valued logic we have another situation: they are not equivalent, but the first formulation entails the second, the reverse is not the case. According to that fact, the definition of *natural* implication is transformed and truth tables for extended class of *natural* implications are presented.

Keywords: three-valued logic, natural implication, modus ponens principle

1 Introduction

In paper [6] (see also [7]) we introduced the definition of natural implication, which defines the class of 28 implications with some useful properties. Among them there are the implications of best-known three-valued logics.

One of the criteria for natural implication is the normality of logical matrix [2, p. 134], a condition sufficient for verification of *modus ponens*. In other words an implication should be required to preserve the designated value. In this paper we consider the weakening of that condition and extended class of natural implications will be regarded.

2 Two formulations of modus ponens

In [5, p. 70] N. Rescher pointed out the necessity “to distiguish between two ways in which a modus ponens principle can be operative in a system of many-valued logic”. There are two different formulations:

[1]The paper is supported by Russian Foundation for Humanities, project № 13-06-00147a.

(i) a *stronger* condition: whenever p and $p \to q$ are both designated truth-values, then q must also be a designated value;

(ii) a *weaker* condition: whenever p and $p \to q$ are both tautologies, then q must also be a tautology.

We would like to stress the distinction between these two formulations and give it in symbolic form. Let us define some related notions and notations.

DEFINITION 1. The language $L_{\to}$ is a propositional language with the following alphabet: $p, q, r, \dots$ — propositional variables; $\to$ — binary logical connective; $(,)$ — technical symbols.

DEFINITION 2. A definition of $L_{\to}$-formula is as usual:

(1) if A is propositional variable, then A is $L_{\to}$-formula;

(2) if A and B are $L_{\to}$-formulas, then $A \to B$ is $L_{\to}$-formula;

(3) nothing else is $L_{\to}$-formula.

DEFINITION 3. A logical matrix is a structure $\mathfrak{M} =< V, F, D >$, where V is the set of truth-values, F is a set of functions on V called *basic functions*, and D is a set of designated values, D is a subset of V.

DEFINITION 4. A valuation v of an arbitrary $L_{\to}$-formula A in $\mathfrak{M}$ (symbolically — $|A|_v^{\mathfrak{M}}$) is defined as usual: $|p|_v^{\mathfrak{M}} \in V$, if p is a propositional variable; if A and B are $L_{\to}$-formulas, and $\to$ is basic function in $\mathfrak{M}$, then $|A \to B|_v^{\mathfrak{M}} = |A|_v^{\mathfrak{M}} \to |B|_v^{\mathfrak{M}}$.[2]

DEFINITION 5. An arbitrary $L_{\to}$-formula A is a *tautologie* in $\mathfrak{M}$ iff $|A|_v^{\mathfrak{M}} \in D$ for every valuation v in $\mathfrak{M}$.

Let's formulate two versions of *modus ponens*:

(i) *stronger*: $\forall \mathfrak{M} \forall v[(|A|_v^{\mathfrak{M}} \in D \,\&\, |A \to B|_v^{\mathfrak{M}} \in D) \Rightarrow (|B|_v^{\mathfrak{M}} \in D)]$;

(ii) *weaker*: $\forall \mathfrak{M} [\forall v(|A|_v^{\mathfrak{M}} \in D) \,\&\, \forall v(|A \to B|_v^{\mathfrak{M}} \in D) \Rightarrow \forall v(|B|_v^{\mathfrak{M}} \in D)]$.

2.1 Modus ponens: two-valued and three-valued cases

Let $\mathfrak{M}_2$ be a two-valued logical matrix

$$\mathfrak{M}_2 =< \{1, 0\}, \to, \{1\} > .^3$$

[2] For the clarity we use the same symbols both for language functor (propositional connective) and corresponding matrix function.

[3] $\to$ is defined through the usual two-valued truth table.

It can be seen that in two-valued case *modus ponens* principle in form (i) and in form (ii) are equivalent.

But in case of three-valued logic we have another situation: (i) and (ii) are not equivalent, but (i) entails (ii), the reverse is not the case.

Thus consider for instance the three-valued logical matrix

$$\mathfrak{M}_3 =< \{1, 1/2, 0\}, \to, \{1, 1/2\} >,$$

where $\to$ is defined by the folowing truth-table:

$\to$	1	1/2	0
1	1	1	0
1/2	1	1	1/2
0	1	1	1

It can be easily seen that *modus ponens* in form (i) is not valid in the matrix $\mathfrak{M}_3$. That is, for some A and B there is valuation v such that $|A|_v = 1/2$, $|A \to B|_v = 1/2$ and $|B|_v = 0$.

Although *modus ponens* is not "normal" in the matrix $\mathfrak{M}_3$, it is a tautologousness-preserving rule of inference.

THEOREM 1. *Modus ponens in form (ii) is hold in the matrix $\mathfrak{M}_3$, that is*

$$\forall v(|A|_v \in \{1, 1/2\}) \,\&\, \forall v(|A \to B|_v \in \{1, 1/2\}) \Rightarrow \forall v(|B|_v \in \{1, 1/2\}).$$

PROOF.

1.	Let theorem does not hold	– assumption
2.	$\forall v(\lvert A\rvert_v \in \{1, 1/2\})$ and $\forall v(\lvert A \to B\rvert_v \in \{1, 1/2\})$ and $\exists v(\lvert B\rvert_v \notin \{1, 1/2\})$	– from 1
3.	$\forall v(\lvert A\rvert_v \in \{1, 1/2\})$	– from 2
4.	$\forall v(\lvert A \to B\rvert_v \in \{1, 1/2\})$	– from 2
5.	$\exists v(\lvert B\rvert_v \notin \{1, 1/2\})$	– from 2
6.	$\lvert B\rvert_{v'} = 0$	– from 5, elim. of quantifiers
7.	$\lvert A\rvert_{v'} \in \{1, 1/2\}$	– from 3, elim. of quantifier

Then we have two cases:

Case 1.

8.	$\lvert A\rvert_{v'} = 1$	– from 7

9.	$\lvert A\rvert_{v'} \to \lvert B\rvert_{v'} = 0$	– from 8, 6, definition of $\to$
10.	$\lvert A \to B\rvert_{v'} = 0$	– from 9, def. 4
11.	$\exists v(\lvert A \to B\rvert_v \notin \{1, 1/2\})$	– from 10
12.	Assumption (1) is incorrect	– from 11, 4

Case 2.

13.	$\lvert A\rvert_{v'} = 1/2$	– from 7
14.	Let's define the following valuation v'' :	

$$v''(p) = \begin{cases} v'(p), \text{if } v'(p) = \{1, 0\} \\ 1, \text{if } v'(p) = 1/2. \end{cases}$$

Then two lemmas on v' and v'' valuations take palace.

Lemma 1. $\forall A$: if $|A|_{v'} = 1/2$, then $|A|_{v''} = 1$.

Lemma 2. $\forall A$: if $|A|_{v'} = 0$, then $|A|_{v''} = 0$.

These short lemmas can be proved by induction on the structure of formula A.

Let's continue our proof of theorem:

15.	$\lvert A\rvert_{v''} = 1$	– from 13 by lemma 1
16.	$\lvert B\rvert_{v''} = 0$	– from 6 by lemma 2
17.	$\lvert A\rvert_{v''} \to \lvert B\rvert_{v''} = 0$	– from 15, 16, definition of $\to$
18.	$\lvert A \to B\rvert_{v''} = 0$	– from 17, definition 4
19.	$\exists v(\lvert A \to B\rvert_v \notin \{1, 1/2\})$	– from 18
20.	Assumption (1) is incorrect	– from 19, 4

Thus the theorem is proved. $\square$

So we have considered two nonequivalent versions of *modus ponens* in terms of logical matrix $\mathfrak{M}_3$.

3 Natural implication: extended class

Let's recall the definition of *natural* implication, which was introduced in [7]:

Definition 6. Implication is called *natural* if it satisfies the following criteria:

(1) **C**-extending, i.e. restrictions to the subset $\{0, 1\}$ of V_3 coincide with the classical implication.

(2) If $p \to q \in D$ and $p \in D$, then $q \in D$, i.e. matrices for implication need to be normal in the sense of Łukasiewicz-Tarski (they verify the modus ponens) [2, p. 134].

(3) Let $p \leq q$, then $p \to q \in D$.

(4) $p \to q \in V_3$, in other cases.

Under the definition 6 there are 6 implications when $D = \{1\}$ and 24 implications when $D = \{1, 1/2\}$.

So, according to previously reviewed two versions of *modus ponens* principle we can transform our definition of *natural* implication and weaken the condition of normality, i.e. condition (2) can be replaced by *modus ponens* principle in form (ii).

As the result, we obtain a new update definition of *natural* implication and respectively extended class of implications, which satisfy that transformed criteria.

Thus, there are 8 implications when $D = \{1\}$:

$\to$	1	1/2	0
1	1	a	0
1/2	1	1	b
0	1	1	1

$\to$	1	1/2	0
1	1	1	0
1/2	1	1	c
0	1	1	1

where $a \in \{0, 1/2\}$, $b \in \{0, 1/2, 1\}$ and $c \in \{1, 0\}$.

When $D = \{1, 1/2\}$ the class of natural implications is expanded significantly. In this case there are 72 implications:

$\to$	1	1/2	0
1	1	b	0
1/2	a	a	b
0	1	a	1

where $a \in \{1, 1/2\}$ and $b \in \{0, 1/2, 1\}$.

So, the extended class of natural implications consists of 80 implications, which defined by 72 truth tables mentioned above. (Note that 8 truth tables with $D = \{1\}$ are included in the list of truth tables with $D = \{1, 1/2\}$.)

The fact that *modus ponens* principle in form (ii) holds in the matrices with the *natural* implications, defined by the foregoing truth tabeles, can be proved the same way (with some modifications) as in section 2.1.[4]

[4] The proof is required for the implications, for which *modus ponens* in form (i) is not hold.

So, as the result of the trasformation of the definition of natural implication in terms of tautologousness-preserving property of *modus ponens*, we have 44 new truth tables for natural implications, which are not appeared while using the unchanged definition.

More examples of three-valued implication, which satisfy only the weak formulation of *modus ponens* can be found in papers [4, 3]. In both cases the implications verify all tautologies of classical propositional logic. The complete list of truth tables for such implications can be found in [1, p. 64, 80–81]. Our extended class of natural implications is different in that not all implications verify all tautologies of classical propositional logic.

It is of interest to continiue our investigations of functional properties of three-valued logics (q.v. [7]) and consider the extensions of regular Kleene's logics by these new implications. It is expected that in our classification of three-valued logics will appear some new basic systems.[5]

References

[1] Devyatkin, L. *Trekhznachnye semantiki dlya klassicheskoi logiki vyskazyvanii* [Three-valued semantics for the classical propositional logic], Moscow: Institute of Philosophy of RAS, 2011. (In Russian)

[2] Łukasiewicz, J., Tarski, A. "Investigations into the sentential calculus", in: J. Łukasiewicz, *Selected Works*, ed. by L. Borkowski. Amsterdam & Warszawa: North-Holland & PWN, 1970, pp. 131–152.

[3] Malinowski, G. "On Many-Valuedness, Sentential Identity, Inference and Łukasiewicz Modalities", *Logica Trianguli*, 1997, vol. 1, pp. 59–72.

[4] Priest, G. (1979). "The Logic of Paradox", *Journal of Philosophical Logic*, 1979, vol. 8, no 1, pp. 219–241.

[5] Rescher, N. *Many-Valued Logic*. New York: McGraw Hill, 1969. 359 pp.

[6] Tomova, N. "A lattice of implicative extensions of regular Kleene's logics", *Reports on mathematical logic*, 2012, vol. 47, pp. 173—182.

[7] Tomova, N.E. *Estestvennye trekhznachnye logiki: Funktsional'nye svoistva i otnosheniya* [Natural three-valued logics: functional properties and relations], Moscow: IFRAN Publ., 2012. 89 pp. (In Russian)

[5] In [7], on examination of the implicative extensions of weak Kleene's logic we received 7 *basic* logics: Łukasiewicz's logic $\mathbf{Ł_3}$, paraconsistent logic **PCont**, three-valued Bochvar's logic $\mathbf{B_3}$, logic $\mathbf{Z}$, $\mathbf{T^3}$, $\mathbf{T^2}$ and $\mathbf{T^1}$, which form a lattice w.r.t. relation of functional inclusion one logic to another.

УДК 160.1

P. Materna

Two Approaches to Philosophically Analyzing Language

Materna Pavel
Institute of Philosophy of Academy of Sciences, Czech Republic
110 00 Jilská 1
Praha 1, Czech republic
e-mail: `maternapavel@seznam.cz`

According to some philosophers we can distinguish two trends in dealing with (especially natural) language. One of them is older and uses explications that simplify the richness of the language, so that the result of its efforts is an artificial image of language not corresponding to its real shape. The more recent trend tries to capture all the richness of the language together with all its irregularities and is represented mainly by Quine's and later Wittgenstein's philosophy. The older trend (I call it *analytic group*, **AG**, here) is sometimes criticized as being somehow obsolete while the more recent trend (called here *Q-W group*, **Q-W**, here) is then evaluated as more promising (more 'progressive'). I try to show that **AG** is incomparable with **Q-W** because both try to answer distinct questions, solve distinct problems. (A comparison could be realized on the higher level of evaluating the *choice of problems itself*, which is another topic.)

Keywords: sense, meaning, reference, denotation, explication, abstraction

1 Motivation

A characteristic (together with an implicit evaluation) of the two approaches that will be dealt with in this article can be found in [2, p. 240]. (My translation from Czech:)

> "*Tractatus* is '...a document of far-reaching simplifications of talking about 'language', so common among the pioneer generation of analysts. A happy juggling with the words 'language', 'sentence', 'thinking' or 'meaning', not very much taking into account their current (actual) sense and motivated largely by the endeavor to let the results of these 'analyses' fit in (by

> means of analogously stultifying treating the words ‘possible’, ‘necessary’ or ‘only’) is to certain extent characteristic of a part of analytic philosophy up to now.’ (Wittgenstein’s transient years are) ‘a story of waking up from this blissful insanity.’ Instead of a perfectly fitting in system of ‘language’ Wittgenstein ‘turned to an incoherent and chaotic landscape of language full of irregularities...”

True, both trends I want to analyze are characterized in this quotation, but this characteristic is surely not ‘objective’, emotionally neutral: it tries to evaluate both approaches and to show that one of them is passe while the other is ‘waking up’ from ‘blissful insanity’.

One of the key notions enabling the author to write such an evaluation is the notion of *simplification.* I will show that the author’s standpoint is based on a very essential *misunderstanding.*

2 Frege’s legacy

In his [10] and articles about nineties, especially in [11] Frege recognized that understanding expressions of a given language has to be *explained.* He proposed his ’semantic triangle’, i.e. the scheme where between the *expression* and its *reference (denotation)* there is inserted an abstract object called *Sinn (sense*, we will use also *meaning*). The idea was sound: without something like Frege’s sense one could not explain why some series of sounds or letters can denote an object, a property, a relation etc. and why distinct expressions can denote one and the same object.

Remember: to *explain* a fact we have to introduce some *abstract notion(s)* which explicate (in Carnap’s sense) some intuitively understood idea.

Frege was underestimated and ignored by his contemporaries but the development of (not only mathematical) logic, analytic philosophy and logical analysis of (natural) language in 20th century is unthinkable without him. Even the original Warsaw-Lemberg school has been influenced (Ajdukiewicz) and the nominalists from the Vienna Circle had to admit that idea of semantics was attractive [4].

3 The golden age of semantics

Frege did not *define* his *sense*, he just characterized it as *the mode of presentation* (see [12, p. 57]), which suggests an important role of the sense but which cannot replace a definition / explication. Therefore Frege himself met a problem with semantics of some subordinate sentences (and tried to solve it, unfortunately accepting contextualism), and in [4] had to solve the same problem. This circumstance has led however to a kind of blossoming semantics. David Kaplan writes in his [14, p. 13]:

> "During the Golden Age of Pure Semantics we were developing a nice homogenous theory, with language, meanings, and entities of the world each properly segregated and related one to another in rather smooth and comfortable ways. This development probably came to its peak in Carnap's *Meaning and Necessity* (from 1947). ... There is great beauty and power in this theory".

According to Kaplan there were some gaps in this beautiful theory. Kaplan speaks about *proper names, demonstratives, quantification into intensional contexts*, but we can add some important points:

Carnap himself recognized that his 'method of intensions and extensions' cannot solve some semantic problems ('indirect contexts' – [11], who reacted by 'reference shift' and became a contextualist).

Thus Carnap can be said to have discovered the phenomenon of hyperintensionality (described by [8]). Here we can see the inspiration for Alonzo Church, who began to look for a finer criterion of equivalence of expressions than Carnap's *intensional isomorphism*: see [7], where Church defines *synonymous isomorphism*, and Anderson's [1] appraisal of Church's role.

(Church's results can be used when *procedural semantics* is discovered as a tool of solving problems of contemporary analyses.)

4 Analytic theories of language

The development of the analytic theories of language continued in various directions:

Montague's influential school of logical analysis of natural language, based on lambda calculus and presenting particular analyses of a fragment of English. Montague's abstraction works with translations from English to intensional logic and using the standard process of interpreting. See Montague (1970), (1974), [13].

Systems using the idea of possible worlds helped modal logic understand modalities and add to C. I. Lewis–like axioms semantic making it possible to define also empirical modalities due to Kripke's accessibility relations. See [15], [16].

20th century is full of outstanding philosophers and logicians offering their contributions to solving problems first formulated by Frege. We find here so many great names of philosophers and logicians who continued working at least partially on the Frege's legacy (Hintikka, Marcus, D. Lewis, Kaplan, not to forget B. Russell essentially inspired by Frege, Woleński, Partee, Schiffer etc. etc.).

This fact can be explained: The problems that were gradually discovered when the Frege's work was finally appraised gave birth to further problems. The endeavor to closer characterize Frege's idea of *Sinn* led to always new sub-problems.

An important attempt in this respect had it that *intensions* (as PW-intensions) could play this role. This step evoked new problems: the mathematical expressions would not possess meaning? Or: what is denoted by empirical expressions? In what sense can we speak with Cresswell about 'structured meaning'? Is meaning dependent on context?

Among the names of the 'wise (wo)men' working in the 20th century on solving the problems of *meaning* of the NL expressions one name must be certainly adduced: Pavel Tichý, who founded a semantic system as a hyperintensional system generated by a top-down approach.

Here we adduce Tichý's characteristic of *explication* because we should be aware of the fact that we do not claim "Meaning is ..." but rather "The optimum explication of *meaning* is ...". The quotation will also contribute to our main task: showing that the evaluation of the situation concerning the notions of analyzing language, as quoted at the outset of this paper, is based on an essential misunderstanding. The following quotation can be found in [19, p. 194–195].

> "The purpose of theoretical explication is to represent intuitions in terms of rigorously defined entities. It is to Frege that we owe the insight that the mathematical notion of function is a universal medium of explication not just in mathematics but in general. To explicate a system of intuitive, pretheoretical notions is to assign to them, as surrogates, members of the functional hierarchy over a definite objectual base. Relations between the intuitive notions are then represented by the mathematically rigorous relationships between the functional surrogates".

Tichý's characteristic of explication is a concretization of what Carnap said about explication in his [5]. It is clear that every explication has to use abstractions and is therefore a kind of *simplification*. We will return to this point below.

5 Two kinds of criticism

Whenever some shortcomings or simply not solved problems were detected in the work of analytic philosophers/logicians two kinds of reaction could have been expected:

a) *Collegial*: A way of removing the shortcomings is proposed so that the explanatory character of the text were preserved.

   Examples:

   Being dissatisfied by Frege's definition of concept Church redefines concept in [6]. His proposal preserves the realistic character of concept and makes it possible to continue Frege's logical treatment of concepts and of the relation between sense and denotation.

   See Church's reaction(s) to Carnap's intensional isomorphism.

   When Tichý detects that Frege's 'reference shift' is untenable he defines suppositions *de re* and *de dicto* and modifies Frege's semantic triangle.

b) *Hostile*: The purpose itself of the criticized text is made dubious.

   Examples:

   Two examples are sufficient here because they essentially influenced the way in which an illusion arose according to which the analytic endeavor to explain some logical puzzles connected with superficial use of language is obsolete and should be replaced by a faithful description of the real use of language.

   The first example is the well-known Quine's criticism [17] of Carnap's attempt at defining semantics of natural language in [4]. According to Quine Carnap's proposal is a simplification. His attempt to define the triple *meaning, analyticity, synonymy* necessarily breaks down because *meaning* is an obscure notion and language behaves holistically.

   Holistic behavior means: "the distinction between the linguistic and the empirical factor (that makes it possible to distinguish between analytic and synthetic sentences) is not significantly traceable into the statements of science taken one to one" [17, 42].

   Quine's critique was not oriented as a rectification of Carnap's attempt, unlike Church's critique: it resulted in turning down Carnap's project of explicating semantic notions. Quine replaces this project by a pragmatic description of the way language *actually* behaves (see [18]).

Instead of the 'obscure' notion of meaning in the spirit of Frege's *Sinn* a behaviorist generalization *stimulus meaning* is leaving semantics and becomes a naturalistic causal notion. *It seems that while Carnap simplifies reality Quine describes it using empirical methods.*

The second example is also famous. Wittgenstein's *Tractatus* was a great attempt at explicating some notions used to explain the way in which language corresponds to the world. This time it was Wittgenstein himself who began to speak about heavy errors in this remarkable book and to abandon any attempt to use abstractions that should *explicate* used notions to find deep regularities helping to *explain* linguistic behavior from the viewpoint of its underlying logic. Instead we find now collections of witty observations of particular 'linguistic games', full of interesting ideas and stimuli.

Summarizing, in the light of Quine's refusing analytic methods and later Wittgenstein's shift towards describing 'language games' an impression arose that the *analytic approach* to studying and analyzing language, which tried to *explain* some facts connected with using language and relevant from the viewpoint of *logic, explicated* therefore some more or less unclear notions and used frequently *abstraction*, is *too artificial*, and *simplifies* the complicated world of language use, whereas the philosophers inspired by Quine and the later Wittgenstein, who do not explain the above mentioned facts but *describe* the way a language is used and for whom *generalization* is a sufficient kind of abstraction, represent a more 'progressive' form of doing philosophical analyses because they do not need to simplify the complicated reality of language use.

6 Comments and summarization

A. Abstraction

Reality — including the reality of language use is of course complex and chaotic. We can become aware of some features of this reality when using a somehow systematic description and taking into account some generalizations. A more systematic way of detecting some features that are interesting from some relevant viewpoint consists however in *abstracting something from something* and *explicating* the notions that arose due to abstracting.

When we want to *explain* some phenomenon then multiple abstractions and so multiple simplifications are necessary.

Imagine how such a successful science as physic would develop if it did not systematically use abstraction. It would be probably a boring discipline describing physical phenomena known to everybody.

Nobody will probably criticize physic although it demonstrably simplifies reality. Everybody knows or at least guesses that there would be in practice no physic if simplifications were forbidden. Logical analysis of language is not as 'popular' as physic, so people are tolerated when they comply that it contains so many abstract objects and so simplifications — see the quotation at the outset of this article.

As an illustration of the role of (simplifying) abstraction we adduce a quotation from Tichý [20, p. 183–184], where Tichý answers the question, when Gallileo did mathematics discovering the law of gravity:

> "while plotting the values of the function against its arguments Gallileo was not doing mathematics. He was just taking down what was dictated to him by nature. ... But Gallileo not only *identified* the free-fall function. He also noted that there is a quite a straightforward way of *calculating* the values of the function from its arguments. Given an argument, all one needs to do is multiply it by two, divide the result by 9,7, and then take a square root. It was when he made this second discovery, a discovery concerning a complex involving functions and numbers, that he was doing mathematics".

By the way, the simplification given by this calculation is clear: no object will obey the result because the resistance of the given environment has been abstracted from...

Thus abstracting we always simplify but this does not mean that we negate complexity. We can show that as 'simplifying' analysts we know that, necessarily, we simplify but that we know very well that this necessary simplification leads after all to acquisition of new knowledge. In [9] we write:

> "The way we understand the enterprise of logical analysis of (natural) language, it is neither eliminative nor reductive, but selective. The analysis selects particular features of language, leaving all the remaining untouched and unscathed. We obviously acknowledge the pragmatic categories of (act of) assertion, language acquisition, communication, speaker's intention, etc. And we acknowledge no less the full range of pragmatic paraphernalia that keep natural language lubricated and running, including non-verbal winks and nods, hints and clues. But while they exist in their own right, they are immaterial to the project of, ideally, isolating all and only logically salient features of (natural) language. So we blot out what is in effect the vast bulk of natural language in order to zoom in on the remaining fragment and blow it, as it were, with a view to studying it in more detail".

B. Philosophy

We have suggested the goal of our analytic studies concerning the logical character of some abstract complexes underlying natural language and enabling us to explain the fact that we can clarify the meaning of NL expressions and the deep character of logical laws explained in terms of those complexes. This is in my opinion the task to be gradually fulfilled by our studies and we are convinced that we do something what can be classified with *philosophical* studies, since it transcends the immediate level of observed facts. Let us speak about *the analytic group (AG)*.

Now a following question can emerge:

Can we ascribe philosophical character to studies that are worked out in the spirit of Quine and, e.g., the later Wittgenstein (Q-W)?

There are two possibilities:

I. The work of the Q-W group is essentially a not philosophical work. In this case it is impossible to compare *the Q-W group* with AG, let alone to claim that the former is somehow more progressive than the latter.

II. The Q-W group is also a philosophically oriented group. Then it is clear that the kind of philosophy applied by it is essentially distinct from that applied by AG. Then, of course, the comparison of both groups is impossible as well.

Ad **I.:**

Quine applied philosophy when he criticized Carnap, viz. by using holistic objection. Building up his positive theory of language he created an interesting theory in his [18]. I think however that his theory is based on experience and is restricted to describing phenomena. As a smart description using more generalization than other kinds of abstraction it could be hardly called *explication.* An empirical description — even be it as good as Quine's — is in my opinion not yet a philosophical analysis. As for Wittgenstein, let him speak:

> "Philosophy simply puts everything before us, and neither explains nor deduces anything – Since everything lies open to view there is nothing to explain. For what is hidden, for example, is of no interest to us" [21].

This can be interpreted as either a denial of philosophy or a formulation of philosophy incompatible with the philosophical background of AG.

Ad **II.:**
Well, it would be rather laborious to characterize the philosophy that underlies the views shared by the members of the Q-W group. It will be probably better to mention some points where AG will always dissent with the Q-W people.

The main such point consists in willingness to assume that abstract complexes definable within an explication should be taken seriously: while the members of AG are happy with such complexes the Q-W people warn us against abstract 'commitments'.

By defending the use of abstract complexes (like abstract procedures) members of AG not necessarily speak about 'existence' because if to exist means to be principally spatio-temporally localizable then abstract objects *do not* exist, as our great Platonist Bernard Bolzano explicitly stated in his [3, p. 224].

Therefore AG people are convinced that *explaining* some phenomena whose necessary character is admitted (albeit reluctantly) even by the Q-W people can be realized only taking in abstract surrogates for not very clear intuitions. They oppose the inclination to sell this necessity for the necessity of norms, which we can observe in some formulations typical for the members of Q-W. Therewith is connected the well-known reluctance to admit necessities even in logic, as we can read in [17].

The notion of necessity (to be explained by means of using abstract complexes in explications) makes it possible to distinguish empirical (contingent) knowledge from non-empirical knowledge. The borderline is definite (definable) for AG while the Quinean relativization thereof lives in the followers of Q-W. Thus the AG people warn us against the inclination to accept something like 'absolute empiri(ci)sm', according to which all what can be said about, e.g., language can be said within empirical study pursued, e.g., by linguistic semantics.

Suggesting these differences between AG and Q-W we can state that *the problems which have to be solved by AG are distinct from the problems to be solved by Q-W*. In this sense we can say that the quotation from Beran's book claims nonsense: it tries to compare (and even evaluate) incomparable disciplines.

There is a level on which we perhaps *could* compare, and maybe that the author of that quotation had in mind this higher level, namely the level where we want to compare and evaluate the *choice itself*: would you prefer to choose AG, or Q-W? To consider this problem means to compare two *comparable* approaches if we assume that we want to solve the same problems, and claim that one of these choices is better than the other. Yet I tried to show that AG and Q-W actually solve distinct problems. Thus we can say nothing rational to this second interpretation of Beran's 'Conclusion'.

References

[1] Anderson, C.A. "Alonzo Church's contributions to Philosophy and Intensional Logic", *The Bulletin of Symbolic Logic*, 1998, vol. 4, no 2. pp. 129–171.

[2] Beran, O. *"Střední" Wittgenstein: cesta k fenomenologii a zase zpátky.* Červený Kostelec: Nakladatelství Pavel Mervart, 2013. 252 pp.

[3] Bolzano, B. *Wissenschaftslehre I.* Sulzbach: J.E. v. Seidel, 1837. 730 pp.

[4] Carnap, R. *Meaning and Necessity.* Chicago: University of Chicago Press, 1947. 231 pp.

[5] Carnap, R. *Logical foundations of probability.* Chicago: University of Chicago Press, 1950. 630 pp.

[6] Church, A. *Introduction to Mathematical Logic.* Princeton: Princeton University Press, 1956. 378 pp.

[7] Church, A. "A Revised Formulation of the Logic of Sense and Denotation. Alternative (1)", *Noûs*, 1993, vol. 27, no 2, pp. 141–157.

[8] Cresswell, M.J. "Hyperintensional logic ", *Studia Logica*, 1975, vol. 34, Issue 1, pp. 25–38.

[9] Duží, M., Jespersen, B., Materna, P. *Procedural Semantics for Hyperintensional Logic. Foundations and applications of Transparent Intensioanl Logic.* Berlin: Springer, 2010. 565 pp.

[10] Frege, G. *Die Grundlagen der Arithmetik.* Breslau: W. Koebner, 1884. 119 pp.

[11] Frege, G. "Über Sinn und Bedeutung", *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 1892, vol. 100, pp. 25–50.

[12] Geach, P. Black, M. *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege.* Oxford: Basil Blackwell, 1952. 250 pp.

[13] Gamut, L.T.F. *Logic, Language, and Meaning, Volume 2: Intensional Logic and Logical Grammar.* Chicago: The University of Chicago Press, 1991. 366 pp.

[14] Kaplan, D. "Dthat", *Syntax and Semantics*, vol. 9, ed. P. Cole. New York: Academic Press, 1990. pp. 212-223. Reprinted in: *Demonstratives*, ed. by P. Yourgrau. Oxford: Oxford University Press.

[15] Kripke, S. "Semantical considerations on modal logic", *Acta Pilosophica Fennica*, 1963, vol. 16, pp. 83–94.

[16] Kripke, S. *Naming and Necessity.* Oxford: Basil Blackwell, 1980. 184 pp.

[17] Quine, W.v.O. *From a logical point of view.* New York and Evanston: Harper & Row Publishers INK, 1953, 1961. 184 pp.

[18] Quine, W.v.O. *Word and Object.* Cambridge: MIT Press, 1960. 264 pp.

[19] Tichý, P. *The Foundations of Frege's Logic*. Berlin, New York: De Gruyter, 1988. 303 pp.

[20] Tichý, P. 'Constructions as the subject-matter of mathematic', *The Foundational Debate: Complexity and Constructivity in Mathematics and Physics*, eds. W. De Pauli-Schimanovich, E. Khler and F. Stadler. Dordrecht, Boston, London, and Vienna: Kluwer, 1995, pp. 175–185.

[21] Wittgenstein, L. *Philosophical Investigations.* Oxford: Basil Blackwell, 1968. 250 pp.

УДК 160.1

Д.В. Зайцев

Моделирование диалога с публичными объявлениями[1]

Зайцев Дмитрий Владимирович
Кафедра логики, философский факультет, МГУ им. М.В. Ломоносова.
119991, Москва, ГСП-1, Ломоносовский проспект, д. 27, корп. 4.
e-mail: zzdima@yandex.ru

В статье предлагается новый подход к формализации рассуждений на основе публичных объявлений.

В первой части описывается идея новой экспликации публичных объявлений на основе энтимемической импликации, подробно изложенной в [1]. Вторая часть посвящена обзору различных ситуаций рассуждений на основе публичных объявлений. Отталкиваясь от модифицированной версии диалога «Дети с грязными лицами», я выделяю четыре типа таких ситуаций. В третьей части вводится система PADME (Public Announcements Dialogue Modelling Engine — средство моделирования диалога с публичными объявлениями), представляющая собой разновидность системы субординатного вывода. В последней четвертой части рассматриваются дальнейшие направления развития исследований.

Ключевые слова: публичные объявления, энтимематическая импликация, субординатный вывод

1 Введение

В предыдущей статье [1] была предложена идея нового подхода к формализации рассуждений на основе публичных объявлений. Традиционно в логике публичных объявлений (**PAL**) публичное объявление выражается с помощью оператора $[A]B$, неформально понимаемого как "B истинно после (правдивого) объявления A". Условно такую трактовку можно назвать "направленной в будущее" (forward): в ней эксплицируется переход от публичного объявления, произошедшего в какой-то момент в прошлом, к истинному на этом основании в какой-то следующий момент утверждению. При этом агент осуществляет (или восстанавливает, вычисляет) этот переход. Другими словами, публичное объявление как бы декларирует возможность такого перехода, фактически

[1] Работа частично поддержана РГНФ. Грант № 13-03-00461.

подразумевая наличие логического следования между высказываниями A и B, на что указывает стандартное условие истинности формул с оператором публичного объявления в семантике возможных миров — если A истинно в произвольном мире модели M, то B истинно в «усеченной» модели M, ограниченной теми мирами, в которых истинно A. Предполагается, что рациональный агент знает все следствия A и, следовательно, может осуществить такой переход. В результате получающаяся реконструкция рассуждений на основании публичных объявлений представляет собой последовательность публичных объявлений агентов, а процесс перехода остается не эксплицированным явно.

В основе нового подхода к формализации таких рассуждений лежит идея принципиально иной трактовки оператора публичного объявления, которую можно условно обозначить как «направленность в прошлое» (backward). Во-первых, предполагается, что публичное объявление всегда делается на каком-то основании. Им могут быть предыдущее публичное объявление, фактофиксирующие высказывания, основанные на данных опыта, или высказывания, обусловленные знаниями агента. В этом смысле публичное объявление A/B можно трактовать как характеристику текущего состояния знаний объекта — "объявлено A на основании B" — агенту было известно (в частности, могло быть объявлено ранее), что B имеет место, и он пришел к выводу, что A.

Во-вторых, предлагается формальная экспликация нового оператора публичного объявления по аналогии с так называемой энтимемической импликацией. В самом деле, если некто на определенном (известном нам) основании B заявляет, что A, это может означать, что либо A непосредственно следует из B, либо имеется дополнительная информация (пропущенная посылка C), которая в сочетании с B влечет A. В последнем случае агенту предстоит фактически восстановить энтимему — вычислить пропущенную посылку C. Эти неформальные соображения были зафиксированы в предыдущей статье в виде первоначального варианта определения оператора публичного объявления:

$$A/B \Leftrightarrow_{DF} \exists C(C \wedge ((C \wedge B) \rightarrow A)).$$

Далее был рассмотрен пример, представляющий упрощенную версию известного диалога «Muddy children». В статье он был назван «У вас вся спина белая», что предполагает отсыл к известным феноменам русскоязычной культуры. Более интернациональное (и «говорящее») название могло бы быть «Muddy Teachers», поскольку буквально в иллюстративном диалоге речь шла о преподавателях, испачкавших спину мелом.

Моделирование предполагало «смешанную» последовательность упорядоченных публичных объявлений и высказываний. Думается, что такое представление данного или подобного ему диалога является не вполне корректным — правильнее было бы различать непосредственно диалог как последовательность публичных объявлений и соответствующих им рассуждений, которые, во-первых, осуществляются на основе одних объявлений, а, во-вторых, делают возможными последующие объявления. Кроме того, моделировался только один вариант развития событий в этой ситуации, и получившаяся реконструкция скорее служила иллюстрацией основной идеи и возможностей нового оператора.

Все эти соображения фактически обусловливают содержание и структуру данной статьи. В следующем разделе на основании более подробного рассмотрения диалога «Muddy teachers» и возможных линий развития сюжета делается попытка предварительной систематизации различных случаев публичных объявлений. В третьем разделе статьи уточняется определение оператора публичного объявления так, чтобы оно подходило к более широкому множеству анализируемых рассуждений, и закладываются основы общего подхода к моделированию подобных диалогов посредством формальной системы, предполагающей экспликацию не только обмена объявлениями, но и лежащих в их основе рассуждений. В заключение подводятся итоги и намечаются перспективы дальнейших исследований.

2 Типы публичных объявлений в контексте Muddy Teachers

Muddy Teachers. Описание

После лекции на кафедру (логики), где присутствует только один человек (заведующий кафедрой) возвращаются два преподавателя (α и β). Заведующий, посмотрев на них с разных сторон, делает публичное объявление

1. 0: “По крайней мере у одного из вас спина в мелу”.

Далее события могут развиваться по нескольким сценариям. Сценарий α. Посмотрев на β и увидев, что его спина чистая, преподаватель α объявляет

2. α: “Моя спина в мелу”.

После этого β, даже не глядя на α, объявляет

3. β: “Тогда моя спина — чистая”.

Именно этот сценарий был выбран для иллюстрации возможностей нового определения. Акцент при этом был сделан на объявлении β.

Предполагалось, что услышав объявление $\alpha : p/(p \vee q)$, он, в соответствии с приведенным выше определением, понял — существует дополнительная информация, позволяющая от $p \vee q$ перейти к p. Далее, зная, что $\neg q \wedge (p \vee q)$ влечет p, он восстановил энтимему и получил основание утверждать, что пропущенная посылка верна, то есть его спина — чистая. Условимся подобную ситуацию публичного объявления, основанного на восстановлении рассуждения с пропущенной посылкой, называть далее *энтимемической*.

Стоит обратить внимание, что ситуация энтимемического объявления возникает только при переходе к третьему шагу диалога. Предыдущие реплики, произнесенные другими действующими лицами, интерпретировались не как публичные объявления, а как некоторая привнесенная информация. Следуя декларированному выше принципу, постараемся представить всю последовательность шагов 1–3 как серию публичных объявлений.

Несомненно, особым статусом обладает первое публичное объявление. Во-первых, с него начинается диалог, оно задает исходные посылки для последующих рассуждений, а во-вторых, ему не предшествует никакого объявления. Что же служит основанием для первого публичного объявления? Представляется, что таких оснований может быть несколько. Это (1) данные органов чувств (то, что первый участник диалога непосредственно воспринимает) и (2) некоторые исходные знания агента. Кроме того, очевидно, что агент может утверждать (объявлять) нечто, полученное из источников (1) и (2) на основе рассуждений. Скажем, если

(1) я вижу, что на столе лежат билеты к экзамену,

(2) знаю, что в ящике стола есть конверт с задачами, а ключ от ящика только у Насти, но

(1) не вижу ни Насти на рабочем месте, ни ее пальто на вешалке,

я могу сделать объявление: "У нас есть билеты, а задачи придется распечатать". На данном этапе не будем искать формальной экспликации для этих различий (хотя в некоторых случаях различение знания и данных наблюдения может быть весьма существенным). В ситуации исходного объявления его основание для других участников оказывается недоступным, и такое объявление будет дальше трактоваться как объявление без обоснования (или объявление с нулевым основанием), то есть как декларация.

На втором шаге рассматриваемого диалога агент α также делает объявление, заявляя "моя спина в мелу". Ход его рассуждений осуществляется именно по той схеме, которую после его соответствующего объявления предстоит восстановить преподавателю β. То есть на основании исходного объявления с пустым основанием и визуальных данных (он видит, что у β спина чистая) α сначала приходит к выводу, что его спина в мелу, а потом и объявляет об этом. Стоит отметить, что в рассуждениях α хотя и используется исходное объявление, но совсем не так, как в рассуждении β. α не восстанавливает энтимемы, он использует в качестве посылок исходно объявленное дизъюнктивное утверждение и данные своих органов чувств — он просто видит, что у β спина чистая. Соответственно, предложенное выше определение оператора публичного объявления в этой ситуации не работает и нуждается в корректировке. Зафиксируем за этой ситуацией название *объявление на основе вывода*.

На третьем шаге преподаватель β, восстановив ход рассуждений α, в свою очередь делает объявление о состоянии его спины. Возникает вопрос, целесообразно ли рассматривать это третье объявление как объявление на основании (ближайшего) предыдущего объявления или (всех) предыдущих объявлений? Мне представляется, что умножение сущностей и в этом случае неоправданно. Фактически информация, на которую опирался α в предшествующем объявлении, уже была им использована для этого объявления. Можно сказать, что она в нем в определенном смысле содержится. Таким образом, рассматривая каждое последующее объявление на основе только непосредственно предыдущего, мы можем быть уверены, что не упустили важной информации. Единственная существенная оговорка касается неявной предпосылки, лежащей в основе такого подхода. Мы исходим из того, что каждый следующий участник диалога обязательно перед объявлением учитывает и анализирует все сказанное ранее. Будем считать удовлетворяющий такой предпосылке диалог вполне “мирандизированным” (от английского to mirandize — зачитать при аресте права в соответствии с так называемым Miranda warning, начинающимся со слов “Вы имеете право хранить молчание. Всё, что вы скажете, может и будет использовано против вас в суде”).

Итак, анализ первого сценария “Muddy Teachers” позволяет представить диалог как последовательность трех публичных объявлений и соответственно двух переходов, обеспечивающих второе и третье объявление. В результате выявлены три важных типа публичных объявлений — *исходное объявление* на основе пустой информации, *объявление на основе вывода* и *энтимемическое объявление*. Если теперь обратиться к другому сценарию развития событий, можно обнаружить другие возможные ситуации объявлений.

Сценарий β. Ситуация прежняя, у α спина в мелу, у β — чистая. Пусть теперь β начинает первым и, увидев, что спина α в мелу, заявляет

2. β: "Я не знаю, грязная ли у меня спина".

После этого α, даже не глядя на β, объявляет

3. α: "Тогда моя спина — испачкана".

Важное отличие этого сценария состоит в том, что, во-первых, β объявляет о своем незнании, а, во-вторых, α на основании такого объявления о незнании делает свое вполне конкретное заявление, то есть приходит к определенному знанию!

Рассмотрим более подробно (интеллектуальный) переход, осуществляемый β перед его заявлением. Он знает, что у одного из них спина в мелу, и видит, что спина α испачкана. Этой информации явно не достаточно, чтобы сделать определенный вывод о наличии или отсутствии мела на собственной спине. Именно об этом и объявляет β. Очень условно эту ситуацию тоже можно уподобить процедуре восстановления силлогистической энтимемы, когда, восстановив энтимему в правильный силлогизм, мы убеждаемся, что пропущенная посылка не соответствует действительности. В этом случае принято считать энтимему некорректной. Другими словами, β хорошо знает, какой посылки ему не хватает для того, чтобы утверждать, что его спина в мелу, но соответствующее утверждение не является истинным — утверждаемое положение дел не соответствует действительности.

Именно этим и обусловлена специфика третьей разновидности публичного объявления — объявления о незнании. Если теперь обратиться ко второму переходу, который осуществляет α, то необходимо признать, что он имеет дело с предшествующим объявлением типа (неизвестно $A)/B$. Сразу же имеет смысл обобщить данный случай. Дело в том, что в сценарии α на втором шаге участник диалога утверждал "Моя спина в мелу". С таким же успехом он мог прибегнуть к более экзотичной формулировке, заявив "Я знаю, в мелу у меня спина или нет". Легко заметить, что агент β пришел бы, используя это объявление, к тому же выводу. Таким образом, мы сталкиваемся с четвертой разновидностью публичных объявлений — с *объявлениями о (не)знании*. Для их экспликации требуется в первую очередь выбрать имеющийся в логике или предложить новый способ выражения утверждений об отсутствии (наличии) знания.

Итак, анализ ситуаций, связанных с публичными объявлениями, позволил выделить 4 ситуации:

1. исходное объявление;
2. объявление на основе вывода;
3. энтимемическое объявление;
4. объявление о (не)знании.

3 PADME — система моделирования диалога с публичными объявлениями

Принимая во внимание все сказанное выше (и временно забывая о ситуациях объявления о (не)знании), представляется целесообразным радикально изменить намеченный в прошлой статье подход к формализации рассуждений на основе публичных объявлений. Зададим язык $A ::= p \mid t \mid A \wedge A \mid A \vee A \mid \neg A \mid A/A$. Включение в язык константы t обусловлено необходимостью отличить объявление на основе исходных данных от объявления на основе предшествующих объявлений и будет технически обосновано далее.

Ниже будет предложен первый вариант системы моделирования диалога с публичными объявлениями PADME (Public Announcements Dialogue Modelling Engine), построенной по аналогии с системами субординатного натурального вывода (Fitch-style natural deduction). Диалог представляется как последовательность шагов-объявлений, где каждое объявление делается на основании правил введения публичных объявлений. В свою очередь возможность применения этих правил обусловлена построением вспомогательных выводов с использованием правила исключения публичных объявлений на основе стандартных правил натурального вывода. Получается, что оператор публичного объявления вводится не посредством явного определения, а через системы правил введения/исключения публичных объявлений.

На первом шаге задаются исходные данные в виде последовательности множеств δ_1, $\delta_2, \ldots$, δ_n, релятивизированных относительно участников диалога. Интуитивно подразумевается, что каждый участник на каждом шаге диалога может использовать доступную ему информацию. В нашем примере Muddy Teachers для трех участников диалога исходная информация может быть представлена следующим образом: $\delta_1 = \{p, \neg q\}$, $\delta_2 = \{\neg q\}$, $\delta_3 = \{p\}$.

В принципе предлагаемое моделирование диалога с публичными объявлениями предполагает различение двух типов посылок: посылки, интерпретируемые как истинные высказывания, и дополнительные посылки — допущения, которые участник диалога может принимать сам в процессе вспомогательных рассуждений. Соответственно, посылки первого типа могут представлять собой исходные данные, информацию, которой обладает участник диалога, и объявленную информацию, которая становится доступной всем участникам. Начнем с формулировки двух правил введения посылок.

Первое правило позволяет открывать новый вывод на основании имеющейся в распоряжении агента исходной информации.

$r.1$

$$
\begin{array}{c|c|l}
1 & & \delta_i \\ \cline{3-3}
2 & & \begin{array}{c|l} i & C, \quad if\ C \in \delta_i \\ \hline & : \end{array}
\end{array}
$$

Второе правило введения позволяет вносить в вывод посылки на основе ранее сделанных объявлений: если было объявлено A на каком-либо основании, A может быть использовано в качестве посылки во вспомогательном выводе.

$r.2$

$$
\begin{array}{c|l}
1 & A/B \\
2 & \quad \begin{array}{|l} A \\ \hline : \end{array} \\
3 &
\end{array}
$$

Введение публичных объявлений в основной вывод осуществляется в соответствии с двумя правилами введения.

Первое из них (правило $r.3$) соответствует ситуациям исходного объявления и объявления на основе вывода. Соответственно, оно предполагает два случая:

1. Вспомогательный вывод построен на основе только исходной информации (в выводе использовалось правило $r.1$ и не использовалось правило $r.2$);

2. Вспомогательный вывод построен с использованием предыдущих объявлений, но не носит энтимемического характера (в выводе обязательно использовалось правило $r.2$).

$r.3$

$$\begin{array}{r|c|l}
1 & & C \\ \cline{3-3}
2 & & : \\
3 & & B \\
4 & \multicolumn{2}{l}{B/t \quad ,}
\end{array}$$

если в выводе B не было использовано правило $r.2$. в противном случае:

$$\begin{array}{r|c|l}
1 & \multicolumn{2}{l}{A/F} \\
2 & & : \\ \cline{3-3}
3 & & : \\
4 & & A \\
5 & & : \\
6 & & B \\
7 & \multicolumn{2}{l}{B/A}
\end{array}$$

Следующее и последнее правило — правило введения оператора публичного объявления на основе энтимемического рассуждения — связано с принятием допущения (помечается знаком $+$), позволяющего восстановить вспомогательный вывод, лежащий в основе какого-то предыдущего публичного обявления.

$r.4$

$$\begin{array}{r|c|c|l}
1 & \multicolumn{3}{l}{A/F} \\
2 & & \multicolumn{2}{l}{:} \\ \cline{3-3}
3 & & + & C \\ \cline{4-4}
4 & & & F \\
5 & & & : \\
6 & & & A \\
7 & \multicolumn{3}{l}{C/A}
\end{array}$$

Рассмотрим, как может быть реконструирован пример диалога **Muddy Teachers**, сценарий α.

1	$\delta_1, \delta_2, \delta_3$		
2	1 p	$r1, 1;\ p \in \delta_1$	
3	p		R, 2
4	$p \vee q$		$\vee$I, 3
5	$(p \vee q)/t$	$r3, 2-4$	
6	2 $p \vee q$	$r2, 5$	
7	$\neg q$	$r1, 1;\ \neg q \in \delta_2$	
8	$p \vee q$		R, 6
9	$\neg q$		R, 7
10	p		$\vee$E, 8, 9
11	$p/(p \vee q)$	$r3, 6-10$	
12	3 $p \vee q$	$r2, 11$	
13	$+\ \neg q$	*assumption*	
14	$p \vee q$		R, 12
15	$\neg q$		R, 13
16	p		$\vee$E, 14, 15
17	$\neg q/p$	$r4, 12-16$	

Итак, шаги 5, 11 и 17 представляют собой последовательность публичных объявлений, формирующую диалог. Три вспомогательных вывода обеспечивают возможность включить в эту последовательность соответствующие публичные объявления.

4 Направления дальнейших исследований

1. Предложенный выше вариант системы **PADME** является скорее наброском, требующим существенной доработки, уточнения и адекватных определений.

2. Выше была выделена специальная ситуация *объявления на основе (не)знания*, не нашедшая формальной экспликации. Рамки

данной статьи заставляют ограничиться только тем вариантом **PADME**, в котором «внутрення логика» вспомогательных выводов является классической. Естественно, выразительные возможности классической логики не предоставляют средств для формализации утверждений о знании или его отсутствии. В перспективе для этих целей может быть использована одна из стандартных пропоциональных систем эпистемической логики или какое-то иное исчисление.

2. Различение «внешней логики» построения диалога, характеризуемой правилами r.1–r.2, и «внутренней логики» построения вспомогательных выводов открывает интересные перспективы для варьирования правил «внутреннего» вывода. Кроме очевидной необходимости работать с утверждениями о состоянии знаний агента, легко увидеть основания для использования при построении вспомогательных выводов релевантной или паранепротиворечивой логики и т.п.

Литература

[1] *Зайцев Д. В.* Диспозиционность, энтимема и знание // Логические исследования. 2014. Вып. 20. С. 48–59.

D.V. Zaitsev

Modelling a Dialog with Public Announcements[1]

Zaitsev Dmitry Vladimirovich
Department of Logic, Faculty of Philosophy, Lomonosov Moscow State University.
Lomonosovsky prospekt 27-4, GSP-1, Moscow, 119991, Russian Federation.
e-mail: `zzdima@yandex.ru`

This contribution zeroes in providing a formal tool for modelling reasoning with public announcements.

In Section 1 I briefly delineate the idea of a new approach to public announcement interpretation via enthymematic implication presented in [1]. Section 2 contains a preliminary review of different cases representing reasoning with public announcements. Starting out from famous **Muddy Children** example I distinguish four types of such cases: initial announcement, 'derived' announcement, 'enthymematic' announcement, and 'knowledge state' announcement. In Section 3, a system **PADME** (that is Public Announcements Dialogue Modelling Engine) is introduced as a kind of Fitch-style natural deduction derivation allowing to construct 'completely Merandized' dialogue as a sequence of public announcements on the ground of supplementary subordinate derivations. Finally, in Section 4, future lines of work are observed.

Keywords: public announcemens, enthymematic implication, Fitch-style natural deduction

References

[1] Zajcev , D. V. "Dispozicionnost', jentimema i znanie" [Dispositional, enthymeme and knowledge], *Logicheskie issledovanija*, 2014, vol. 20, pp. 48–59.

[1]The paper is partly supported by the Russian Foundation for Humanities, project №̃13-03-00461.

УДК 168.5

K.I. Bakhtiyarov

Universal Language of the Metascience

Bakhtiyarov Kamil Ibragimovich
Department of Higher Mathematics,
V.P. Goryachkin Moscow State Agronomical Engineering University.
Timiryazevskaya 58, build. 15, Moscow, 127550, Russian Federation.
e-mail: `kamil.bakhtiyarov@gmail.com`

Leibniz set a problem of the Universal characteristic, but he is extremely focused on the mathematical explanation instead of **metasymbolic** consideration of the method. The symbols of a metascience are energy maximums and minimums. Creation of a block matrix (by means of the left tensor square) allowed to reveal macrolevel. The alphabet of educational metasymbols solves a problem of polystructural integration of knowledge naturally through their comparison. The genetic table has 4 blocks of the designated and anti-designated pairs of metasymbols which are based on the universal language. Universal language unites various sciences and eras, considering everything from the point of view of Eternity, allowing to expect new results.

Keywords: universal characteristic, maximums and minimums, metasymbols, Universal language

My intention was to promote
philosophy approach to a science form...
T.I. Oyzerman. Metaphilosophy

Great Leibniz considered improvement of invention art as a whole as his main, prime target. He set a problem of the Universal characteristic. However to set a problem and to solve it are absolutely different things. As a twist of fate, in article "New method *for maximums and minimums...*" (the italics are mine — *K.B*).

Primary elements form four symbols of a metascience as energy maximums and minimums:

$\wedge$ — a maximum, A — Adenin of genic code and Artist psychological type — we will designate as a sign **A**;

$\vee$ — a minimum, C — Cytosine and Power psychological type — we will designate as a reversed sign **V**;

$\cap$ — a weak maximum, g — the Guanine and Media psychological type — we will designate as a sign **n**;

$\cup$ — a weak minimum, Uracyl and Scientist psychological type — a sign **u**.

Four primary elements of the ancients: air $\cap$ is the cut sign of fire $\wedge$, water $\cup$ is the cut sign of the earth $\vee$. The alphabet of educational metasymbols solves a problem of polystructural integration of knowledge naturally through their comparison. Unlike the scanner, we see through a brain and consequently we find in the right tensor square “Petukhov’s *constellation*”. Transition to the left tensor square allowed to condense *constellation* into a monolithic block [1]. The genetic table has 4 blocks **of the designated** and anti-designated pairs of metasymbols which are based on the universal language:

Gene-blocks and Pairs

*n	*A
*V	*u

nn	***An***	**nA**	**AA**
Vn	***un***	**VA**	**uA**
nV	AV	*nu*	***Au***
VV	uV	*Vu*	***uu***

The idea of positionality goes back to Ibn Arabi’s concentric circles [2, p. 65–73] that were implemented a century later in the Ramon Llull’s machine that admired Leibniz.

The author used the diagram of genetic code-pair (macrolevel, microlevel) as an example code — to pair (microlevel, macrolevel). Douglas Hofstadter proved the necessity to transit from molecular microlevel to anthropomorphical macrolevel — from molecules to characters [6, p. 235].

The block matrix has 4 “psychological suits”: $\diamondsuit$ *n media, $\heartsuit$ *A artists, $\spadesuit$ *V power, $\clubsuit$ *u scientists. It adequately describes the genesis and the mechanism of paradigm change during scientific revolutions [5]. ***Small shift prepares big shift.***

During polysemic reduction big dominants of macrolevel have the priority (with small letters of non-dominants any letters of microlevel have the priority). **The designated values are the** codes that generate *more than one amino acid*, and non-designated values are the codes that generate *the unique amino acid*, providing the higher stability. The designation is provided by vowels, and antidesignation is provided by consonants. Thus classification of the designated and anti-designated pairs for the first time was received through the genetics. Metasymbols generated new result in logic [4].

Leibniz’s idea was amazing because he knew neither genetics, nor Jung’s psychological types. Only achievements of a modern science allowed to solve the problem of the Universal characteristic set by him. Not occasionally vulgar materialism considered genetics and cybernetics as the main enemies. Like N. Wiener Author considers Leibnitz his scientific patron. Change of scientific eras occurs through gross (dozen of dozens) years (almost according to H. Wells). Three "Critics" by Kant were published in gross of years after Leibniz's birth ($1646 + 144 = 1790$). An essence ***of Copernican revolution*** of great Kant against visibility is that thinking is above sensual consciousness. He emphasizes basic need ***of shift*** from specific implementation. In the Soviet philosophy his doctrine was, as a rule, underestimated [3, p. 28].

The general concept takes from the specific one its image and soul mates are recognized in an attire of various sciences, as projections of the general concepts. *The invisible soul should be wearing a figure-tailored suit that reveals it*, like the invisible man who walks through the city. In a triad — Leibniz's thesis, Kants's antithesis and metasynthesis — the Author picks up the scientific torch with "Symbols of universal language..." in 2 grosses of years after Leibniz's death ($1716 + 288 = 2004$). Universal language unites various sciences and eras, considering everything from the point of view of Eternity, allowing to expect new results.

References

[1] Bakhtiyarov, K. *Logika i psikhogenetika s tochki zreniya informatiki* [Logic and psychogenetics terms of Informatics]. Moscow: URSS, 2014. 208 pp. (In Russian)

[2] Ibn Arabi. "Sostavlenie okruzhnostei" [Drawing circles], *Izbrannoe*, vol. 1. M., 2013. 214 pp. (In Russian)

[3] Oizerman, T. *Kant i Gegel'* [Kant and Gegel]. Moscow: Kanon plus, 2008. 520 pp.(In Russian)

[4] Bakhtiyarov, K. "The dial of the circular complementarity of the designated and antidesignated pairs", *Studia Humana*, 2012, vol. 1, no 3/4, pp. 73–77.

[5] Bakhtiyarov, K. "Metascience symbols (universal characteristic)", *Logical Investigations*, 2014, vol. 20, pp. 213–223.

[6] Hofstadter, D. *I am a Strange Loop.* New York: Basic Books, 2007. 436 pp.

К сведению авторов

• Журнал «*Логические исследования*» принимает к публикации рукописи, содержащие изложение оригинальных результатов из различных областей современной логики, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. (Рубрики журнала см. `http://iph.ras.ru/page48601066.htm`)

• Решение о публикации текста принимается главным редактором с учетом мнения редколлегии и оценки рецензентов. Решение о публикации принимается в течение двух месяцев с момента предоставления рукописи.

• Плата за опубликование рукописей не взимается.

• Рукопись должна быть представлена в электронном виде и оформлена в формате LaTeX 2_ε (по согласованию с редколлегией — в MS Word с обязательным предоставлением pdf-файла). При подготовке рукописи в LaTeX 2_ε необходимо использовать стиль li.sty. Стилевой файл размещен в правилах предоставления рукописей: `http://iph.ras.ru/page48601066.htm`

• Объем рукописи не должен превышать 24 стр. (60 тыс. знаков), включая ссылки, примечания, список литературы, аннотацию.

• Примечания, сноски к тексту статьи делаются постранично с использованием сквозной нумерации.

• Помимо основного текста, рукопись должна включать в себя следующие обязательные элементы на **русском** и **английском языках**:

1) сведения об авторе(ах):
   - фамилия, имя и отчество автора;
   - место работы;
   - полный адрес места работы (включая индекс, страну, город);
   - адрес электронной почты автора.
2) название статьи;
3) аннотация (от 100 до 200 слов);
4) ключевые слова (5-7 слов/словосочетаний);
5) список литературы.

• Цитированная литература помещается в конце статьи общим списком в алфавитном порядке и оформляется строго в соответствии с правилами. Рукописи на русском языке обязательно должны содержать *два варианта представления списка литературы*:

1) список, озаглавленный «Литература» и выполненный в соответствии с требованиями ГОСТа.

2) список, озаглавленный «References» и выполненный в соответствии с требованиями международных библиографических баз данных (Scopus и др.). (Правила оформления литературы см. `http://iph.ras.ru/page48601066.htm`)

Статьи следует направлять по адресу
logicalinvestigations@gmail.com

Information for Authors

• *Logical Investigations* accepts for submission papers containing original results in all areas of logic. The papers should not have been published or simultaneously submitted to another publication. (Sections of the journal: `http://eng.iph.ras.ru/page49940199.htm`)

• The Editor in Chief makes the decision which of the submitted articles should be published, with due account for opinions of the Editorial Board and the reviewers. The decision is made within two months since the date of submission of the manuscript.

• Authors are not charged for the publication.

• Papers should be submitted electronically in the LaTeX 2_ε format (special permission of the editorial board is needed for submissions to be made in the MS Word format). While typesetting a paper, the style file li.sty and the master file li.tex should be used; both files, along with a sample paper file, can be accessed at `http://eng.iph.ras.ru/page49940199.htm`

• Papers should not exceed 24 pages in the above mentioned format (including the notes, the bibliography, the abstract).

• Footnotes should appear at the bottom of the page and should be numbered sequentially throughout the paper.

• In addition to the prinicipal text, the manuscript should include the following mandatory elements:

1) Information about the author(s):
    - first and last names of the author;
    - affiliation;
    - full address of the place of work (including the postal code, country and city);
    - author's e-mail address.
2) abstract (100 to 200 words);
3) keywords (5-7 words/word combinations);
4) the list of works cited.

• The bibliographical references should be placed at the end of the paper as the general list ordered alphabetically, and formatted in strict accordance with the guidelines of the international bibliographical databases (Scopus and others). Please see the guidelines here: `http://eng.iph.ras.ru/page49940199.htm`

Submissions should be e-mailed to the following address:
logicalinvestigations@gmail.com

Научно-теоретический журнал

Логические исследования
№ 21(1)

Учредитель, редакция, издатель:
Институт философии РАН

Художник *Н.Н. Попов*

Редактор *Е.А. Жукова*

Технические редакторы: *Ю.А. Аношина, Ю.В. Хорькова*

Свидетельство ПИ № ФС77-36978 от 27.07.2009 г.

Подписано в печать с оригинал-макета 21.04.15.
Формат 70x100 1/16. Печать офсетная. Гарнитура Computer Modern.
Усл. печ. л. 11,0. Уч.-изд. л. 10,32. Тираж 1 000 экз. Заказ № 12.

Оригинал-макет изготовлен в Институте философии РАН

Компьютерная верстка: *Н.Е. Томова*

Отпечатано в ЦОП Института философии РАН
119991, Москва, Волхонка, 14, стр. 5

Информацию о наших изданиях см. на сайте Института философии:
`http://iph.ras.ru/ph_j.htm`